Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 8. Das allgemeine arithmetische Mittel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Die Kurve läuft asymptotisch aus, d. h. der mittlere Fehler M nähert sich unbegrenzt der Null, ohne den Wert Null selbst je zu erreichen. Die ersten 5—10 Wiederholungen geben rasch eine Abnahme von M, d. h. eine Genauigkeitssteigerung; dann aber hat weiteres Wiederholen wenig Erfolg, und um den mittleren Fehler *einer* ersten Messung auf ein Zehntel seines Wertes herunter zu bringen, müsste man 100 Wiederholungen machen.

Das thut man aber gewöhnlich nicht; eine und dieselbe Messung pflegt man höchstens 5—10 mal zu wiederholen, und zwar nicht bloss deswegen, weil von da an der Wert M nur noch langsam abnimmt, sondern aus einem noch viel wichtigeren Grund: die Gleichung (6) und die darnach berechneten Zahlenwerte (12), nebst der dazu gehörigen Kurve, setzen nämlich voraus, dass die Messungen *nur* mit unregelmässigen, positiv oder negativ gleich wahrscheinlichen Fehlern behaftet seien, und dieses ist in Wirklichkeit fast nie der Fall. Im Gegenteil, je feiner die Messungen werden und je öfter man sie wiederholt, desto mehr kommt man zu der Überzeugung, dass fast überall konstante Fehlerquellen einwirken. Man soll daher bei Wiederholungen auch die Nebenumstände möglichst abändern, z. B. bei Winkelmessungen nach und nach verschiedene Striche der Kreisteilung benützen u. s. w.

Einführung des Gewichtes.

Zur späteren Anwendung (z. B. im folgenden § 8.) betrachten wir nochmals die wichtige Gleichung (6) in anderer Hinsicht:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad \text{oder} \qquad M^2 = \frac{m^2}{n} \tag{13}$$

Es folgt hieraus, dass man das arithmetische Mittel als Ergebnis *einer* Beobachtung betrachten kann, deren mittlerer Fehler M ist; es ist also das Genauigkeitsverhältnis dieser fingierten Beobachtung und einer ursprünglichen Beobachtung durch die Werte M und m festgestellt.

Dieses führt zu dem Begriff des *Gewichtes.*

Das Verhältnis von m^2 zu M^2 ist bestimmt durch die Zahl n, welche angiebt, wie viele Beobachtungen der einen Art in ein arithmetisches Mittel vereinigt werden müssen, damit dieses die Genauigkeit einer Beobachtung der anderen Art hat. n heisst in diesem Falle das *Gewicht* der letzteren Beobachtung (wobei man das Gewicht einer Beobachtung der ersteren Art $= 1$ setzt).

§ 8. Das allgemeine arithmetische Mittel.

Wenn zur Bestimmung einer Unbekannten mehrere *ungleichwertige* Beobachtungen vorliegen, d. h. solche, denen von vorn herein nicht gleiche Genauigkeit zuzuschreiben ist, so ist das im vorigen § 7. behandelte einfache arithmetische Mittel nicht der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten. Wie in diesem Falle zu verfahren ist, wird eine Betrachtung zeigen, welche wir mit einem einfachen Falle einleiten:

Man habe 5 gleichartige Beobachtungen l_1' l_2' l_3' l_4' l_5' und deren einfaches arithmetisches Gesamt-Mittel:

$$x = \frac{l_1' + l_2' + l_3' + l_4' + l_5'}{5} \tag{1}$$

Ausserdem betrachten wir zwei Partial-Mittel aus 2 und 3 Beobachtungen:

$$l_1 = \frac{l_1' + l_2'}{2} \qquad l_2 = \frac{l_3' + l_4' + l_5'}{3} \tag{2}$$

dann ist leicht einzusehen, dass man aus den Partial-Mitteln l_1 und l_2 wieder das Gesamtmittel x herstellen kann, ohne Zurückgreifen auf die ursprünglichen Beobachtungen l'; es ergiebt sich nämlich aus (1) und (2):

$$x = \frac{2\,l_1 + 3\,l_2}{2+3} \tag{3}$$

der an diesem einfachen Falle mit $2+3=5$ Beobachtungen gezeigte Grundgedanke lässt sich leicht auch allgemeiner durchführen; wir wollen Gruppenmittel $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ aus $p_1\, p_2\, p_3 \ldots$ ursprünglichen gleich genauen Beobachtungen annehmen, und daraus nach Analogie von (3) das Gesamtmittel berechnen

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 \ldots} = \frac{[p\,l]}{[p]} \tag{4}$$

Die Zahlen p haben hier die Bedeutung von Gewichten nach der Erklärung am Schlusse des vorigen § 7., d. h. die p sind dasselbe was die dort mit n bezeichneten Wiederholungszahlen, zu welchen die Partial-Mittel $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ gehören.

Wir gehen einen Schritt weiter, indem wir annehmen, dass diese $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ nicht Partial-Mittel, sondern selbst *unmittelbare* Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit seien; dann müsste man ebenso verfahren wie im vorigen Falle nach Gleichung (4), nachdem man zuvor diejenigen Zahlen p ermittelt hätte, welche den einzelnen Genauigkeiten entsprechen, und dieses wird erreicht, wenn man für p die Gewichte nach der am Ende des vorigen § 7. S. 24 gegebenen Definition nimmt.

Da übrigens der Wert von x in (4) nicht verändert wird, wenn man alle Gewichte p mit einer beliebigen Zahl multipliziert, so folgt, dass es zur Lösung der Aufgabe genügt, wenn solche Gewichte p benützt werden, welche den früher als Gewichte definierten Zahlen *proportional* sind, und wir werden deswegen künftig allgemein die Gewichte nur als Verhältniszahlen auffassen.

Es lässt sich weiter leicht zeigen, dass die Gewichte p umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler sein müssen, weil nach (6) § 7. S. 21 der mittlere Fehler umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Wiederholungen d. h. aus der Gewichtszahl p ist. Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die erwähnte Gleichung (6) § 7. S. 21, nämlich

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

in welcher n als Gewicht auftritt, auf 2 Fälle mit $n = p$ und $n = p'$ anwenden:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p}} \qquad M' = \frac{m}{\sqrt{p'}}.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Wenn $M\, M'$ die mittleren Fehler, und $p\, p'$ die Gewichte zweier Beobachtungen sind, so ist:

$$\frac{p}{p'} = \frac{M'^2}{M^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}} \tag{5}$$

d. h. die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler, oder die mittleren Fehler verhalten sich umgekehrt wie die Gewichtswurzeln.

Ein dem Begriff Gewicht verwandter Begriff ist der der *Genauigkeit;* bei abnehmendem mittlerem Fehler wächst sowohl das Gewicht als die Genauigkeit, jedoch in verschiedenem Mass. Während das Gewicht umgekehrt proportional dem *Quadrat* des mittleren Fehlers ist, verstehen wir unter Genauigkeit eine Grösse, welche nur umgekehrt proportional dem mittleren Fehler selbst ist. Übrigens ist kein Bedürfnis vorhanden, besondere Genauigkeitszahlen in unsern Rechnungen einzuführen.

In welcher Weise die Gewichte ermittelt werden, lässt sich nicht allgemein angeben. Am einfachsten ist die Bestimmung der Gewichte, wenn man es nicht mit unmittelbaren Beobachtungen, sondern, entsprechend der Untersuchung am Anfang dieses §, mit Partial-Mitteln aus einzelnen Beobachtungsgruppen zu thun hat, was zuweilen vorkommt.

Nachdem die Bedeutung der Gewichte p erklärt ist, giebt sich alles Weitere, ähnlich wie beim einfachen arithmetischen Mittel. Wir haben bis jetzt folgendes:

Gegeben die Beobachtungen: $l_1\ l_2\ l_3\ \ldots\ l_n$
mit den Gewichten: $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n$

Der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten ist das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_n l_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n} = \frac{[p\,l]}{[p]} \tag{6}$$

Man bildet wie früher die scheinbaren Fehler:

$$\left.\begin{array}{llll} v_1 = x - l_1 & \text{mit dem} & \text{Gewicht} & p_1 \\ v_2 = x - l_2 & \text{„} & \text{„} & p_2 \\ v_3 = x - l_3 & \text{„} & \text{„} & p_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ v_n = x = l_n & \text{„} & \text{„} & p_n \end{array}\right\} \tag{7}$$

Wenn man diese v bezw. mit ihren p multipliziert und sie dann addiert, so erhält man wegen (6):

$$[p\,v] = 0 \tag{8}$$

Wir betrachten nun denjenigen mittleren Fehler m, welcher zu einem Gewichte $p = 1$ gehört; ob unter der Reihe der $p_1\, p_2\, p_3 \ldots$ wirklich ein Wert $p = 1$ vorkommt, ist dabei gleichgültig, jedenfalls kann man sich einen solchen Wert $p = 1$ denken und den ihm entsprechenden mittleren Fehler m betrachten, welchen man auch kurz *Gewichtseinheitsfehler* nennt. Hieraus und aus den Gewichten $p_1\, p_2\, p_3 \ldots$ folgen auch nach den Verhältnissen (5) die mittleren Fehler der $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ nämlich bezw.

$$\frac{m}{\sqrt{p_1}} \qquad \frac{m}{\sqrt{p_2}} \qquad \frac{m}{\sqrt{p_3}} \qquad \ldots\ldots \qquad \frac{m}{\sqrt{p_n}} \tag{9}$$

Um nun das Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden, schreiben wir zuerst (6) in der auseinandergezogenen Form:

$$x = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \frac{p_3}{[p]} l_3 + \ldots \frac{p_n}{[p]} l_n \tag{10}$$

Dieses (10) entspricht wieder der linearen Funktion (9) des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes in § 5. S. 17, nämlich

$$x = a\,l + a'\,l' + a''\,l'' + \ldots \tag{10 a}$$

die a , a' , ... sind in (10) vertreten durch $\frac{p_1}{[p]}$, $\frac{p_2}{[p]} \ldots$ und da wir auch die mittleren Fehler der einzelnen Summanden in (9) haben, giebt die Anwendung von (10 a):

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_1}}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_2}}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_3}}\right)^2 + \cdots$$

$$M^2 = \left(\frac{m}{[p]}\right)^2 \left((\sqrt{p_1})^2 + (\sqrt{p_2})^2 + (\sqrt{p_3})^2 + \ldots\right)$$

$$M^2 = m^2 \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}{[p]^2} = m^2 \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{m^2}{[p]}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \tag{11}$$

Wir gehen über zur Bestimmung des mittleren Fehlers m einer Beobachtung vom Gewicht 1, (Gewichtseinheitsfehlers). Wenn die Gewichte p alle $= 1$ wären, so würde man aus den scheinbaren Fehlern v in (7) höchst einfach einen Mittelwert bilden wie beim einfachen arithmetischen Mittel in § 7. und obgleich dieses nicht der Fall ist, können wir doch die zu ungleichen Gewichten gehörigen v reduzieren auf gleiches Gewicht $p = 1$, nämlich nach den Proportionen (5) muss sein:

Gewicht	Fehler	Gewicht	Fehler	
p_1	v_1	1	$v_1\sqrt{p_1}$	reduziert
p_2	v_2	1	$v_2\sqrt{p_2}$	„
p_3	v_3	1	$v_3\sqrt{p_3}$	„
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	

Dabei ist angenommen, dass die scheinbaren Fehler v den Gesetzen der wahren mittleren Fehler folgen, was zulässig ist. Man berechnet nun aus den auf das Gewicht 1 reduzierten Fehlerbeträgen den mittleren Gewichtseinheitsfehler nach der früheren Formel (10) § 7. S. 21, nämlich:

$$m^2 = \frac{(v_1\sqrt{p_1})^2 + (v_2\sqrt{p_2})^2 + (v_3\sqrt{p_3})^2 + \ldots}{n-1} = \frac{[p\,v^2]}{n-1}$$

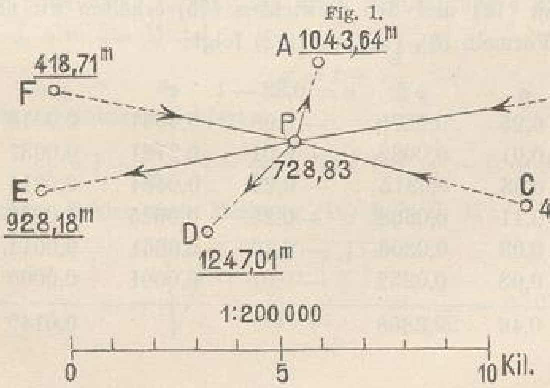
$$m = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}} \tag{12}$$

Nun hat man in den beiden Gleichungen (11) und (12) die ganze Fehlertheorie des allgemeinen arithmetischen Mittels; man kann auch aus (11) und (12) zusammen noch bilden:

$$M = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{[p]\,(n-1)}} \tag{13}$$

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir mit der nachfolgenden Fig. 1. eine Höhenberechnung nehmen, bei welcher die Gewichte nicht etwa durch ungleichartige Messungswiederholungen bestimmt sind, sondern aus der Natur der Aufgabe sich selbst ergeben.

Fig. 1.



Es seien nämlich $A\ B\ C\ D\ E\ F$ Höhenpunkte der Landesaufnahme, deren Höhen über $N.\ N.$ unabänderlich gegeben sind, z. B. A hat die Höhe 1043,64^m über $N.\ N.$ u. s. w. Wir nehmen auch an, diese 6 Höhenangaben seien fehlerfrei, oder es sollen ihre Fehler nicht in Betracht kommen neben den Fehlern der 6 fachen Höhenbestimmung von einem Punkte P aus, in welchem die Höhenwinkel nach A, B u. s. w. gemessen und mit den bekannten Entfernungen PA, PB u. s. w. zu Höhenberechnungen benützt worden sind. Auf diese Weise ist folgendes erhalten worden:

Zielweite s	Gegebene Höhen über $N.\ N.$	Gemessene Höhenunterschiede	Berechnete Höhen von P	
$AP = 2010^m$	A 1043,64^m	$h_1 = -314{,}73^m$	728,91^m	
$BP = 8903$	B 619,02	$h_2 = +109{,}20$	728,22	
$CP = 5820$	C 480,81	$h_3 = +248{,}24$	729,05	(14)
$DP = 3002$	D 1247,01	$h_4 = -518{,}43$	728,58	
$EP = 6197$	E 928,18	$h_5 = -199{,}16$	729,02	
$FP = 5800$	F 418,71	$h_6 = +310{,}13$	728,84	
			(Einfaches Mittel = 728,77^m)	

Das einfache arithmetische Mittel der 6 Höhenbestimmungen für den Punkt wäre 728,77^m; dieses einfache Mittel dürfen wir aber nicht als Resultat annehmen, weil bei der Ungleichheit der Entfernungen s die 6 Bestimmungen nicht gleichwertig sind. Aus der Theorie der trigonometrischen Höhenmessung weiss man, dass die Fehler der Höhenunterschiede h (nahezu) proportional den Zielweiten s sind, und folglich müssen die Gewichte p umgekehrt proportional den Quadraten der Zielweiten s sein, oder $p = \frac{1}{s^2}$.

Die Masseinheit ist hiebei beliebig, wir nehmen s in Kilometern, und zwar abgerundet nach (14):

$$s = 2{,}0 \quad 8{,}9 \quad 5{,}8 \quad 3{,}0 \quad 6{,}2 \quad 5{,}8 \text{ km}$$

Hieraus wird berechnet

$$p = \frac{1}{s^2} = 0{,}25 \quad 0{,}01 \quad 0{,}03 \quad 0{,}11 \quad 0{,}03 \quad 0{,}03 \tag{15}$$

Wir haben absichtlich ziemlich stark abgerundet, weil es keinen praktischen Wert hat, in solchen Fällen, wo die Gewichtsbemessung selbst auf gewissen, nicht strengen Annahmen beruht, mit vielen Dezimalen zu rechnen.

Mit den Höhen von (14) und den Gewichten (15) erhalten wir nun folgende Berechnung, welche den Formeln (6), (11) und (12) folgt:

l	p	pl	$v = 0{,}83 - l$	v^2	pv^2
728 + 0,91	0,25	0,2275	− 0,08	0,0064	0,0016
+ 0,22	0,01	0,0022	+ 0,61	0,3721	0,0037
+ 1,05	0,03	0,0315	− 0,22	0,0484	0,0015
+ 0,58	0,11	0,0638	+ 0,25	0,0625	0,0070
+ 1,02	0,03	0,0306	− 0,19	0,0361	0,0011
+ 0,84	0,03	0,0252	− 0,01	0,0001	0,0000
Summen	0,46	0,3808			0,0149

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{0{,}3808}{0{,}46} = 0{,}83$$

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}0149}{5}} = \pm\, 0{,}055^{\mathrm{m}} \tag{16}$$

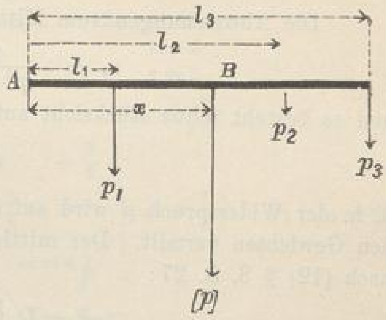
$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0{,}055}{\sqrt{0{,}46}} = \pm\, 0{,}080^{\mathrm{m}}$$

Also im ganzen: $H = 728^{\mathrm{m}} + x = 728{,}83^{\mathrm{m}}$

mit dem mittleren Fehler: $\pm\, 0{,}08^{\mathrm{m}}$.

Anmerkung zu § 8.

Fig. 2.



Die im Vorstehenden behandelten Formeln gestatten zum Teil einfache mechanische Deutungen.

Denkt man sich nach Fig. 2. verschiedene Gewichte $p_1\, p_2\, p_3 \ldots$ an einer Drehaxe A mit Hebelsarmen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ wirkend, so sind die statischen Momente dieser Gewichte bezw. $p_1\, l_1\;\; p_2\, l_2\;\; p_3\, l_3 \ldots$, und die Gleichung

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

liefert denjenigen Hebelsarm x, welcher, mit der Summe aller Gewichte $[p]$ belastet, dasselbe statische Moment giebt, wie die Summe der Einzelmomente.

Denkt man sich nun die Drehaxe von A um den Betrag x nach B verschoben, dann haben die Gewichte $p_1\, p_2\, p_3$ in Bezug auf die neue Axe B die Hebelsarme $v_1\, v_2\, v_3$, wobei

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3$$

und es ist:

$$p_1\, v_1 + p_2\, v_2 + p_3\, v_3 = [p\,v] = 0$$

oder es ist B der Schwerpunkt eines den Gewichten $p_1\, p_2\, p_3$ entsprechenden Massensystems.

Auch die Summe $[p\,v^2]$ hat eine mechanische Deutung; es ist dieses das Trägheitsmoment des soeben erwähnten Massensystems in Bezug auf die Axe B, und die Bedingung $[p\,v^2] = \text{Minimum}$, welche den Mittelwert x im Sinne der Ausgleichungsrechnung bestimmt, heisst im Sinne der Meckanik, es soll B eine Axe kleinsten Trägheitsmomentes sein.

§ 9. Besonderer Fall zweier Beobachtungen.

Zur Übung der Theorie vom arithmetischen Mittel nehmen wir den Fall zweier Beobachtungen, welcher ausserdem in manchen Beziehungen wichtig ist.

Wenn zwei gleich genaue Beobachtungen vorliegen, welche um den Betrag d von einander abweichen, so mag die erste Beobachtung l sein und die zweite Beobachtung $l + d$, also das Mittel

$$x = l + \frac{d}{2}$$

dann sind die scheinbaren Fehler:

$$v_1 = l + \frac{d}{2} - l = +\frac{d}{2} \text{ und } l + \frac{d}{2} - (l + d) = -\frac{d}{2}$$

also der mittlere Fehler einer Messung (10) § 7. S. 21:

$$m = \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2-1}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, d \tag{1}$$