Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 16. Mittlerer Gewichtseinheits-Fehler bei zwei Unbekannten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

quisitio de elementis ellipticis Palladis etc." Die Zeichen sind daselbst geschrieben $[b\,b\,,1]$ $[b\,c\,,1]$ u. s. w., während jetzt gewöhnlich $[b\,b\,.1]$ geschrieben wird, von manchen auch $[b\,b_1]$. Abgesehen von diesen kleinen Abänderungen haben sich diese classischen Bezeichnungen seit 80 Jahren in allen namhaften Schriften über Methode der kleinsten Quadrate eingebürgert und werden als sozusagen geheiligte Bezeichnungen festgehalten. Der Versuch, diese glücklicherweise nun feststehenden Zeichen durch andere zu ersetzen, wäre als unglücklich und auf die Dauer nicht haltbar zu bezeichnen.

§ 16. Mittlerer Gewichts-Einheits-Fehler bei zwei Unbekannten.

Aus der Fehlerquadratsumme $[v\,v]$, mit welcher wir uns soeben beschäftigt haben, kann man auch den mittleren Fehler einer Beobachtung berechnen (bzw. den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichten = 1). In erster Näherung kann man schreiben:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}\;(?) \qquad (1)$$

Indessen ist diese Formel deswegen nicht genügend, weil die v nicht wahre Fehler, sondern nur scheinbare Fehler sind, wie schon am Schluss von § 14. S. 51 betrachtet worden ist.

Wir müssen die Formel (1) in ähnlicher Weise abändern, wie schon beim arithmetischen Mittel bei (10) § 7. S. 21 geschehen ist, wo der Nenner n in $n-1$ (für *eine* Unbekannte x) umgewandelt wurde.

Wir werden wieder zu unterscheiden haben:

Ausgleichungs-Ergebnisse	$x\;y$,	Wahre Unbekannte	$X\;Y$
scheinbare Fehler	$v_1\,v_2\,v_3\ldots$.	Wahre Fehler	$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\ldots$

Dann bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v &= a\,x + b\,y + l \\ \varepsilon &= a\,X + b\,Y + l \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\text{Also Differenz:}\quad v - \varepsilon = a\,(x - X) + b\,(y - Y)$$

$$\text{oder}\quad v = a\,(x - X) + b\,(y - Y) + \varepsilon \qquad (3)$$

Dieses hat wieder dieselbe Form wie die früheren Fehlergleichungen $v = a\,x + b\,y + l$, und wegen $[a\,v] = 0$ und $[b\,v] = 0$ kann man daraus auch eine Art von Normalgleichungen bilden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} [a\,v] &= [a\,a]\,(x - X) + [a\,b]\,(y - Y) + [a\,\varepsilon] = 0 \\ [b\,v] &= [a\,b]\,(x - X) + [b\,b]\,(y - Y) + [b\,\varepsilon] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Auch die Summe $[v\,v]$ kann man in ähnlicher Form wie früher bilden, nämlich:

$$\begin{aligned} [v\,v] = [a\,a]\,(x - X)^2 &+ 2\,[a\,b]\,(x - X)\,(y - Y) + 2\,[a\,\varepsilon]\,(x - X) \\ &+ [b\,b]\,(y - Y)^2 \qquad\qquad\quad + 2\,[b\,\varepsilon]\,(y - Y) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + [\varepsilon\,\varepsilon] \end{aligned}$$

und damit lässt sich auch dieselbe Umformung machen wie bei dem früheren $[v\,v]$ in (17) § 15. S. 53, nämlich:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.1]^2}{[b\,b\,.1]} \qquad (5)$$

Man sieht hieraus, dass $[v\,v]$ kleiner als $[\varepsilon\,\varepsilon]$ ist, und es handelt sich darum, die Differenz zwischen $[v\,v]$ und $[\varepsilon\,\varepsilon]$, d. h. die zwei Schlussglieder von (5), so genau zu bestimmen, als es bei der Unbekanntheit der wahren Fehler ε möglich ist, d. h.

wir gehen darauf aus, die *Mittel*werte der zwei letzten Glieder in (5) zu bestimmen. Zunächst haben wir:

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + a_3\,\varepsilon_3 + \ldots)^2$$
$$= a_1^2\,\varepsilon_1^2 + a_2^2\,\varepsilon_2^2 + a_3^2\,\varepsilon_3^2 + \ldots \quad + 2\,a_1\,a_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \ldots \tag{6}$$

An Stelle der Quadrate ε_1^2, $\varepsilon_2^2 \ldots$ setzen wir deren gemeinsamen Mittelwert m^2, und die Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ u. s. w. müssen wegen des unregelmässigen Zeichenwechsels $\pm\,\varepsilon$ im Mittel verschwinden, folglich giebt (6):

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots)\,m^2 + 0$$
$$[a\,\varepsilon]^2 = [a\,a]\,m^2 \text{ und } \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} = m^2 \tag{7}$$

In gleicher Weise können wir auch das letzte Glied von (5) behandeln, nämlich:

$$[b\,\varepsilon\,.\,1] = [b\,\varepsilon] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,\varepsilon]$$
$$= (b_1\,\varepsilon_1 + b_2\,\varepsilon_2 + \ldots) - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + \ldots)$$
$$= \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right)\varepsilon_1 + \left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right)\varepsilon_2 + \ldots$$
$$[b\,\varepsilon\,.\,1]^2 = \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right)^2\varepsilon_1^2 + \left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right)^2\varepsilon_2^2 + \ldots$$
$$+ 2\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right)\left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right)\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \ldots$$

Hievon soll der Mittelwert mit Rücksicht auf die verschiedenen $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots$ gebildet werden, und dabei macht man wieder dieselben Überlegungen, wie bei (6), dass nämlich der Mittelwert der verschiedenen *Quadrate* ε_1^2, $\varepsilon_2^2 \ldots$ allgemein $= m^2$ zu setzen ist und dass der Mittelwert der *Produkte* $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ verschwindet wegen der unregelmässig schwankenden Vorzeichen $\pm$ der einzelnen ε. Man findet also aus dem vorhergehenden:

$$[b\,\varepsilon\,.\,1]^2 = \left((b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1)^2 + (b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2)^2 + \ldots\right)m^2$$
$$\frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{m^2} = \left(b_1^2 - \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_1^2 - 2\,a_1\,b_1\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right) + \left(b_2^2 + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_2^2 - 2\,a_2\,b_2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right) + \ldots$$
$$= (b_1^2 + b_2^2 + \ldots) + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots) - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots)$$
$$= [b\,b] + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}[a\,a] - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$$
$$\frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{m^2} = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = [b\,b\,.\,1] \tag{8}$$

Setzt man dieses (8) nebst (7) in (5), so erhält man:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - m^2 - m^2$$
$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - 2\,m^2$$

Nun ist $\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} = m^2$ die wahre Bestimmung von m^2, was mit dem vorhergehenden zusammengenommen giebt:

$$[v\,v] = n\,m^2 - 2\,m^2$$

also:
$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-2} \qquad m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} \tag{9}$$

Dieses ist die richtige Formel statt der zweifelhaften Formel (1). Die Formel (9) erinnert in ihrem Bau an die frühere Formel (10) § 7. S. 21 für das arithmetische Mittel. Ebenso wie für *eine* Unbekannte beim arithmetischen Mittel der Nenner n in $n-1$ überging, muss nun bei *zwei* Unbekannten x und y der Nenner $n-2$ werden.

Man kann wohl vermuten, dass das nun so weiter gehen wird, dass bei 3 Unbekannten x, y, z der Nenner $n-3$ und allgemein bei u Unbekannten der Nenner $n-n$ entstehen wird; aber ehe wir dieses bewiesen haben werden, ist es noch nicht gültig.

Die Unterscheidung wahrer Fehler ε und scheinbarer Fehler v bei der Berechnung des mittleren Fehlers ist eine der feinsten Betrachtungen der M. d. kl. Q., eine echte Blüte des Gaussschen Ingeniums, während manch Anderer als Gauss sich wohl dabei beruhigt hätte, dass die v immerhin Näherungswerte der ε sind. Der allgemeine Satz, dessen besonderen Fall für zwei Unbekannte wir soeben behandelt haben, wurde zuerst von Gauss in art. 38 der „theoria combinationis" (vom Jahre 1823) entwickelt. In einem Lehrbuche diese Sache anschaulich vorzutragen und zu beweisen ist nicht leicht. Schon Gerling begnügte sich in seiner „Ausgleichungs-Rechnung der praktischen Geometrie", Hamburg 1843, S. 39 und S. 132 mit einer allgemeinen Plausibelmachung. Neuere Verfasser von Lehrbüchern haben häufig den Satz wenigstens für $n-1$ bewiesen, und haben dann nach Analogie summarisch weiter geschlossen, dass für zwei Unbekannte $n-2$, für drei Unbekannte $n-3$ u. s. w. zu setzen sei. — Ganz unzulässig aber ist es, wie in neuester Zeit geschehen, den Satz $m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u}$ als „nicht streng zu beweisender *Grundsatz*" an die Spitzen der Betrachtungen zu stellen. Mit demselben Rechte könnte man den Pythagoräischen Fehlerfortpflanzungssatz (6) S. 16 als unbewiesenen Grundsatz an die Spitze stellen, und durch solches Verfahren der M. d. kl. Q. den mathematischen Boden entziehen. —

§ 17. Mittlerer Fehler der ausgeglichenen x und y.

Mit dem, was wir in § 13.—16. gelehrt haben, kann man bereits kleine Ausgleichungen machen, und in vielen Fällen geschieht nichts weiteres, (und im Sinne allmählicher Erlernung der ganzen Theorie möchte es sich auch empfehlen, unn sofort das Zahlenbeispiel von § 14. nochmals vorzunehmen, und entsprechend § 15. und § 16. weiter zu führen).

Indessen ebenso wie beim arithmetischen Mittel der mittlere Fehler des Mittels selbst, d. h. des ausgeglichenen x bestimmt werden musste, verlangt nun auch die Weiterführung unserer Ausgleichung mit zwei Unbekannten noch die Berechnung der mittleren Fehler der ausgeglichenen x und y.

Um dazu zu gelangen, nehmen wir wieder unser allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz (10) § 5. S. 17 vor, und nehmen an, es hängen x und y mit gemessenen Grössen l durch folgende lineare Gleichungen zusammen:

$$x = \alpha_1\,l_1 + \alpha_2\,l_2 + \alpha_3\,l_3 + \ldots \quad + \alpha_n\,l_n \tag{1}$$

$$y = \beta_1\,l_1 + \beta_2\,l_2 + \beta_3\,l_3 + \ldots \quad + \beta_n\,l_n \tag{2}$$

Wenn dabei m der mittlere Fehler eines einzelnen l ist, so sind nach dem citierten Fehlerfortpflanzungsgesetze die mittleren Fehlerquadrate von x und y:

$$m_x^2 = \alpha_1^2\,m^2 + \alpha_2^2\,m^2 + \ldots \quad = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots)\,m^2 = [\alpha\,\alpha]\,m^2 \tag{3}$$

$$m_y^2 = \beta_1^2\,m^2 + \beta_2^2\,m^2 + \ldots \quad = (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots)\,m^2 = [\beta\,\beta]\,m^2 \tag{4}$$

oder in Gewichtsform, wenn zu dem mittleren Fehler m das Gewicht 1 gehört:

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\,\alpha]} \qquad\qquad p_y = \frac{1}{[\beta\,\beta]} \tag{5}$$