Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 19. Eliminations-Beispiel mit zwei Unbekannten

d. h. diese 3 letzten Glieder müssen einander gleich werden, wie sich in ähnlicher Weise, wie oben bei den Coefficienten $[\ldots 1]$, leicht nachweisen lässt.

Nun kommt noch die wichtige Probe, dass $[l\,l\,.\,2] = [v\,v]$ werden muss, indem $[v\,v]$ durch Quadrieren der einzelnen auszurechnenden v bestimmt wird.

Die mitgeteilten sehr zahlreichen Proben sind bei einiger Übung, wenn nur 2 Unbekannte vorhanden sind, teilweise überflüssig, und man kann sich hier, so weit die Elimination in Frage kommt, wohl mit der Probe begnügen, dass $[l\,l\,.\,2]$, dessen Bestimmung bei y *und* bei x vorkommt, hiebei übereinstimmend erhalten werden muss. Oft wird man die *quadratischen* Schlussglieder $[s\,s]$, $[s\,s\,.\,1]$, $[s\,s\,.\,2]$ weglassen können; wir haben diese letzten Probeglieder mehr der Symmetrie der Formeln wegen als wegen des praktischen Bedürfnisses aufgenommen.

Andererseits kann wohl auch ein Rechner, der seiner Sache sonst sicher ist, sich mit der *einen* Probe begnügen:

$$\begin{array}{rl} [s\,s] = [a\,a] + 2\,[a\,b] + 2\,[a\,l] & \quad\text{oder}\quad = [a\,a] + [a\,b] + [a\,l] \\ +\ \ [b\,b] + 2\,[b\,l] & \qquad\qquad\quad + [a\,b] + [b\,b] + [b\,l] \\ +\ \ [l\,l] & \qquad\qquad\quad + [a\,l] + [b\,l] + [l\,l] \end{array}$$

Wenn alle diese Proben stimmen, so kann man mit einer an absolute Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit die Fehlerlosigkeit der Rechnung behaupten.

Unsere Zahlenbeispiele von § 13. und § 14. hatten die Eigentümlichkeit, dass alle Coefficienten $a = 1$ sind. Dieser Fall kommt häufig vor und erleichtert die Ausrechnung der Summen-Coefficienten sehr, denn es ist dann, bei n Beobachtungen,

$$[a\,a] = n \qquad [a\,b] = [b] \qquad [a\,l] = [l]$$

und nur $[b\,b]$, $[b\,l]$ und $[l\,l]$ müssen besonders berechnet werden, wozu dann kaum Summenglieder s zu nehmen sind, während die Elimination wohl mit Summengliedern gemacht werden kann.

§ 19. Eliminations-Beispiel mit 2 Unbekannten.

Wir nehmen das Beispiel von § 14., welches wir dort nach gewöhnlichen algebraischen Methoden behandelt haben, nochmals vor.

Das Coefficienten-System von S. 50 nebst Summengliedern ist:

$$\left.\begin{array}{crrrr} & a & b & l & s \\ a & +9{,}00 & -\ 40{,}74 & +\ 4{,}88 & +\ 26{,}86 \\ b & & +229{,}87 & -25{,}26 & -163{,}87 \\ l & & & +\ 4{,}33 & +\ 16{,}05 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Indem wir vorerst unentschieden lassen, ob man die Werte $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$, $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$ u. s. w. unmittelbar oder mit dem Rechenschieber oder mit Logarithmen oder sonst wie ausrechnen will, erhalten wir die folgende Anordnung, wobei man vorerst annehmen mag, dass die *klein gedruckten Zahlen* nötigenfalls auf einem Nebenblatt berechnet worden sind.

$$
\begin{array}{llll|r}
 & & & & \text{Probe} \\
[a\,a] = +9{,}00 & [a\,b] = -\ 40{,}74 & [a\,l] = +\ 4{,}88 & [a\,s] = +\ 26{,}86 & 0{,}00 \\
 & [b\,b] = +\ 229{,}87 & [b\,l] = -\ 25{,}26 & [b\,s] = -\ 163{,}87 & 0{,}00 \\
 & -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = -\ 184{,}42 & -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] = +\ 22{,}09 & -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,s] = +\ 121{,}58 & \\
 & & [l\,l] = +\ 4{,}33 & [l\,s] = +\ 16{,}05 & 0{,}00 \\
 & & -\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,l] = -\ 2{,}65 & -\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,s] = -\ 14{,}56 & \\
\hline
 & [b\,b\,.\,1] = +\ 45{,}45 & [b\,l\,.\,1] = -\ 3{,}17 & [b\,s\,.\,1] = -\ 42{,}29 & -0{,}01 \\
 & & [l\,l\,.\,1] = +\ 1{,}68 & [l\,s\,.\,1] = +\ 1{,}49 & 0{,}00 \\
 & & -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1] = -\ 0{,}22 & -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,s\,.\,1] = -\ 2{,}95 & \\
\hline
 & & [l\,l\,.\,2] = +\ 1{,}46 & [l\,s\,.\,2] = -\ 1{,}46 & 0{,}00
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
y = -\dfrac{-\ 3{,}17}{+\ 45{,}45} = +\ 0{,}06975 \\
p_y = 45{,}45 \qquad [v\,v] = 1{,}46
\end{array}\right\} \qquad (2)
$$

Für die umgekehrte Rechnung, nämlich Elimination von y und Bestimmung von x nebst p_x, schreiben wir nur noch die Zahlen, und zwar mit einer Stelle weniger als vorher:

b	a	l	s	Probe
+ 229,9	— 40,7	— 25,3	— 163,9	0,0
	+ 9,0	+ 4,9	+ 26,8	0,0
	— 7,2	— 4,5	— 29,0	
		+ 4,3	+ 16,1	0,0
		— 2,8	— 18,0	
	+ 1,8	+ 0,4	— 2,2	0,0
		+ 1,5	— 1,9	0,0
		— 0,1	+ 0,5	
		+ 1,4	— 1,4	0,0

$$
\left.\begin{array}{l}
x = -\dfrac{+\ 0{,}4}{+\ 1{,}8} = -\ 0{,}22 \quad (\text{genauer} = -\ 0{,}226) \\
p_x = 1{,}8 \qquad [v\,v] = 1{,}4
\end{array}\right\} \qquad (3)
$$

Wenn es sich um eine Rechnung mit so wenigen Stellen wie hier handelt, so macht man die Rechnung am besten mit dem *Rechenschieber*. Man stellt für die erste Linie den Quotienten $\frac{40{,}7}{229{,}9}$ ein, und multipliziert damit der Reihe nach: 40,7 25,3 163,9, d. h. man liest mit *einer* Einstellung die drei Produkte ab:

$$
\frac{40{,}7}{229{,}9}\,40{,}7 = 7{,}2 \qquad \frac{40{,}7}{229{,}9}\,25{,}3 = 4{,}5 \qquad \frac{40{,}7}{229{,}9}\,163{,}9 = 29{,}0
$$

Um die Vorzeichen — oder + der Grössen $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$ u. s. w. richtig anzusetzen, kann man in jedem einzelnen Falle die verschiedenen einwirkenden + und — abzählen; man gelangt aber bald zu einer übersichtlichen mechanischen Regel, die wir an der Hand des vorstehenden Beispiels bilden wollen:

$$
\begin{array}{lccccl}
a) & + & - & + & + & \\
b) & & + & - & - & \rbrace \\
 & & b\,.\,1)\ - & + & + & \\
l) & & & + & + & \rbrace \\
 & & & l\,.\,1)\ - & - &
\end{array}
$$

1) Die Vorzeichen einer Linie $b.1)$ oder $l.1)$ haben jedenfalls dieselbe Folge wie die darüberstehenden Vorzeichen der ersten Linie a).

2) Die Vorzeichen einer Linie $b.1)$ oder $l.1)$ beginnen immer mit —, daraus folgt:

3) Wenn über $b.1)$ in der Linie a) das Zeichen — steht, so gehen die Vorzeichen von a) unmittelbar nach $b.1)$ über; wenn dagegen über $b.1)$ in der Linie a) das Zeichen + steht, so gehen die Vorzeichen von a) sämtlich umgekehrt nach $b.1)$ über.

Wir wollen diese Regel an einem Beispiel mit 5 Elementen weiter veranschaulichen:

+	+	—	+	—
	+	—	—	+
	—	+	—	+
		+	—	—
		—	+	—
			+	—
			—	+

Um nun alles zusammenzustellen, was die Elimination S. 63 für den Endzweck geliefert hat, nehmen wir aus (2) und (3):

$$\left.\begin{array}{ll} y = +0{,}06975 & x = -0{,}22 \quad \text{genauer} = -0{,}226 \\ p_y = 45{,}45 & p_x = 1{,}8 \quad \text{genauer} = 1{,}78 \\ [l\,l.2] = [v\,v] = 1{,}46 & [l\,l.2] = [v\,v] = 1{,}4 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Das hier angegebene $x = -0{,}22$ und $p_x = 1{,}8$ sind mit dem Rechenschieber und bei Beschränkung auf die allermindeste Stellenzahl erhalten; rechnet man ein klein wenig schärfer, so erhält man $x = -0{,}226$ und $p = 1{,}78$, womit wir weiter rechnen wollen.

Die Schlusssumme $[l\,l.2] = 1{,}46$ muss mit der unmittelbaren Ausrechnung der v und der v^2 nach (15) § 14. S. 51 stimmen, was mit $[v^2] = 1{,}4695$ genügend der Fall ist; und nachdem diese wichtige Probe stimmt, hat man den mittleren Gewichtseinheitsfehler:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} = \sqrt{\frac{1{,}47}{9-2}} = \sqrt{\frac{1{,}47}{7}} = \pm 0{,}46^{\mathrm{mm}} \tag{5}$$

Dann:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \frac{0{,}46}{\sqrt{45{,}45}} = \pm 0{,}06797 \quad , \quad m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \frac{0{,}46}{\sqrt{1{,}78}} = \pm 0{,}34 \tag{6}$$

also $\quad y = +0{,}06975 \pm 0{,}06797 \qquad\qquad x = -0{,}23 \pm 0{,}34$

$$\frac{y}{100} = +0{,}000697 \pm 0{,}000680$$

Diese $\frac{y}{100}$ und x haben diesesmal dieselbe Bedeutung, wie früher δ_y und δ_x in (13) § 14. S. 51 und wir haben daher nun wie dort:

$$\begin{array}{ll} \text{Näherung} & (y) = 0{,}086\,250 \\ \text{Verbesserung} & \underline{+\,0{,}000\,697 \pm 0{,}000\,680} \\ \text{Ausgeglichen} & 0{,}086\,947 \pm 0{,}000\,680 \end{array} \tag{7}$$

Ebenso auch

$$\begin{array}{ll} \text{Näherung} & (x) = 762{,}00^{\mathrm{mm}} \\ \text{Verbesserung} & \underline{-\quad 0{,}23 \quad \pm 0{,}34^{\mathrm{mm}}} \\ \text{Ausgeglichen} & 761{,}77^{\mathrm{mm}} \pm 0{,}34^{\mathrm{mm}} \end{array} \tag{8}$$

Die ausgeglichene Funktion ist also nun:

$$\left.\begin{aligned} B = {} & 761{,}77^{mm} - 0{,}086\,947\,h \\ & \pm 0{,}34^{mm} \pm 0{,}000\,680 \\ & \text{mit } m = \pm 0{,}46^{mm} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Man hat also wieder dieselbe Ausgleichungsfunktion wie früher (14) § 14. S. 51, jedoch hat die neue Rechnung den Vorzug, dass sie die Unsicherheit der erlangten Formel zu schätzen gestattet. Z. B. ist 761,77 für $h = 0$ der für jene Gegend (Württemberg) giltige mittlere Jahresbarometerstand auf den Meeresspiegel reduziert, und dieser Wert wurde mit einem mittleren Fehler von $\pm 0{,}34^{mm}$ erhalten. Ähnlich wissen wir nun von dem Coefficienten 0,086 947, dass er auf etwa 1 : 128 oder rund 1 % seines Wertes annähernd bestimmt wurde.

§ 20. Eliminations-Rechnung mit Logarithmen.

Bei nur zwei Unbekannten x und y reicht die Elimination mit dem Rechenschieber fast immer aus, indessen, wenn die Coefficienten mehrstellig sind, überhaupt wenn man genauer zu rechnen veranlasst ist, wird man zur logarithmischen Rechnung

Logarithmische Auflösung der Normalgleichungen mit Schiebe-Zettel.

	$a]$	$b]$	$l]$	$s]$	Proben.
$[a$	$+9{,}00$	$-40{,}74$	$+4{,}88$	$+26{,}86$	0,00
$log\,[a$	0.95424	1.61002	0.68842	1.42911	
$log\left(\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right)[a$		2.26580	1.34420	2.08489	
$log\left(\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\right)[a$			0.42260	1.16329	
$[b$		$+229{,}87$	$-25{,}26$	$-163{,}87$	0,00
$-\left(\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right)[a$		$-184{,}42$	$+22{,}09$	$+121{,}58$	
$[l$			$+4{,}33$	$+16{,}05$	0,00
$-\left(\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\right)[a$			$-2{,}65$	$-14{,}56$	
		$b\,.\,1]$	$l\,.\,1]$	$s\,.\,1]$	
$y = -\frac{-3{,}17}{+45{,}45}$	$[b$	$+45{,}45$	$-3{,}17$	$-42{,}29$	$-0{,}01$
$= +0{,}06975$	$log\,[b$	1.65753	0.50106	1.62624	
	$log\left(\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\right)[b$		9.34459	0.46977	
	$[l$		$+1{,}68$	$+1{,}49$	0,00
	$-\left(\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\right)[b$		$-0{,}22$	$-2{,}95$	
			$l\,.\,2]$	$s\,.\,2]$	
		$[l$	$+1{,}46$	$-1{,}46$	0,00
Zettel a.	$log\,\frac{1}{[a\,a]}$ 9.04576	$log\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ 0.65578	$log\,\frac{[a\,l]}{[a\,a]}$ 9.73418		
Zettel b.		$log\,\frac{1}{[b\,b\,.\,1]}$ 8.34246	$log\,\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}$ 8.84353		

$$8{,}84353 = log\,y$$
$$0{,}06975 = y$$