Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 22. Nicht lineare Funktionen

Wenn man aber die mittleren Fehler berechnet, so darf man bei (17) *nicht* 4 Gleichungen in Rechnung bringen, sondern nur 3, d. h. es ist:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{3-2} \text{ und } \textit{nicht } = \frac{[v\,v]}{4-2} \tag{17a}$$

Wenn umgekehrt die Gleichungen (17) den Beobachtungen entsprechen, so darf man zwar zur Ausgleichung selbst statt (17) ein System von der Form (16) anwenden, bei der Fehlerberechnung ist aber die ursprüngliche Zahl der Fehlergleichungen, d. h. der Beobachtungen, massgebend.

Wenn 2 Fehlergleichungen mit gleichen Coefficienten $a, b \ldots$, aber mit ungleichen Absolutgliedern l, und mit ungleichen Gewichten vorliegen:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_1 & \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2 = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_2 & \quad " \quad\; = p_2 \end{array}\right\} \tag{18}$$

so geben diese nach gewöhnlichem Verfahren folgende Beiträge zu den Coefficienten der Normalgleichungen:

$$p_1\,a^2 + p_2\,a^2 = (p_1 + p_2)\,a^2\ ,\ (p_1 + p_2)\,a\,b \ldots p_1\,a\,l_1 + p_2\,a\,l_2 = a\,(p_1\,l_1 + p_2\,l_2) \tag{19}$$

$$\text{Beitrag zu dem Fehlerquadrat-Gliede:} \qquad (p_1\,l_1^2 + p_2\,l_2^2) \tag{20}$$

Wir wollen nun statt der *zwei* Gleichungen (18) die *eine* folgende schreiben:

$$v' = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2}{p_1 + p_2}\,, \quad \text{Gewicht} = p_1 + p_2 \tag{18'}$$

Diese *eine* Gleichung giebt zu den Normalgleichungen folgende Beiträge:

$$(p_1 + p_2)\,a^2 \quad , \quad (p_1 + p_2)\,a\,b \ldots \quad a\,(p_1\,l_1 + p_2\,l_2) \tag{19'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(p_1\,l_1 + p_2\,l_2)^2}{p_1 + p_2} \tag{20'}$$

Die Coefficienten (19) und (19′) sind identisch, dagegen die Beiträge zur Quadratsumme $[p\,l\,l]$ sind in (20) und in (20′) nicht identisch, und nur wenn $l_1 = l_2$ ist, geht (20′) in (20) über.

Dieses Resultat heisst in Worten: Man kann zwei Fehlergleichungen von der Form (18), d. h. mit gleichen Coefficienten aber ungleichen Absolutgliedern, durch *eine* Gleichung (18′) ersetzen, soweit es sich nur um die Unbekannten $x\,y\,z \ldots$ selbst und um deren Gewichte handelt, dagegen für die Berechnung mittlerer Fehler giebt die Gleichung (18′) keinen richtigen Ersatz der zwei ursprünglichen Gleichungen, sondern nur eine etwa näherungsweise zulässige Genauigkeitsbestimmung. In dem Nenner des mittleren Fehlerquadrats muss aber jedenfalls die Gleichung (18′) als *zwei* Gleichungen zählen.

§ 22. Nicht lineare Funktionen.

Wenn die Beziehungen zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten nicht durch lineare Gleichungen dargestellt sind, so kann man dennoch die Ausgleichung auf lineare Fehlergleichungen zurückführen in folgender Weise:

Man habe die Beobachtungen

$$L_1 \quad L_2 \quad L_3 \ldots L_n$$

welche mit den Unbekannten X und Y in folgenden Beziehungen stehen:

Es *soll* sein:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X, Y) - L_1 = 0 \\ F_2(X, Y) - L_2 = 0 \\ F_3(X, Y) - L_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_n(X, Y) - L_n = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind diese Gleichungen nicht erfüllt, und es gelten statt derselben die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = F_1(X, Y) - L_1 \\ v_2 = F_2(X, Y) - L_2 \\ v_3 = F_3(X, Y) - L_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v_n = F_n(X, Y) - L_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

Schreibt man diese Gleichungen in die Form:

$$F(X, Y) - (L + v) = 0 \quad (3)$$

so ergiebt die Vergleichung mit (1), dass v eine Verbesserung der Beobachtung L ist, welche den Widerspruch in der betreffenden Gleichung zum Verschwinden bringt. (Vgl. die kleingedruckte Anmerkung am Schlusse von § 12. S. 44—45.) Wenn X und Y die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten sind, so sind die Werte v die wahrscheinlichsten Verbesserungen der Beobachtungen L, oder, um alle Fragen der Wahrscheinlichkeit zu vermeiden, nennt man v die „übrigbleibenden Fehler" der Ausgleichung, oder die *„scheinbaren"* Fehler.

Versteht man unter (X) und (Y) Näherungswerte von X und Y, und unter x und y deren Verbesserungen, also

$$X = (X) + x \qquad Y = (Y) + y \quad (4)$$

so kann man mit Hilfe des Taylorschen Satzes unter Beschränkung auf die ersten Potenzen von x und y die Funktion F so entwickeln:

$$F(X, Y) = F\big((X) + x, (Y) + y\big)$$

$$F(X, Y) = F\big((X), (Y)\big) + \frac{\partial F}{\partial X} x + \frac{\partial F}{\partial Y} y$$

und damit gehen die Gleichungen (2) über in:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n \end{array}\right\} \quad (5)$$

wobei die Coefficienten a, b und die Absolutglieder l folgende Bedeutung haben:

$$a = \frac{\partial F}{\partial X} \qquad b = \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (6)$$

$$l = F\big((X), (Y)\big) - L \quad \text{oder} \quad l = (L) - L \quad (7)$$

(L) ist ganz allgemein derjenige Wert, welchen eine Beobachtung L annehmen würde, wenn die Näherungen (X), (Y) giltig wären.

Schreibt man (7) in die Form:

$$F\big((X), (Y)\big) - (L + l) = 0 \quad \text{oder} \quad (L) - (L + l) = 0 \quad (8)$$

und vergleicht man dieses mit (1), so ergiebt sich, dass die l in Bezug auf das *Vorzeichen*, mit den v gleichartig sind. Sachlich betrachtet hat aber das Absolutglied l den Charakter einer Beobachtung, ebenso wie L, denn (L) in (8) ist eine fehlerfreie Rechnungsgrösse. Formell betrachtet ist auch l diejenige Verbesserung, welche an einer Beobachtung L angebracht werden müsste, wenn die Näherungswerte (X), (Y) statt X, Y angenommen würden.

Die Gleichungen (5) treten an die Stelle der ursprünglichen Fehlergleichungen (2); diese Gleichungen (5) sind selbst Fehlergleichungen in Bezug auf die neuen Unbekannten x, y und in Bezug auf die Werte l, welche an Stelle der Beobachtungen L treten.