Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 10. Winkelausgleichung in einem Dreieck

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Diese v sind übrigens durchaus nicht untrüglich, im Gegenteil, es haftet ihnen der mittlere Fehler M des Mittels selbst an, und man muss deswegen annehmen, dass v_1 einschliesslich seiner Unsicherheit M, dem a priori zu fürchtenden Fehler m_1 gleich ist, d. h.

$$v_1 \pm M = \pm m_1$$

also nach (4), (7), (8) und (6):

$$\frac{q}{p+q} d \pm \frac{d}{p+q} \sqrt{p\,q} = d \sqrt{\frac{q}{p+q}}$$

und in der That giebt die Quadrierung mit Weglassung des mit $\pm$ behafteten Doppelproduktes eine identische Gleichung:

$$\frac{q^2 + p\,q}{(p+q)^2} = \frac{q}{p+q}$$

Zur weiteren Veranschaulichung behandeln wir noch den einfachen Fall $p = 1$, $q = 2$, d. h. es ist eine Unbekannte zweimal beobachtet worden, und zwar das erstemal mit dem Gewicht 1, das zweitemal mit dem Gewichte 2. Die Beobachtungen haben die Differenz d gegeben. Entsprechend vorstehenden Gleicnungen erhält man:

	Beobachtung 1.	Beobachtung 2.	
Beobachtungsresultate	l	$l + d$	
Gewichte	$p = 1$	$q = 2$	
Mittlere Fehler vor der Ausgleichung	$m_1 = m$	$m_2 = \frac{m}{\sqrt{2}}$	
Mittel, wahrscheinlichster Wert	$l + \frac{2}{3} d$		
Wahrscheinlichste Verbesserungen	$v_1 = + \frac{2}{3} d$	$v_2 = - \frac{1}{3} d$	$(v_1 - v_2 = d)$
Mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1	$m = d \sqrt{\frac{2}{3}}$		
Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels . . .	$M = \frac{d}{3} \sqrt{2}$		

Es bestehen die Verhältnisse:

Mittlere Fehler vor der Ausgleichung . . . . . $m_1 : m_2 = \sqrt{2} : 1{,}414 : 1$

Genauigkeiten . . . . $\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = 1 : 1{,}414$

Verbesserungen . . . . $v_1 : v_2 = 2 : 1.$

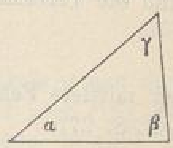
Wenn dagegen zwei Beobachtungen vorlägen, deren Genauigkeiten a priori sich wie 1 : 2 verhielten, so müsste man den Widerspruch im Verhältnis 4 : 1 verteilen.

§ 10. Winkelausgleichung in einem Dreieck.

Eine einfache Aufgabe, welche zunächst nicht als Mittelbildung mit Gewichten erscheint, welche aber hierauf zurückgeführt werden kann, ist die Ausgleichung der 3 Winkel in einem Dreieck.

Wenn in einem ebenen Dreieck (Fig. 1.) die drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen werden, mit den Ergebnissen α, β, γ, so wird wegen der Messungsfehler ein Widerspruch der Summe $\alpha + \beta + \gamma$ gegen 180° auftreten, welchen man auf die drei gemessenen Winkel zu gleichen Teilen verteilt. Um dieses bekannte Verfahren durch das Prinzip des arithmetischen Mittels zu begründen, betrachten wir zunächst nur *einen* der drei Winkel als Unbekannte.

Fig. 1.
$\alpha + \beta + \gamma - 180° = w.$



Für den ersten Winkel sind zwei unabhängige Beobachtungsergebnisse vorhanden:

erstens $x_1 = \alpha$ mit dem Gewicht $= p_1 = 1$ (1)

zweitens $x_2 = 180° - (\beta + \gamma)$ mit dem Gewicht $= p_2 = \frac{1}{2}$ (2)

Das zweite Gewicht ist $= \frac{1}{2}$, weil in x_2 die Fehler von β *und* von γ, d. h. der $\sqrt{2}$fache Wert eines mittleren Winkelfehlers, zusammenwirken, was nach den Proportionen (5) § 8. S. 25 das Gewicht $= \frac{1}{2}$ liefert, oder ausführlicher:

$$\text{mittlerer Fehler von } x_1 \text{ ist } m_1 = \pm m$$

$$\text{„ „ „ } x_2 \text{ „ } m_2 = + m \pm m = m\sqrt{2}$$

$$\text{also } m_1 : m_2 = 1 : \sqrt{2}$$

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1{}^2} : \frac{1}{m_2{}^2} = \frac{1}{2}$$

Der Mittelwert aus (1) und (2) ist also mit Rücksicht auf diese Gewichte:

$$x = \frac{1 \times \alpha + \frac{1}{2} \times [180° - (\beta + \gamma)]}{1 + \frac{1}{2}} \tag{3}$$

Wenn man hierin den Dreiecks-Widerspruch w einführt:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180° = w \tag{4}$$

$$\text{also } 180° - (\beta + \gamma) = \alpha - w$$

so giebt die Einsetzung in (3):

$$x = \frac{2\,\alpha + (\alpha - w)}{3} = \alpha - \frac{w}{3} \tag{5}$$

Dasselbe gilt auch für die beiden anderen Winkel des Dreiecks, welche mit y und z bezeichnet sein mögen, d. h.:

$$x = \alpha - \frac{w}{3}$$

$$y = \beta - \frac{w}{3}$$

$$z = \gamma - \frac{w}{3}$$

$$\text{Summe: } x + y + z = \alpha + \beta + \gamma - w$$

d. h. der Widerspruch w wird auf die drei Winkel gleich verteilt.

Wenn wir auch noch die mittleren Fehler berechnen wollen, so müssen wir festhalten, dass bei der gewählten Behandlungsweise wir in (1) und (2) es mit *zwei* Beobachtungen einer Unbekannten x zu thun haben.

Die Verbesserung v_1 der ersten Beobachtung x_1 nach (1) ist:

$$v_1 = -\frac{w}{3} \tag{6}$$

und die Verbesserung v_2 der zweiten Beobachtung x_2 nach (2) ist:

$$v_2 = + \frac{w}{3} + \frac{w}{3} = \frac{2w}{3} \tag{7}$$

der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird (nach der Formel (12) § 8. S. 27):

$$m = \pm \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2}{2 - 1}} = \pm \sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\,w}{3}\right)^2} = \pm \frac{w}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

Da dem Winkel α vor der Ausgleichung das Gewicht 1 zugeteilt war, (ebenso wie auch den Winkeln β und γ), so ist dieser Wert m zugleich der mittlere Fehler eines Winkels *vor* der Ausgleichung. *Nach* der Ausgleichung erhält der verbesserte Winkelwert x (ebenso wie auch y und z) ein grösseres Gewicht, nämlich die Summe $p_1 + p_2 = \frac{3}{2}$, und damit wird der mittlere zu fürchtende Fehler des Winkels x (oder auch y oder z) *nach* der Ausgleichung (nach der Formel (11) § 8. S. 27):

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{w}{3} \sqrt{2} \tag{9}$$

Der mittlere Fehler nach (8), $m = \pm \frac{w}{\sqrt{3}}$, lässt sich sehr anschaulich unmittelbar deuten: der Schlussfehler w ist nämlich die unregelmässige Zusammenwirkung dreier Fehler $\pm m$, also:

$$\pm m \pm m \pm m = \pm w$$

woraus:

$$m^2 + m^2 + m^2 = w^2$$

was mit (8) übereinstimmt.

Der mittlere Fehler m vor der Ausgleichung und der mittlere Fehler M nach der Ausgleichung veranschaulichen durch ihr Verhältnis den durch die Ausgleichung erzielten Genauigkeitsgewinn. Nach (8) und (9) ist:

$$M : m = \sqrt{\frac{2}{3}} : 1 = 0{,}816 : 1 \tag{10}$$

Der mittlere Fehler hat infolge der Ausgleichung im Verhältnis rund 0,8 : 1 abgenommen, also die Genauigkeit hat in dem Verhältnis 1 : 0,8 zugenommen.

Oder man kann auch sagen: durch die Ausgleichung der drei Winkel in einem Dreieck ist eine Genauigkeitssteigerung von 20 % für den einzelnen Winkel erreicht worden.

Das vorstehende Beispiel, welches zur Einführung in die Theorie der Gewichte sich gut eignet, kann auch noch so ausgedehnt werden, dass die drei gemessenen Winkel nicht wie vorher gleichgewichtig, sondern selbst mit ungleichen Gewichten beobachtet sind.

Wir wollen diesen Fall auch noch durchführen:

Es seien gemessen die 3 Winkel $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ (11)

mit den Gewichten $p_\alpha \quad p_\beta \quad p_\gamma$ (12)

der Dreieckswiderspruch ist $\alpha + \beta + \gamma - 180° = w$ (13)

Ist m der mittlere Gewichtseinheitsfehler, so sind die mittleren Winkelfehler, entsprechend den Gewichten (12) vor der Ausgleichung:

$$m_\alpha = \frac{m}{\sqrt{p_\alpha}} \qquad m_\beta = \frac{m}{\sqrt{p_\beta}} \qquad m_\gamma = \frac{m}{\sqrt{p_\gamma}} \tag{14}$$

also:

$$m_\alpha{}^2 = m^2 \left(\frac{1}{p_\alpha}\right) \qquad m_\beta{}^2 + m_\gamma{}^2 = m^2 \left(\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}\right) \tag{15}$$

Bezeichnet man nun mit p_1 das Gewicht des gemessenen Winkels α und mit p_2 das Gewicht der Summe der zwei anderen Winkel $\beta + \gamma$, so wird nach (15), da die Gewichte umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler sind:

$$p_1 = p_\alpha = \frac{1}{\frac{1}{p_\alpha}} \qquad p_2 = \frac{1}{\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}} \tag{16}$$

Zur Abkürzung setzen wir die Summe

$$\frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma} = \left[\frac{1}{p}\right], \text{ und damit giebt (16):}$$

$$p_1 + p_2 = \frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}\right)} \tag{17}$$

Nach diesen Vorbereitungen in Bezug auf die Gewichte haben wir nun ähnlich wie bei (3):

$$x = \frac{p_1\,\alpha + p_2\,[180^\circ - (\beta + \gamma)]}{p_1 + p_2} = \frac{p_1\,\alpha + p_2\,(\alpha - w)}{p_1 + p_2}$$

$$x = \alpha - \frac{p_2}{p_1 + p_2}\,w$$

Setzt man hier (16) und (17) ein, so wird:

$$x = \alpha - \frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\,w \tag{18}$$

Da für die beiden anderen Winkel ähnliche Gleichungen gelten, hat man den Satz, dass der Widerspruch w auf die drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ umgekehrt proportional den Gewichten oder proportional den Quadraten der mittleren Fehler verteilt wird.

Man kann nun auch ähnliche Formeln wie (8) und (9), welche bei gleichen Gewichten gelten, für ungleiche Gewichte entwickeln. Indem wir diese Entwicklung als Übungsbeispiel anheim geben, schreiben wir davon nur die Ergebnisse:

$$\text{Mittlerer Gewichtseinheitsfehler } m = \frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \tag{19}$$

Mittlerer Fehler des Winkels α vor der Ausgleichung:

$$m_\alpha = \frac{m}{\sqrt{p_\alpha}} = w\,\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \tag{20}$$

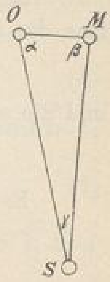
Mittlerer Fehler des Winkels α bezw. x nach der Ausgleichung:

$$M_\alpha = w\,\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}\sqrt{\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{21}$$

Auch ein Zahlenbeispiel für ein Dreieck mit drei ungleichgewichtigen Winkeln möge hier eine Stelle finden, welches wir in den „Astr. Nachr., 75. Band 1870“ S. 293 aus Badischen und Hessischen Winkeln verschiedenster Herkunft zusammengebracht haben, mit der Bemerkung, dass solche Gewichtsunterscheidungen praktisch immer misslich sind, während für ein formelles Rechenbeispiel sich das vorgeführte wohl eignet.

In dem Dreieck Oggersheim—Mannheim—Speyer, welches in Fig. 2. dargestellt ist, hat man

Fig. 2.



	Gemessene Winkel	Gewichte
	$\alpha = 72° \; 16' \; 44{,}86''$	$p\alpha = 27$
	$\beta = 90 \quad 1 \quad 56{,}46$	$p\beta = 42$
	$\gamma = 17 \quad 41 \quad 17{,}43$	$p\gamma = 65$
Summe:	$\alpha + \beta + \gamma = 179° \; 59' \; 58{,}75''$	
soll	$180° \; 0' \; 0{,}29''$	
Widerspruch:	$w = \; -1{,}54''$	

Gewichts-Reciproken: $\dfrac{1}{p\alpha} = 0{,}037 \quad , \quad \dfrac{1}{p\beta} = 0{,}024 \quad , \quad \dfrac{1}{p\gamma} = 0{,}015$

$$\left[\frac{1}{p}\right] = 0{,}076$$

Winkelverbesserungen: $v_\alpha = \dfrac{0{,}037}{0{,}076} 1{,}54'' = +0{,}75'' \qquad v_\beta = +0{,}49'' \qquad v_\gamma = +0{,}30''$

Gemessen	Verbesserungen	Ausgeglichen
72° 16′ 44,86″	+0,75″	72° 16′ 45,61″
90 1 56,46	+0,49	90 1 56,95
17 41 17,43	+0,30	17 41 17,73
179° 59′ 58,75″	+1,54″	180° 0′ 0,29″

Nach (19) bestimmt man den mittleren Fehler für die Gewichtseinheit:

$$m = \pm 5{,}59''$$

und nach (21) berechnet man die mittleren Fehler der ausgeglichenen Winkel, und hat damit das Schlussergebnis:

$$\alpha = 72° \; 16' \; 45{,}61'' \pm 0{,}77''$$
$$\beta = 90° \; 1' \; 56{,}95'' \pm 0{,}72''$$
$$\gamma = 17° \; 41' \; 17{,}73'' \pm 0{,}61''$$

In ähnlicher Weise, wie hier mit der Aufgabe der Dreieckswinkelausgleichung geschehen ist, können noch manche andere Aufgaben, welche beim ersten Anblick eine Ausgleichung mit mehreren Unbekannten zu verlangen scheinen, auf die Bestimmung *einer* Unbekannten durch das arithmetische Mittel zurückgeführt werden, jedenfalls kann eine Ausgleichung mit *einer* Summenprobe für mehrere unmittelbar gemessene Grössen ganz nach dem vorhergehenden Muster einer Summenprobe für drei Elemente behandelt werden.

In ähnlicher Weise kann auch jede Ausgleichung mit *einer* streng zu erfüllenden Bedingungsgleichung, auf den Fall des arithmetischen Mittels zurückgeführt werden.

§ 11. Beobachtungs-Differenzen.

Wenn man eine Messung zweifach macht, z. B. eine Gerade hin und her misst, oder eine Nivellierung hin und her macht u. s. w., so kann man auf je zwei solcher Messungen die Sätze vom arithmetischen Mittel anwenden, wie wir schon in § 9. S. 29 gethan haben; und man kann immer, wenn von Beobachtungs-Differenzen die Rede ist, die beiden in Betracht kommenden Messungen selbständig vorführen; indessen