UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 9. Besonderer Fall zweier Beobachtungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Visual Library

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{0{,}3808}{0{,}46} = 0{,}83$$

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}0149}{5}} = \pm\, 0{,}055^{\mathrm{m}} \tag{16}$$

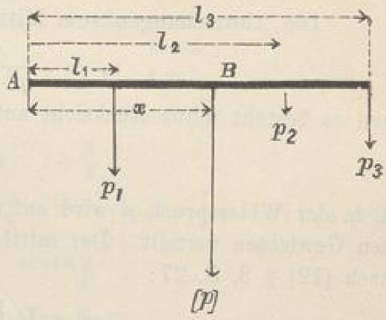
$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0{,}055}{\sqrt{0{,}46}} = \pm\, 0{,}080^{\mathrm{m}}$$

Also im ganzen: $H = 728^{\mathrm{m}} + x = 728{,}83^{\mathrm{m}}$
mit dem mittleren Fehler: $\pm\, 0{,}08^{\mathrm{m}}$.

Anmerkung zu § 8.

Die im Vorstehenden behandelten Formeln gestatten zum Teil einfache mechanische Deutungen.

Fig. 2.



Denkt man sich nach Fig. 2. verschiedene Gewichte $p_1\, p_2\, p_3 \ldots$ an einer Drehaxe A mit Hebelsarmen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ wirkend, so sind die statischen Momente dieser Gewichte bezw. $p_1\, l_1 \quad p_2\, l_2 \quad p_3\, l_3 \ldots$, und die Gleichung

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

liefert denjenigen Hebelsarm x, welcher, mit der Summe aller Gewichte $[p]$ belastet, dasselbe statische Moment giebt, wie die Summe der Einzelmomente.

Denkt man sich nun die Drehaxe von A um den Betrag x nach B verschoben, dann haben die Gewichte $p_1\, p_2\, p_3$ in Bezug auf die neue Axe B die Hebelsarme $v_1\, v_2\, v_3$, wobei

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3$$

und es ist:

$$p_1\, v_1 + p_2\, v_2 + p_3\, v_3 = [p\, v] = 0$$

oder es ist B der Schwerpunkt eines den Gewichten $p_1\, p_2\, p_3$ entsprechenden Massensystems.

Auch die Summe $[p\, v^2]$ hat eine mechanische Deutung; es ist dieses das Trägheitsmoment des soeben erwähnten Massensystems in Bezug auf die Axe B, und die Bedingung $[p\, v^2] =$ Minimum, welche den Mittelwert x im Sinne der Ausgleichungsrechnung bestimmt, heisst im Sinne der Meckanik, es soll B eine Axe kleinsten Trägheitsmomentes sein.

§ 9. Besonderer Fall zweier Beobachtungen.

Zur Übung der Theorie vom arithmetischen Mittel nehmen wir den Fall zweier Beobachtungen, welcher ausserdem in manchen Beziehungen wichtig ist.

Wenn zwei gleich genaue Beobachtungen vorliegen, welche um den Betrag d von einander abweichen, so mag die erste Beobachtung l sein und die zweite Beobachtung $l + d$, also das Mittel

$$x = l + \frac{d}{2}$$

dann sind die scheinbaren Fehler:

$$v_1 = l + \frac{d}{2} - l = + \frac{d}{2} \quad \text{und} \quad l + \frac{d}{2} - (l + d) = - \frac{d}{2}$$

also der mittlere Fehler einer Messung (10) § 7. S. 21:

$$m = \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2-1}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, d \tag{1}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und der mittlere Fehler des Mittels selbst, nach (11) § 7. S. 22:

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2} = 0{,}5\,d \tag{2}$$

Dieser Fall war sehr einfach und wird in § 11. uns nochmals in weiterem Sinne beschäftigen.

Wir gehen auch noch über zu dem Falle zweier ungleich genauer Messungen derselben Grösse.

Wenn zwei ungleichartige Beobachtungen mit den Gewichten p und q vorliegen, welche um den Betrag d von einander abweichen, indem etwa die erste den Wert l und die zweite den Wert $l + d$ geliefert hat, so wird das Mittel:

$$x = \frac{p\,l + q\,(l + d)}{p + q} = l + \frac{q}{p + q}\,d \tag{3}$$

Die Abweichungen vom Mittel, d. h. die scheinbaren Fehler werden:

$$v_1 = +\frac{q}{p + q}\,d \qquad v_2 = -\frac{p}{p + q}\,d \tag{4}$$

und es besteht (ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) das Verhältnis:

$$v_1 : v_2 = \frac{1}{p} : \frac{1}{q} \tag{5}$$

d. h. der Widerspruch d wird auf die beiden Beobachtungen umgekehrt proportional den Gewichten verteilt. Der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird nach (12) § 8. S. 27:

$$m = \sqrt{\frac{p\,v_1^2 + q\,v_2^2}{2 - 1}} = d\sqrt{\frac{p\,q}{p + q}} \tag{6}$$

und der mittlere Fehler des Mittels selbst nach (13) § 8. S. 27:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p + q}} = \frac{d}{p + q}\sqrt{p\,q} \tag{7}$$

Die mittleren zu fürchtenden Fehler m_1 und m_2 der beiden Beobachtungen *vor* der Ausgleichung sind:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p}} \quad , \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{q}} \tag{8}$$

Es besteht also das Verhältnis:

$$m_1 : m_2 = \frac{1}{\sqrt{p}} : \frac{1}{\sqrt{q}} \tag{9}$$

Wir wollen hieran einige Betrachtungen anknüpfen, welche zur Vermeidung von Missverständnissen nützlich sind:

Bei einer ersten Betrachtung scheint die Gleichung (9) und die Gleichung (5) nicht gut vereinbar. Die Verbesserungen v_1 und v_2, welche man schliesslich den Messungen zuteilt, haben ein anderes Verhältnis als die mittleren zu fürchtenden Fehler m_1 und m_2, welche man den Messungen von vornherein zugeschrieben hat. Man hat sich hier zu erinnern, dass der Widerspruch d entstanden ist als die Differenz zweier Beobachtungen, deren *mittlere* zu fürchtende Fehler $\pm m_1$ und $\pm m_2$ sind, dass man also im Mittel nicht annehmen darf

$$m_1 + m_2 = d$$

sondern:

$$\pm m_1 \pm m_2 = d$$

also nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (6) § 5. S. 16

$$m_1^2 + m_2^2 = d^2$$

und diese Beziehung wird durch die Werte m_1 und m_2 von (8) und (6) in der That erfüllt. Dagegen sind v_1 und v_2 die *bestimmten* Korrektionen, welche man den Beobachtungen zuteilt, und welche deshalb die Beziehung erfüllen müssen:

$$v_1 - v_2 = d$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese v sind übrigens durchaus nicht untrüglich, im Gegenteil, es haftet ihnen der mittlere Fehler M des Mittels selbst an, und man muss deswegen annehmen, dass v_1 einschliesslich seiner Unsicherheit M, dem a priori zu fürchtenden Fehler m_1 gleich ist, d. h.

$$v_1 \pm M = \pm m_1$$

also nach (4), (7), (8) und (6):

$$\frac{q}{p+q} d \pm \frac{d}{p+q} \sqrt{p\,q} = d \sqrt{\frac{q}{p+q}}$$

und in der That giebt die Quadrierung mit Weglassung des mit $\pm$ behafteten Doppelproduktes eine identische Gleichung:

$$\frac{q^2 + p\,q}{(p+q)^2} = \frac{q}{p+q}$$

Zur weiteren Veranschaulichung behandeln wir noch den einfachen Fall $p = 1$, $q = 2$, d. h. es ist eine Unbekannte zweimal beobachtet worden, und zwar das erstemal mit dem Gewicht 1, das zweitemal mit dem Gewichte 2. Die Beobachtungen haben die Differenz d gegeben. Entsprechend vorstehenden Gleichungen erhält man:

	Beobachtung 1.	Beobachtung 2.	
Beobachtungsresultate	l	$l + d$	
Gewichte	$p = 1$	$q = 2$	
Mittlere Fehler vor der Ausgleichung	$m_1 = m$	$m_2 = \frac{m}{\sqrt{2}}$	
Mittel, wahrscheinlichster Wert	$l + \frac{2}{3} d$		
Wahrscheinlichste Verbesserungen	$v_1 = + \frac{2}{3} d$	$v_2 = - \frac{1}{3} d$	$(v_1 - v_2 = d)$
Mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1	$m = d \sqrt{\frac{2}{3}}$		
Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels . . .	$M = \frac{d}{3} \sqrt{2}$		

Es bestehen die Verhältnisse:

Mittlere Fehler vor der Ausgleichung	$m_1 : m_2 = \sqrt{2} : 1{,}414 : 1$
Genauigkeiten	$\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = 1 : 1{,}414$
Verbesserungen	$v_1 : v_2 = 2 : 1.$

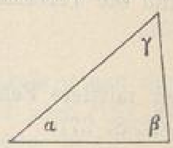
Wenn dagegen zwei Beobachtungen vorlägen, deren Genauigkeiten a priori sich wie 1 : 2 verhielten, so müsste man den Widerspruch im Verhältnis 4 : 1 verteilen.

§ 10. Winkelausgleichung in einem Dreieck.

Eine einfache Aufgabe, welche zunächst nicht als Mittelbildung mit Gewichten erscheint, welche aber hierauf zurückgeführt werden kann, ist die Ausgleichung der 3 Winkel in einem Dreieck.

Wenn in einem ebenen Dreieck (Fig. 1.) die drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen werden, mit den Ergebnissen α, β, γ, so wird wegen der Messungsfehler ein Widerspruch der Summe $\alpha + \beta + \gamma$ gegen 180° auftreten, welchen man auf die drei gemessenen Winkel zu gleichen Teilen verteilt. Um dieses bekannte Verfahren durch das Prinzip des arithmetischen Mittels zu begründen, betrachten wir zunächst nur *einen* der drei Winkel als Unbekannte.

Fig. 1.
$\alpha + \beta + \gamma - 180° = w.$



Für den ersten Winkel sind zwei unabhängige Beobachtungsergebnisse vorhanden:

$$\text{erstens } x_1 = \alpha \text{ mit dem Gewicht} = p_1 = 1 \tag{1}$$

$$\text{zweitens } x_2 = 180° - (\beta + \gamma) \text{ mit dem Gewicht} = p_2 = \frac{1}{2} \tag{2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN