# Handbuch der Vermessungskunde

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1895**

§ 23. Ausgleichung von Barometerständen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

## § 23. Ausgleichung von Barometerständen.

Zu einem Zahlenbeispiel der Ausgleichung mit nicht linearen Funktionen nehmen wir die Barometermessungen von § 13. S. 46 nochmals vor, nämlich:

| | $h$ | $B$ | |
|---|---|---|---|
| | m | mm | |
| 1. Bruchsal . . . . | 120,2 | 751,18 | |
| 2. Cannstatt . . . | 225,1 | 742,37 | |
| 3. Stuttgart . . . | 270,6 | 738,50 | |
| 4. Calw . . . . . | 347,6 | 731,27 | |
| 5. Friedrichshafen . | 406,7 | 726,99 | (1) |
| 6. Heidenheim . . . | 492,4 | 718,16 | |
| 7. Isny . . . . . | 708,1 | 700,48 | |
| 8. Freudenstadt . . | 733,5 | 697,64 | |
| 9. Schopfloch . . . | 768,9 | 695,23 | |

Wir stellen uns die Aufgabe: Es soll zwischen den Höhen $h$ und den Barometerständen $B$ eine Beziehung hergestellt werden von der Form:

$$h = Y \log \frac{X}{B} \tag{2}$$

wobei die trigonometrisch bestimmten Meereshöhen $h$ als fehlerfrei, die Barometerstände $B$ als gleich genaue Beobachtungen behandelt werden.

Es handelt sich zuerst um Bestimmung von Näherungswerten $(X)$ und $(Y)$. Hiezu schreiben wir (2) in die Form:

$$\log X - \log B = \frac{h}{Y}$$

und wenden diese Gleichung auf die erste und auf die letzte Beobachtung an, dieses giebt:

$$\log (X) - \log 751{,}18 = \frac{120{,}2}{(Y)}$$

$$\log (X) - \log 695{,}23 = \frac{768{,}9}{(Y)}$$

Diese zwei Gleichungen kann man nach $(X)$ und $(Y)$ auflösen, und man findet:

$$(X) = 762{,}03 \qquad (Y) = 19298 \tag{3}$$

Um zu der allgemeinen Form der Gleichungen (1) S. 70 zu gelangen, hat man die Gleichung (2) nach $(B)$ aufzulösen. Dieses giebt:

$$\frac{h}{Y} = \log \frac{X}{B} \;,\quad \frac{X}{B} = 10^{\frac{h}{Y}} \;,\quad \frac{B}{X} = 10^{-\frac{h}{Y}} \;,\quad B - X\,10^{-\frac{h}{Y}} = 0$$

d. h. die in den allgemeinen Formeln S. 70 mit $F\,(X\,,\,Y)$ bezeichnete Funktion ist in unserem Falle: $F(X,\,Y) = X\,10^{-\frac{h}{Y}}$,
und damit berechnet man nach Anleitung von (6) und (7) S. 71:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial\left(X\,10^{-\frac{h}{Y}}\right)}{\partial X} = 10^{-\frac{h}{Y}} \\ b &= \frac{\partial\left(X\,10^{-\frac{h}{Y}}\right)}{\partial Y} = X\,10^{-\frac{h}{Y}}\,\frac{h}{Y^2}\,\frac{1}{M} \\ l &= (X)\,10^{-\frac{h}{(Y)}} - B \quad \text{oder} \quad = (B) - B \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bei der Ausrechnung von $a$ und $b$ ist überall $(X)$ und $(Y)$ an Stelle von $X$ und $Y$ zu setzen. Die Ausrechnung der Formeln (4) macht man am besten in logarithmischer Form, d. h.:

$$\left.\begin{aligned} \log a &= -\frac{h}{(Y)} \quad \text{oder } \log\frac{1}{a} = \frac{h}{(Y)} \\ \log b &= -\frac{h}{(Y)} + \log\frac{(X)\,h}{M(Y)^2} = \log a + \log\frac{(X)\,h}{(Y)^2 M} \\ \log(l+B) &= \log(X) - \frac{h}{(Y)} = \log(X) + \log a \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Setzt man hier die Zahlenwerte nach (1) und (3) ein, so erhält man:

| Nr. | $a$ | $b$ | $l$ |
|---|---|---|---|
| 1 | + 0,986 | + 0,00056 | 0,00 |
| 2 | + 0,973 | + 0,00103 | — 0,53 |
| 3 | + 0,968 | + 0,00123 | — 0,68 |
| 4 | + 0,959 | + 0,00157 | — 0,20 |
| 5 | + 0,953 | + 0,00182 | — 1,06 |
| 6 | + 0,943 | + 0,00219 | + 0,38 |
| 7 | + 0,919 | + 0,00307 | — 0,20 |
| 8 | + 0,916 | + 0,09317 | + 0,53 |
| 9 | + 0,912 | + 0,00331 | 0,00 |

Der Umstand, dass der erste und der letzte Wert $l$ Null werden, ist nicht zufällig; es kommt dieses daher, dass die erste und die letzte Beobachtung $B$ zur Bestimmung der Näherungswerte benützt wurden. Wenn die Näherungswerte gar keiner der Beobachtungen streng genügen, so wird auch kein Wert $l = 0$ werden.

Die Fehlergleichungen würden also jetzt sein:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0{,}986\,x + 0{,}00056\,y' + 0{,}00 \\ v_2 &= 0{,}973\,x + 0{,}00103\,y' - 0{,}53 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die zweite Unbekannte wurde hier $y'$ genannt, weil wir dieselbe nochmals ändern wollen. Die Coefficienten sind nämlich noch zu ungleich, was bei der numerischen Rechnung unbequem ist. Wir wollen daher statt der Fehlergleichungen (6) lieber folgende schreiben:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0{,}986\,x + 0{,}056\left(\frac{y'}{100}\right) + 0{,}00 \\ v_2 &= 0{,}973\,x + 0{,}103\left(\frac{y'}{100}\right) - 0{,}53 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

d. h. wir führen statt $y'$ die neue Unbekannte ein:

$$\frac{y'}{100} = y \qquad (\text{also } y' = 100\,y) \tag{8}$$

wobei $y'$ die Korrektion des Näherungswertes $(Y)$ und $y$ die aus den Normalgleichungen zu bestimmende Unbekannte ist. Damit erhält man folgende Tafel der Coefficienten, nebst Summen $s$, wobei:

$$a + b + l + s = 0 \tag{9}$$

| Nr. | $a$ | $b$ | $l$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | + 0,986 | + 0,056 | 0,000 | — 1,042 |
| 2 | + 0,973 | + 0,103 | — 0,530 | — 0,546 |
| 3 | + 0,968 | + 0,123 | — 0,680 | — 0,411 |
| 4 | + 0,959 | + 0,157 | — 0,200 | — 0,916 |
| 5 | + 0,953 | + 0,182 | — 1,060 | — 0,075 |
| 6 | + 0,943 | + 0,219 | + 0,380 | — 1,542 |
| 7 | + 0,919 | + 0,307 | — 0,200 | — 1,026 |
| 8 | + 0,916 | + 0,317 | + 0,530 | — 1,763 |
| 9 | + 0,912 | + 0,331 | 0,000 | — 1,243 |
| Summen | + 8,529 | + 1,795 | — 1,760 | — 8,564 |

Die Ausrechnung der Summen-Coefficienten $[a\,a]$ , $[b\,b]$ u. s. w. wollen wir mit der Quadrattafel machen nach dem Verfahren von § 18. S. 60.

Bei nur 2 Unbekannten hat man dabei auch eine Erleichterung insofern, als $a + s \quad b + s \quad l + s$ nicht besonders zu berechnen sind, denn wegen (9) ist:

$$(a + s) = -(b + l) \qquad (b + s) = -(a + l) \qquad (l + s) = -(a + b)$$

| $a$ | $b$ | $l$ | $s$ | $a + b$ $= -(l+s)$ | $a + l$ $= -(b+s)$ | $b + l$ $= -(a+s)$ | Proben: | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + 0,986 | + 0,056 | 0,000 | — 1,042 | + 1,042 | + 0,986 | + 0,056 | + 8,529 | + 8,529 |
| + 0,973 | + 0,103 | — 0,530 | — 0,546 | + 1,076 | + 0,443 | — 0,427 | + 1,795 | + 1,795 |
| + 0,968 | + 0,123 | — 0,680 | — 0,411 | + 1,091 | + 0,288 | — 0,557 | — 1,760 | + 10,324 |
| + 0,959 | + 0,157 | — 0,200 | — 0,916 | + 1,116 | + 0,759 | — 0,043 | — 8,564 | + 8,529 |
| + 0,953 | + 0,182 | — 1,060 | — 0,075 | + 1,135 | — 0,107 | — 0,878 | 0,000 | — 1,760 |
| + 0,943 | + 0,219 | + 0,380 | — 1,542 | + 1,162 | + 1,323 | + 0,599 | | + 6,769 |
| + 0,919 | + 0,307 | — 0,200 | — 1,026 | + 1,226 | + 0,719 | + 0,107 | | |
| + 0,916 | + 0,317 | + 0,530 | — 1,763 | + 1,233 | + 1,446 | + 0,847 | | + 1,795 |
| + 0,912 | + 0,331 | 0,000 | — 1,243 | + 1,243 | + 0,912 | + 0,331 | | — 1,760 |
| + 8,529 | + 1,795 | — 1,760 | — 8,564 | + 10,324 | + 6,769 | + 0,035 | | + 0,035 |

| $a^2$ | $b^2$ | $l^2$ | $s^2$ | $(a + b)^2$ $= (l + s)^2$ | $(a + l)^2$ $= (b + s)^2$ | $(b + l)^2$ $= (a + s)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,9722 | 0,0031 | 0,0000 | 1,0858 | 1,0858 | 0,9722 | 0,0031 |
| 0,9467 | 0,0106 | 0,2809 | 0,2981 | 1,1578 | 0,1962 | 0,1823 |
| 0,9370 | 0,0151 | 0,4624 | 0,1689 | 1,1903 | 0,0829 | 0,3102 |
| 0,9197 | 0,0246 | 0,0400 | 0,8391 | 1,2455 | 0,5761 | 0,0018 |
| 0,9082 | 0,0331 | 1,1236 | 0,0056 | 1,2882 | 0,0114 | 0,7709 |
| 0,8892 | 0,0475 | 0,1444 | 2,3778 | 1,3502 | 1,7503 | 0,3588 |
| 0,8446 | 0,0942 | 0,0400 | 1,0527 | 1,5031 | 0,5170 | 0,0114 |
| 0,8391 | 0,1005 | 0,2809 | 3,1082 | 1,5203 | 2,0909 | 0,7174 |
| 0,8317 | 0,1096 | 0,0000 | 1,5450 | 1,5450 | 0,8317 | 0,1096 |
| 8,0884 | 0,4383 | 2,3722 | 10,4812 | 11,8862 | 7,0287 | 2,4655 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $[a a] =$ 8,0884 | $[a a] =$ 8,0884 | $[a a] =$ 8,0884 | $[b b] =$ 0,4383 | $[b b] =$ 0,4383 | $[l l] =$ 2,3722 |
| $[b b] =$ 0,4383 | $[l l] =$ 2,3722 | $[s s] =$ 10,4812 | $[l l] =$ 2,3722 | $[s s] =$ 10,4812 | $[s s]$ 10,4812 |
| — 8,5267 | — 10,4606 | — 18,5696 | — 2,8105 | — 10,9195 | — 12,8534 |
| + 11,8862 | + 7,0287 | + 2,4655 | + 2,4655 | + 7,0287 | + 11,8862 |
| + 3,3595 | — 3,4319 | — 16,1041 | — 0,3450 | — 3,8908 | — 0,9672 |
| $[a b] = +$ 1,6798 | $[a l] = -$ 1,7160 | $[a s] = -$ 8,0520 | $[b l] = -$ 0,1725 | $[b s] = -$ 1,9454 | $[l s]$ — 0,4836 |

Diese Rechnungen sind ausführlicher, und auch genauer behandelt, als für den unmittelbaren Zweck unseres Beispiels nötig wäre; indessen soll durch diese ausführliche Behandlung das Verfahren überhaupt nach allen Beziehungen klar gemacht werden.

Diese Coefficienten stellt man in üblicher Weise zusammen:

| | $a$ | $b$ | $l$ | $s$ | Probe |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | + 8,0884 | + 1,6798 | — 1,7160 | — 8,0520 | + 2 |
| $b$ | | + 0,4383 | — 0,1725 | — 1,9454 | + 2 |
| $l$ | | | + 2,3722 | — 0,4836 | + 1 |
| $s$ | | | | + 10,4812 | + 2 |

Ausführlich geschrieben heisst z. B. die dritte Probe:

$$-1{,}7160 - 0{,}1725 + 2{,}3722 - 0{,}4836 = +0{,}0001$$

Die bei den Proben bleibenden Reste $+2 \quad +2 \quad +1 \quad +2$ rühren lediglich von Abrundungen her, und bleiben auf sich beruhen.

Löst man nun die Normalgleichungen nach dem Muster von § 20. S. 65 logarithmisch auf, so bekommt man:

| | $a$ | $b$ | $l$ | $s$ | Probe |
|---|---|---|---|---|---|
| Logarithmische Auflösung der Normalgleichungen nach dem Muster S. 65. | + 8,088<br>0.90784 | + 1,680<br>0.22531<br>9.54278 | — 1,716<br>0.23452<br>9.55199<br>9.56120 | — 8,052<br>0.90590<br>0.22337<br>0.23258 | 0,000 |
| | | + 0,438<br>— 0,349 | — 0,172<br>+ 0,356 | — 1,946<br>+ 1,673 | 0,000 |
| | | | + 2,372<br>— 0,364 | — 0,484<br>— 1,708 | 0,000 |
| $y = -\frac{0{,}184}{0{,}089} = -2{,}07$ | | + 0,089<br>8.94939 | + 0,184<br>9.26482<br>9.58025 | — 0,273<br>9.43616<br>9.75159 | 0,000 |
| | | | + 2,008<br>— 0,380 | — 2,192<br>+ 0,564 | 0,000 |
| | | | + 1,628 | — 1,628 | 0,000 |

Nun stellt man die Coefficienten so um:

| $b$ | $a$ | $l$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| $+0{,}438$ | $+1{,}680$ | $-0{,}172$ | $-1{,}946$ |
| | $+8{,}088$ | $-1{,}716$ | $-8{,}052$ |
| | | $+2{,}372$ | $-0{,}484$ |

Die Weiterrechnung giebt dann:

$$x = -\frac{-1{,}056}{+1{,}644} = +0{,}642$$

| | | |
|---|---|---|
| $+1{,}644$ | $-1{,}056$ | $-0{,}588$ |
| | $+2{,}304$ | $-1{,}248$ |
| | $-1{,}626$ | $+1{,}626$ |

Man hat also jetzt im ganzen:

$$x = +0{,}642 \qquad [v\,v] = [l\,l\,.\,2] \qquad y = -2{,}07$$
$$p_x = \;\;1{,}644 \qquad \qquad = 1{,}627 \qquad p_y = \;\;0{,}089$$

$$m = \sqrt{\frac{1{,}627}{9-2}} = \pm 0{,}48$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \pm 0{,}38 \qquad m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \pm 1{,}62$$

also $x = +0{,}64 \pm 0{,}38$ $\qquad y = -2{,}07 \pm 1{,}62$

$y' = -\;207 \pm 162$

Näherungen $(X) = 762{,}03$ $\qquad (Y) = 19298$

Resultate $X = 762{,}67 \pm 0{,}38$ $\qquad Y = 19091 \pm 162$ (11)

Also die gesuchte Formel:

$$h = 19091\, log \frac{762{,}67}{B} \quad \text{oder} \quad log\, B = log\, 762{,}67 - \frac{h}{19091} \tag{12}$$

Um die Fehlerverteilung zu untersuchen und um zugleich eine durchgreifende Rechenprobe zu erhalten, berechnen wir nach der Formel (12) aus den gegebenen Meereshöhen $h$ die Barometerstände $B$, und vergleichen dieselben mit den Beobachtungen:

| Nr. | Meereshöhe $h$ | Barometerstand $B$ ausgeglichen | Barometerstand $B$ beobachtet | $v$ | $v^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | m | mm | mm | mm | mm |
| 1 | 120,2 | 751,69 | 751,18 | + 0,51 | 0,2601 |
| 2 | 225,1 | 742,24 | 742,37 | − 0,13 | 0,0169 |
| 3 | 270,6 | 738,18 | 738,50 | − 0,32 | 0,1024 |
| 4 | 347,6 | 731,36 | 731,27 | + 0,09 | 0,0081 |
| 5 | 406,7 | 726,16 | 726,99 | − 0,83 | 0,6889 |
| 6 | 492,4 | 718,69 | 718,16 | + 0,53 | 0,2809 |
| 7 | 708,1 | 700,24 | 700,48 | − 0,24 | 0,0576 |
| 8 | 733,5 | 698,10 | 697,64 | + 0,46 | 0,2116 |
| 9 | 768,9 | 695,12 | 695,23 | − 0,11 | 0,0121 |
| | | | | | 1,6386 = [vv] |

Die hieraus erhaltene Summe $[v\,v] = 1{,}6386$ stimmt genügend mit dem aus der Elimination erhaltenen Wert $[l\,l\,.\,2] = 1{,}628$ oder $1{,}626$.

Man kann nun diese nach dem logarithmischen Gesetz gemachte Ausgleichung mit der früheren, nach linearem Gesetz gemachten Ausgleichung vergleichen. Nach (15) § 14. S. 51 gab die frühere Ausgleichung die Quadratsumme der übrig bleibenden scheinbaren Fehler $[v\,v] = 1{,}4695$, also etwas *kleiner* als die neue Ausgleichung mit 1,6386.

Die übrig bleibende Summe $[v\,v]$ betrachtet man in solchen Fällen als Kriterium der Güte der angewendeten Funktion, und in diesem Falle erscheint also die lineare Funktion *besser* als die theoretische logarithmische Funktion, was jedenfalls nicht der Fall ist, und nur durch Zufall erklärt werden kann.

Als sachliches Resultat heben wir hervor: Der auf den Meeresspiegel reduzierte mittlere Barometerstand in Württemberg ist:

$$B_0 = 762{,}7^{mm} \pm 0{,}4^{mm}.$$

Eine weitergehende Interpolations-Ausgleichung dieser Art wurde von uns in der Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie 1880, S. 162—167 veröffentlicht.

26 badische und württembergische Stationen zwischen $111^m$ und $1009^m$ Höhe gaben die Formel:

$$h = 18517 \log \frac{762{,}56}{B} (1 + 0{,}003665\, t)$$

wo $t$ die mittlere Jahrestemperatur ist. Hiebei ist:

$$B_0 = 762{,}56^{mm} \pm 0{,}10^{mm}.$$

## § 24. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen $x$ und $y$.

Schon am Schlusse von § 17. S. 58, als von den Gewichten und mittleren Fehlern der ausgeglichenen $x$ und $y$ die Rede war, mit den Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$, haben wir die Bemerkung gemacht, dass es auch noch einen ähnlichen Coefficienten $[\alpha\,\beta]$ giebt, welcher dann gebraucht wird, wenn es sich um eine *Funktion* der ausgeglichenen $x$ und $y$ handelt.

Indem wir dem Leser anheimgeben, mit dieser nicht dringlichen Sache sofort sich bekannt zu machen, müssen wir doch der Vollständigkeit wegen das Funktions-Gewicht für 2 Elemente auch noch hier erledigen, ehe wir zu beliebig vielen Unbekannten übergehen.

Jedenfalls wollen wir schon vor Beginn der Formel-Entwicklung vor einem Irrtum warnen, der leicht vorkommen kann, nämlich die mittleren Fehler $m_x$ und $m_y$, welche nach § 17. berechnet wurden, als *unabhängig* weiter zu behandeln, was nicht zulässig ist.

Oft hat es weniger Interesse, die Genauigkeit der Unbekannten $x$ und $y$ selbst zu kennen, als die Genauigkeit einer Funktion derselben; wir nehmen die lineare Funktion:

$$F = f_1\, x + f_2\, y \qquad (1)$$

Es könnte auf den ersten Blick erscheinen, als ob man den mittleren Fehler von $F$ kurzweg aus den mittleren Fehlern von $x$ und $y$ berechnen könnte nach der Formel (10) § 5. S. 17:

$$M^2 = (f_1\, m_x)^2 + (f_2\, m_y)^2 \quad (?) \qquad (2)$$

Allein dieses ist nicht richtig, weil die $x$ und $y$ durchaus *nicht* unabhängige Beobachtungen mit den ebenfalls unabhängigen mittleren Fehlern $m_x$ und $m_y$ sind, vielmehr hängen $x$ und $y$ von *denselben* Messungen $l_1\, l_2 \ldots l_n$ ab. Wenn z. B. zufällig die Fehler aller $l$ positiv wären, so würden nach (1) und (2) § 17. S. 56 auch die Fehler von $x$ *und* von $y$ beide positiv.