Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 12. Allgemeines Ausgleichungsprinzip

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

§ 12. Allgemeines Ausgleichungsprinzip.

Das arithmetische Mittel genügt nur zur Ausgleichung von Beobachtungen *einer* Unbekannten. Wenn zur Bestimmung *mehrerer* Unbekannter Beobachtungen in überschüssiger Zahl vorhanden sind, so muss ein allgemeineres Ausgleichungsprinzip gesucht werden. Alle Ausgleichungsaufgaben werden sich auf eine Grundaufgabe zurückführen lassen, nämlich:

Es liegen folgende n Gleichungen vor:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} 0 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 \\ 0 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 \\ 0 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + l_n \end{array}}_{\text{Anzahl} = u} \right\} \qquad (1)$$

Die Grössen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ sind durch Beobachtungen erhalten worden, $x\ y\ z \ldots$ sind Unbekannte, welche mit den Beobachtungen l in Beziehungen stehen. Die Coefficienten $a\ b\ c \ldots$ der diese Beziehungen ausdrückenden Gleichungen (1) sind fehlerfrei gegeben.

Die Anzahl n der Beobachtungen und der Gleichungen (1) soll immer grösser sein als die Anzahl u der darin vorkommenden Unbekannten, d. h.:

$$n > u \qquad (2)$$

Es wird daher im allgemeinen nicht möglich sein, ein System von Unbekannten $x\ y\ z$ zu finden, welches *allen* Gleichungen (1) Genüge leistet. In diesen Gleichungen werden Widersprüche auftreten, welche wir mit $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n$ bezeichnen; und damit gehen die Gleichungen (1) über in die folgenden neuen Gleichungen, denen wir den Namen Fehlergleichungen geben:

Fehlergleichungen

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \quad + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \quad + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots \quad + l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = a_n x + b_n y \pm c_n z + \ldots \quad + l_n \end{array}}_{\text{Anzahl} = u} \right\} \qquad (3)$$

Man kann nur verlangen, dass von den n Widersprüchen v eine Anzahl u verschwindet, man muss also notgedrungen auf die Bedingung, dass *alle* v gleich Null werden, verzichten, und sich mit einem System $x\ y\ z \ldots$ begnügen, für welches die v im allgemeinen *nicht* gleich Null werden.

Die Aufgabe, ein solches System zu finden, ist ohne weitere Bedingung eine unbestimmte; eine solche weitere Bedingung ist insofern vorhanden, als die Widersprüche v in ihrer Gesamtheit möglichst klein sein sollen, so dass den Gleichungen (1) möglichst wenig Zwang angethan wird.

Die allseitig befriedigende mathematische Formulierung dieser Bedingung des möglichst Anpassens, oder des kleinsten Zwangs lautet:

Es soll die **Quadrat-Summe** der Widersprüche v möglichst klein sein, oder in einer Formel:

$$[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = \text{Minimum} \tag{4}$$

Diese einfache Bedingung gilt aber nur unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungen l, zu welchen die Verbesserungen v gehören, a priori *gleich* genau zu achten sind. Ist dieses nicht der Fall, und kommen den Beobachtungen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n$ a priori die mittleren zu fürchtenden Fehler $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$ zu, so gilt statt (4) die geänderte Bedingung:

$$\left[\frac{v^2}{m_2}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{m_3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2 = \text{Minimum} \tag{5}$$

Oder indem man unter Gewichten $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n$ solche Zahlen versteht, welche den Quadraten $m_1^2\, m_2^2\, m_3^2 \ldots m_n^2$ umgekehrt proportional sind, kann man statt (5) auch schreiben:

$$[p\, v^2] = p_1\, v_1^2 + p_2\, v_2^2 + p_3\, v_3^2 + \ldots p_n\, v_n^2 = \text{Minimum} \tag{5a}$$

Dieses Prinzip der kleinsten Quadratsumme $[v^2]$ bezw. $[p\, v^2]$ ist ebenso willkürlich wie der Begriff des mittleren Fehlers selbst, wie wir schon beim mittleren Fehler § 4. S. 14 bemerkt haben. Die Nützlichkeit des Quadratsummenprinzips erweist sich aber am besten aus seinen Folgerungen, indem auf dieses Prinzip die ganze heutige Methode der kleinsten Quadrate gegründet werden konnte.

Ehe wir weiteren Gebrauch von dem Prinzip der Gleichung (4), bzw. (5) oder (5a) machen, überzeugen wir uns, dass dieses Prinzip im Einklang mit dem schon früher behandelten arithmetischen Mittel ist.

Man habe eine Grösse x wiederholt beobachtet

mit den Ergebnissen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n$
und mit den Gewichten $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n$

Der Hypothese, es sei x der wahrscheinlichste Wert, entsprechen die wahrscheinlichsten Verbesserungen v der Beobachtungen:

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3 \ldots \qquad v_n = x - l_n$$

Nach (5a) soll sein:

$$p_1\,(x - l_1)^2 + p_2\,(x - l_2)^2 + p_3\,(x - l_3)^2 + \ldots = \text{Minimum}$$

woraus durch Differentiieren nach der Veränderlichen x erhalten wird:

$$2\,p_1\,(x - l_1) + 2\,p_2\,(x - l_2) + 2\,p_3\,(x - l_3) + \ldots = 0$$

also mit Auflösung nach x:

$$x = \frac{p_1\, l_1 + p_2\, l_2 + p_3\, l_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots} = \frac{[p\, l]}{[p]}$$

in Übereinstimmung mit (4) § 8. S. 25

Man kann auch noch in anderer Weise das arithmetische Mittel als besonderen Fall unserer allgemeineren Ausgleichungsaufgabe nachweisen:

Zur Bestimmung der unbekannten Grösse x sollen die Beobachtungen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ gemacht werden, wobei die Beziehnungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} a_1\, x + l_1 &= 0 \\ a_2\, x + l_2 &= 0 \\ a_3\, x + l_3 &= 0 \\ \ldots&\ldots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Es ist also x niemals unmittelbar beobachtet, man kann aber x in den Beobachtungen l mehrfach ausdrücken, nämlich:

$$1)\ x = -\frac{l_1}{a_1} \qquad 2)\ x = -\frac{l_2}{a_2} \qquad 3)\ x = -\frac{l_3}{a_3} \text{ u. s. w.} \tag{7}$$

Es sollen nun die Gewichte der ursprünglichen Beobachtungen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ alle gleich, nämlich $= 1$ sein, und m sei der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1, dann sind die mittleren Fehler der verschiedenen in (7) enthaltenen Bestimmungen von x bzw.:

$$\frac{m}{a_1} \qquad \frac{m}{a_2} \qquad \frac{m}{a_3} \ldots \tag{8}$$

folglich die Gewichte der Werte x umgekehrt proportional den Quadraten hievon, d. h.:

$$\text{Gewichte:} \quad a_1^2 \qquad a_2^2 \qquad a_3^2 \ldots \tag{9}$$

Nachdem die Gewichte (9) ermittelt sind, erhält man den wahrscheinlichsten Wert von x aus (7) und (9), nach dem Prinzip der Gleichung (4) § 8. S. 25:

$$x = \frac{-a_1^2\frac{l_1}{a_1} - a_2^2\frac{l_2}{a_2} - a_3^2\frac{l_3}{a_3} - \ldots}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots}$$

$$x = -\frac{a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots}{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots}$$

$$x = -\frac{[a\,l]}{[a\,a]} \tag{10}$$

Diese Gleichung wird im folgenden § 13. bestätigt werden, indem die erste Gleichung (3) S. 45 daselbst mit $y = 0$ geben wird:

$$[a\,a]\,x + [a\,l] = 0$$

Nachdem hiernach das allgemeine Ausgleichungsprinzip $[v^2] =$ Minimum in Übereinstimmung mit dem arithmetischen Mittel befindlich, und dadurch um so mehr Vertrauen verdienend erkannt worden ist, wollen wir die Sache hier noch so weit verfolgen, dass die Ermittlung der Unbekannten $x, y, z \ldots$ klargestellt wird.

Angenommen man habe nur *drei* Elemente x, y, z mit mehr als drei Fehlergleichungen, alle mit gleichen Gewichten, so heisse eine einzelne dieser Fehlergleichungen:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l \tag{11}$$

Also ist das zugehörige Quadrat:

$$\left.\begin{aligned} v^2 = a^2 x^2 &+ 2\,a\,b\,x\,y + 2\,a\,c\,x\,z + 2\,a\,l\,x \\ &+ b^2 y^2 \quad + 2\,b\,c\,y\,z + 2\,b\,l\,y \\ &\qquad\quad + c^2 z^2 \quad + 2\,c\,l\,z \\ &\qquad\qquad\qquad\quad + l^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die entsprechende Quadratsumme wird, wenn wie üblich, $a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots = [aa]$, und $a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots = [a\,b]$ u. s. w. bezeichnet wird:

$$\left.\begin{aligned} [v^2] = [a\,a]\,x^2 &+ 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z + 2\,[a\,l]\,x \\ &+ \ [b\,b]\,y^2 \ + 2\,[b\,c]\,y\,z + 2\,[b\,l]\,y \\ &\qquad\quad + \ [c\,c]\,z^2 \ + 2\,[c\,l]\,z \\ &\qquad\qquad\qquad\quad + \ [l\,l] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Nach dem Quadratsummen-Minimums-Prinzip muss werden:

$$\frac{\partial\,[v^2]}{\partial\,x} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v^2]}{\partial\,y} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v^2]}{\partial\,z} = 0$$

Dieses ausgeführt giebt:

$$\begin{aligned} 2\,[a\,a]\,x + 2\,[a\,b]\,y + 2\,[a\,c]\,z + 2\,[a\,l] &= 0 \\ 2\,[a\,b]\,x + 2\,[b\,b]\,y + 2\,[b\,c]\,z + 2\,[b\,l] &= 0 \\ 2\,[a\,c]\,x + 2\,[b\,c]\,y + 2\,[c\,c]\,z + 2\,[c\,l] &= 0 \end{aligned}$$

Da der Faktor 2 überall weggelassen werden kann, erhalten wir daraus 3 Gleichungen, welche Normalgleichungen heissen.

Normalgleichungen.

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die ursprünglich gegebenen Fehlergleichungen (3) und die Normalgleichungen (14) stellen das ganze Ausgleichungsverfahren vor. Man hat offenbar ebensoviele Normalgleichungen als Unbekannte. Im besonderen Falle (14) hat man 3 Unbekannte x, y, z und 3 Normalgleichungen; bei u Unbekannten wie in (3) angedeutet ist, wird man auch u Normalgleichungen bekommen, die linear sind, also durch Auflösung, nach irgend welchem Verfahren, zur Auffindung der n Unbekannten führen müssen.

Die im Vorstehenden (11)—(14) behandelte Aufgabe führt (nach Gerling) den Namen *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen*, indem die Beobachtungen l angestellt sind als Vermittlung, um zu den Unbekannten x, y, z zu gelangen.

Anmerkungen.

Die Quadratsumme $[v^2]$ wird häufig $[vv]$ geschrieben und dann auch $[p\,v^2] = [p\,v\,v]$, was offenbar gleich berechtigt ist, ebenso wie $a^2 = a\,a$ u. s. w. Wegen des Anschlusses an $[a\,b]$, $[a\,c]$ u. s. w. passt es sich natürlich auch $[a\,a]$ und nicht $[a^2]$ zu schreiben, sowie $[v\,v]$, während das einzeln stehende $[v^2]$ natürlicher ist.

Die Benennung „Fehlergleichung“ für eine Gleichung von der Art (3) S. 41 oder (11) S. 43 rührt von Helmert in dessen „Ausgleichungsrechnung“ her. Die rechte Seite unserer Fehlergleichung (11) S. 43, d. h. der Ausdruck $a\,x + b\,y + c\,z + l$ kann, nach Schreiber, „*Fehlerausdruck*“ genannt werden.

Auch zur Buchstabenbezeichnung wollen wir einige Bemerkungen machen: Die übrig bleibenden (scheinbaren) Fehler der Ausgleichungen mit v zu bezeichnen, ist seit Gauss, Gerling und Encke allgemein gebräuchlich und bei der Preussischen Landesaufnahme und im Geodätischen Institute beibehalten. Statt v findet man häufig auch das Zeichen δ, welches wir in den beiden ersten Auflagen dieses Werkes (bzw. „Taschenbuch der praktischen Geometrie“) anwandten, aber dann fallen liessen zu Gunsten des am meisten gebräuchlichen v.

Die Fehlergleichung $v = a\,x + b\,y + c\,z + l$ kommt in dieser Form schon in Art. 20 der „theoria combinationis“ vor. Dagegen Encke schreibt stets $v = a\,x + b\,y + c\,z + n$, bezeichnet also das Absolutglied mit n, was uns aber nicht passt, weil n neuerdings mehr als Zeichen für eine Anzahl gebraucht wird (bei (3) bedeutet n die Anzahl der Fehlergleichungen).

Das Absolutglied l einer Fehlergleichung hat den Charakter einer Beobachtung, welche aber hier *negativ* auftritt, wie schon aus (7) zu ersehen ist, und später bei Betrachtung von Näherungswerten (in § 14.) noch deutlicher sich zeigen wird. Schreiben wir eine Fehlergleichung in die Form:

$$(-l + v) = a\,x + b\,y + c\,z$$

so erscheint $a\,x + b\,y + c\,z$ als Funktion der Unbekannten x, y, z, dann $-l$ als Beobachtungsergebnis für diese Funktion und v als Verbesserung der Beobachtung $(-l)$. Der Umstand, dass in der althergebrachten Form $v = a\,x + b\,y + c\,z + l$ das Absolutglied l eine *negative* Beobachtung vorstellt, scheint Veranlassung gewesen zu sein, das Absolutglied selbst negativ zu schreiben. So hat Helmert in seiner „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1872“ für die Fehlergleichungen die Form:

$$\lambda = -l + a x + b y + c z$$

also wie erwähnt $-l$ statt $+l$ und dazu λ statt v. Auch die Bezeichnung f für das Absolutglied der Fehlergleichung kommt vor, und führt dann zu der Benennung Fehlerglied. Man könnte dasselbe einen Näherungswert für den scheinbaren Fehler v nennen, nach seiner innersten Bedeutung hat aber das Absolutglied, mag man es mit l oder mit f bezeichnen, den Charakter einer Beobachtung und nicht eines Fehlers. In unserem System bezieht sich f stets auf eine Funktion von Messungen oder ausgeglichenen Elementen, und die linearen Fehlergleichungen schreiben wir stets in der zuerst 1821 von Gauss angewendeten, jetzt am weitesten verbreiteten Form:

$$v = a x + b y + c z + l.$$

§ 13. Vermittelnde Beobachtungen mit zwei Unbekannten.

Wir beginnen mit dem besonderen Falle von nur *zwei* Unbekannten und haben für dieses langsame Vorgehen zwei Gründe: Erstens gestalten sich bei nur zwei Unbekannten alle Entwicklungen viel einfacher und übersichtlicher als wenn man gleich mit beliebig vielen Unbekannten beginnt und zweitens kommt der besondere Fall zweier Unbekannter x und y so oft vor, namentlich bei Ausgleichungen mit Coordinaten x, y, dass es sich wohl lohnt, diesen Fall besonders zu behandeln.

Die Anzahl der Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ sei $= n$ und man habe folgende n Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y + l_3 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n &= a_n x + b_n y + l_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ein einzelnes v giebt quadriert:

$$\begin{aligned} v^2 = a^2 x^2 &+ 2 a b x y + 2 a l x \\ &+ \quad b^2 y^2 \quad + 2 b l y \\ &\qquad\qquad + l^2 \end{aligned}$$

Denkt man sich alle einzelnen v so quadriert und addiert, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} [v^2] = [a a]\, x^2 &+ 2 [a b]\, x y + 2 [a l]\, x \\ &+ \quad [b b]\, y^2 \quad + 2 [b l]\, y \\ &\qquad\qquad + [l l] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Unser Quadrat-Minimums-Prinzip verlangt:

$$\frac{\partial\,[v v]}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v v]}{\partial y} = 0$$

Dieses giebt:

$$\begin{aligned} 2 [a a]\, x + 2 [a b]\, y + 2 [a l] &= 0 \\ 2 [a b]\, x + 2 [b b]\, y + 2 [b l] &= 0 \end{aligned}$$

oder mit Weglassung des gemeinsamen Faktors 2 hat man die zwei

Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} [a a]\, x + [a b]\, y + [a l] &= 0 \\ [a b]\, x + [b b]\, y + [b l] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$