Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 13. Vermittelnde Beobachtungen mit zwei Unbekannten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

scheint Veranlassung gewesen zu sein, das Absolutglied selbst negativ zu schreiben. So hat Helmert in seiner „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1872" für die Fehlergleichungen die Form:

$$\lambda = -l + a x + b y + c z$$

also wie erwähnt $-l$ statt $+l$ und dazu λ statt v. Auch die Bezeichnung f für das Absolutglied der Fehlergleichung kommt vor, und führt dann zu der Benennung Fehlerglied. Man könnte dasselbe einen Näherungswert für den scheinbaren Fehler v nennen, nach seiner innersten Bedeutung hat aber das Absolutglied, mag man es mit l oder mit f bezeichnen, den Charakter einer Beobachtung und nicht eines Fehlers. In unserem System bezieht sich f stets auf eine Funktion von Messungen oder ausgeglichenen Elementen, und die linearen Fehlergleichungen schreiben wir stets in der zuerst 1821 von Gauss angewendeten, jetzt am weitesten verbreiteten Form:

$$v = a x + b y + c z + l.$$

§ 13. Vermittelnde Beobachtungen mit zwei Unbekannten.

Wir beginnen mit dem besonderen Falle von nur *zwei* Unbekannten und haben für dieses langsame Vorgehen zwei Gründe: Erstens gestalten sich bei nur zwei Unbekannten alle Entwicklungen viel einfacher und übersichtlicher als wenn man gleich mit beliebig vielen Unbekannten beginnt und zweitens kommt der besondere Fall zweier Unbekannter x und y so oft vor, namentlich bei Ausgleichungen mit Coordinaten x, y, dass es sich wohl lohnt, diesen Fall besonders zu behandeln.

Die Anzahl der Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ sei $= n$ und man habe folgende n Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y + l_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= a_n x + b_n y + l_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ein einzelnes v giebt quadriert:

$$\begin{aligned} v^2 = a^2 x^2 &+ 2 a b x y + 2 a l x \\ &+ \quad b^2 y^2 \quad + 2 b l y \\ &\qquad\qquad + l^2 \end{aligned}$$

Denkt man sich alle einzelnen v so quadriert und addiert, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} [v^2] = [a a]\, x^2 &+ 2 [a b]\, x y + 2 [a l]\, x \\ &+ \quad [b b]\, y^2 \quad + 2 [b l]\, y \\ &\qquad\qquad + [l l] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Unser Quadrat-Minimums-Prinzip verlangt:

$$\frac{\partial\, [v v]}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\, [v v]}{\partial y} = 0$$

Dieses giebt:

$$\begin{aligned} 2 [a a]\, x + 2 [a b]\, y + 2 [a l] &= 0 \\ 2 [a b]\, x + 2 [b b]\, y + 2 [b l] &= 0 \end{aligned}$$

oder mit Weglassung des gemeinsamen Faktors 2 hat man die zwei

Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} [a a]\, x + [a b]\, y + [a l] &= 0 \\ [a b]\, x + [b b]\, y + [b l] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Diese Normalgleichungen löst man nach x und y auf, was bei nur *zwei* Unbekannten keinerlei Schwierigkeiten bereiten kann. Man findet:

$$x = -\frac{[b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \qquad y = -\frac{[a\,a]\,[b\,l] - [a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) oder (4) enthalten die vollständige Ausgleichungsvorschrift für die vorgelegten Fehlergleichungen (1). In Worten hat man hiernach folgende Anweisung:

Wenn die Coefficienten a, b und die Absolutglieder l der Fehlergleichungen (1) gegeben sind, so bildet man daraus alle Quadrate und Produkte und deren Summen:

$$\begin{array}{l} a_1^2 \quad + a_2^2 \quad + a_3^2 \quad + \ldots + a_n^2 = [a\,a] \\ a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 + \ldots\, a_n\,b_n = [a\,b] \\ b_1^2 \quad + b_2^2 \quad + b_3^2 \quad + \ldots + b_n^2 = [b\,b] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Aus diesen Summen-Coefficienten bildet man die Normalgleichungen (3) oder sofort deren Auflösungen (4).

Man kann die Normalgleichungen (3) auch in dieser abgekürzten Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,v] = 0 \\ [b\,v] = 0 \end{array}\right\} \tag{3 a}$$

denn es ist nach (1):

$$[a\,v] = a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + \ldots$$

was in weiterer Ausführung giebt:

$$[a\,v] = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l]$$

Diese Formen (3 a) entsprechen der Gleichung $[v] = 0$ beim arithmetischen Mittel. S. 20.

Wir nehmen hiezu sofort ein Zahlenbeispiel:

In den „Württembergischen Naturwissenschaftlichen Jahresheften" Jahrgang XXIV. (1868) S. 260 sind von Professor *Schoder* die Meereshöhen h und die 12jährigen Barometermittel B von 9 meteorologischen Stationen mitgeteilt, nämlich:

	h	B	
	m	mm	
1. Bruchsal	120,2	751,18	
2. Cannstatt	225,1	742,37	
3. Stuttgart	270,6	738,50	
4. Calw	347,6	731,27	
5. Friedrichshafen . .	406,7	726,99	(5)
6. Heidenheim . . .	492,4	718,16	
7. Isny	708,1	700,48	
8. Freudenstadt . . .	733,5	697,64	
9. Schopfloch . . .	768,9	695,23	

Wir wollen annehmen, die Theorie der barometrischen Höhenmessung sei uns ganz unbekannt, wir bemerken aber, dass bei wachsenden Höhen h die Barometerstände B ziemlich gesetzmässig abnehmen; und um das Gesetz dieser Abnahme zu untersuchen, beginnen wir damit, die Barometerstände B als Funktion der Höhen h graphisch darzustellen, wie Fig. 1. zeigt (S. 47).

Für viele Zwecke wird es nun genügen, durch die erhaltenen Punkte eine Gerade oder eine stetige Kurve möglichst anschliessend durchzulegen, und die Ordinaten der Ausgleichungs-Kurve als ausgeglichene Werte anzunehmen.

Auch wenn man eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vornehmen will, ist ein solches Auftragen vor Beginn der Rechnung immer rätlich, ganz besonders, wenn die Beziehung der Veränderlichen theoretisch unklar ist; die

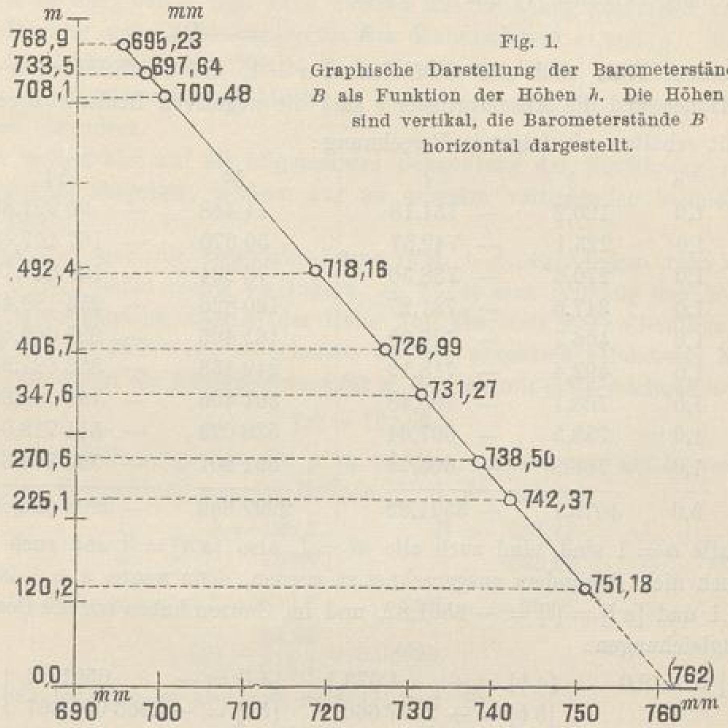

Fig. 1.
Graphische Darstellung der Barometerstände B als Funktion der Höhen h. Die Höhen h sind vertikal, die Barometerstände B horizontal dargestellt.

graphische Darstellung hat den Zweck, die Art der Abhängigkeit zu veranschaulichen, unter Umständen die Form der Ausgleichungs-Funktion festzustellen, grobe Beobachtungsfehler aufzufinden und Näherungswerte der Unbekannten zu ermitteln.

Der Anblick unserer Figur lässt eine lineare Funktion zwischen h und B annehmbar erscheinen, d. h. wir setzen:

$$B = x + h\,y \tag{6}$$

Irgend 2 von den 9 Beobachtungen (5) würden hinreichen, die 2 Unbekannten x und y der Funktion (6) zu bestimmen. Um aber allen 9 Beobachtungen möglichst gerecht zu werden, müssen wir nach den oben entwickelten Gleichungen (1)—(4) verfahren, und haben zuerst die Fehlergleichungen zu bilden. Hiebei sollen die unter (5) gegebenen Höhen h als fehlerfrei anzunehmen sein, dagegen die Barometerstände B als fehlerhaft beobachtet, so dass alle auftretenden Widersprüche den Fehlern der B zur Last zu legen sind.

Jede der 9 Beobachtungen giebt eine Gleichung von der Form (6); die entsprechenden 9 Gleichungen werden aber im allgemeinen nicht stimmen, weshalb jedem B eine Verbesserung v zugeteilt werden muss, also statt (6) wird werden

$$B + v = x + h\,y$$

$$\text{oder}\quad v = x + h\,y - B \tag{7}$$

Dieses (7) ist bereits die Form der Fehlergleichungen in unserem besonderen Fall, und zur Vergleichung haben wir die allgemeine Fehlergleichungsform (1):

$$v = a\,x + b\,y + l \tag{8}$$

Die Vergleichung zwischen (7) und (8) giebt

$$a = 1 \qquad b = h \qquad l = -B \tag{9}$$

d. h. in unserem Falle sind alle Coefficienten $a = 1$, die Coefficienten b sind die gegebenen Höhen und die Absolutglieder l sind die negativen Beobachtungen B.

Damit erhalten wir folgende Berechnung:

Num.	a	b	l	b^2	$b\,l$
1.	1,0	120,2	— 751,18	14 448	— 90 291,836
2.	1,0	225,1	— 742,37	50 670	— 167 107,487
3.	1,0	270,6	— 738,50	73 224	— 199 838,100
4.	1,0	347,6	— 731,27	120 826	— 254 189,452
5.	1,0	406,7	— 726,99	165 405	— 295 666,833
6.	1,0	492,4	— 718,16	242 458	— 353 621,984
7.	1,0	708,1	— 700,48	501 406	— 496 009,888
8.	1,0	733,5	— 697,64	538 022	— 511 718,940
9.	1,0	768,9	— 695,23	591 207	— 534 562,347
	9,0	4073,1	— 6501,82	2297 666	— 2903 006,867

Da alle $a = 1$ sind, sind auch alle $a^2 = 1$, also $[a\,a] = 9$ und auch $[a\,b]$ und $[a\,l]$ brauchen nicht besonders ausgerechnet zu werden, denn wegen $a = 1$ ist $[a\,b] = [b] = 4073{,}1$ und $[a\,l] = [l] = -6501{,}82$, und im Ganzen haben wir die Coefficienten der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} [a\,a] = +\,9{,}0 & [a\,b] = +\quad 4\,073{,}1 & [a\,l] = -\qquad 6501{,}82 \\ & [b\,b] = +\,2297\,666 & [b\,l] = -\,2903\,006{,}867 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Setzt man diese Coefficienten in (4), so giebt die Ausrechnung:

$$\begin{aligned} [a\,a]\,[b\,b] &= +\,20678\;994{,}00 \\ [a\,b]\,[a\,b] &= +\,16590\;143{,}61 \\ \hline [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] &= +\quad 4088\;850{,}39 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} [b\,b]\,[a\,l] = -\,14\,939\,010\,752{,}12 & [a\,a]\,[b\,l] = -\,26\,127\,061{,}803 \\ [a\,b]\,[b\,l] = -\,11\,824\,237\,811{,}70 & [a\,b]\,[a\,l] = -\,26\,482\,563{,}042 \\ \hline [b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l] = -\quad 3\,114\,772\,940{,}42 & [a\,a]\,[b\,l] - [a\,b]\,[a\,l] = +\quad 355\,501{,}239 \end{array}$$

Die Unbekannten selbst werden:

$$x = -\frac{-\,3\,114\,772\,940}{+\quad 4\,088\,850} = +\,761{,}77$$

$$y = -\frac{+\qquad 355\,501}{+\quad 4\,088\,850} = -\,0{,}08695$$

Die Ausgleichungsfunktion (6) heisst also:

$$B = 761{,}77 - 0{,}08695\,h \tag{11}$$

oder nach h aufgelöst:

$$h = 11{,}50\,(761{,}77 - B)$$