Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 25. Übergang zu beliebig vielen Unbekannten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

§ 25. Übergang zu beliebig vielen Unbekannten.

Wir haben in § 13. bis § 24. die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit *zwei* Unbekannten besonders behandelt, weil dieser Fall sich sehr übersichtlich darstellen liess, und weil es für das erste Erlernen der M. d. kl. Q. nützlich ist, nicht sofort in die weitschweifigen allgemeinen Formeln für beliebig viele Unbekannte einzugehen. Zudem kommt der Fall *zweier* Beobachtungen so oft vor, z. B. bei trigonometrischen Punktbestimmungen, mit Coordinaten x und y, dass es sich wohl lohnt, diesen Fall besonders zu erledigen.

Man kann sogar von den Formeln für zwei Unbekannte einige Analogieschlüsse auf die Formeln für mehr Unbekannte sich erlauben; z. B. nachdem nachgewiesen ist, dass bei zwei Unbekannten x und y das Gewicht $p_y = [b\,b\,.\,1]$ ist, kann man wohl *vermuten*, dass bei drei Unbekannten $x\ y\ z$ gelten wird $p_z = [c\,c\,.\,2]$ u. s. w.

Auch bei der Fehlerformel mit dem Nenner $n-2$ (§ 16. S. 56) haben wir schon den Analogieschluss beigefügt, dass bei u Unbekannten der Nenner $n-u$ zu erwarten sein werde, doch war das noch kein Beweis für beliebige Anzahl u.

Wir gehen nun von dem besonderen Falle zweier Unbekannter x und y zu dem allgemeinen Fall beliebig vieler Unbekannter $x\ y\ z\ .\ .\ .$ über, und überzeugen uns sofort, dass Alles, was früher über die Einführung von Näherungswerten (§ 14.), über den allgemeinen Gang der Gauss schen Elimination mit $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]\ .\ .\ .$ (§ 15.), Coefficienten-Berechnung und Summenproben (§ 18.), über ungleiche Gewichte und nicht lineare Funktionen (§ 21.—22.) u. A. gesagt wurde, nicht bloss für zwei, sondern für beliebig viele Unbekannte gilt.

Z. B. bei vier Unbekannten $x\ y\ z\ t$ hat man folgenden Rechnungsgang:

Fehlergleichungen:
$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1\,t + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2\,t + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + d_3\,t + l_3 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Normalgleichungen ausführlich geschrieben:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,d]\,t + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,d]\,t + [c\,l] = 0 \\ [a\,d]\,x + [b\,d]\,y + [c\,d]\,z + [d\,d]\,t + [d\,l] = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Da hier alle nicht quadratischen Coefficienten $[a\,b]\ [a\,c]\ .\ .\ .$ *doppelt* vorkommen, pflegt man, um diese nicht doppelt schreiben zu müssen, die folgende Abkürzung anzuwenden, wobei man die in der Diagonale stehenden quadratischen Glieder *unterstreicht* und dann die Wiederholungen der $[a\,b]\ [a\,c]\ .\ .\ .$ einfach weglässt.

Normalgleichungen abgekürzt geschrieben, nebst $[l\,l]$:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] = 0 \\ \underline{[b\,b]\,y} + [b\,c]\,z + [b\,d]\,t + [b\,l] = 0 \\ \underline{[c\,c]\,z} + [c\,d]\,t + [c\,l] = 0 \\ \underline{[d\,d]\,t} + [d\,l] = 0 \\ \underline{[l\,l]} \qquad\quad \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Reduzierte Normalgleichungen abgekürzt geschrieben:

$$\left.\begin{array}{rr} \text{1. Reduktion:} & \underline{[bb.1]}\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,t + [bl.1] = 0 \\ & \underline{[cc.1]}\,z + [cd.1]\,t + [cl.1] = 0 \\ & \underline{[dd.1]}\,t + [dl.1] = 0 \\ & \underline{[ll.1]} \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{rr} \text{2. Reduktion:} & \underline{[cc.2]}\,z + [cd.2]\,t + [cl.2] = 0 \\ & \underline{[dd.2]}\,t + [dl.2] = 0 \\ & \underline{[ll.2]} \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{rr} \text{3. Reduktion:} & [dd.3]\,t + [dl.3] = 0 \\ & \underline{[ll.3]} \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\text{4. Reduktion:} \quad \underline{[ll.4]} \quad (7)$$

Der Bau des Eliminations-Coefficienten lässt sich leicht dem Gedächtnis einprägen, wenn man ausser den unmittelbar in die Augen fallenden noch folgende Eigenschaften merkt:

1) Jeder Klammer-Coefficient wird $= 0$, wenn man die symbolischen Zeichen algebraisch auffasst, z. B.:

$$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al] = bl - \frac{ab\,al}{aa} = bl - bl = 0$$

2) Wenn 1, 2, 3 . . . in der Klammer steht, so steht im Nenner des Subtrahenden bzw. $[aa]$, $[bb.1]$, $[cc.2]$ . . .

Um ein Zahlenbeispiel zu haben, wollen wir folgendes Gleichungssystem auflösen:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{459}\,x - 308\,y - 389\,z + 244\,t - 507 = 0 \\ +\underline{464}\,y + 408\,z - 269\,t + 695 = 0 \\ +\underline{676}\,z - 331\,t + 653 = 0 \\ +\underline{469}\,t - 283 = 0 \\ +\underline{1129} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Die Auflösung mit dem Rechenschieber zeigt nachfolgende Tabelle S. 82, welche ähnliche Anordnung hat wie die Tabelle für 2 Unbekannte $x\ y$ § 19, S. 63. In den 2 letzten Spalten sind die Summenglieder und die Proben angegeben.

Die Anfangsgleichungen aller Gruppen, zusammengenommen, nennt man vollständig reduzierte Normalgleichungen oder Endgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} A &= [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t + [al] = 0 \\ B' &= [bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,t + [bl.1] = 0 \\ C'' &= [cc.2]\,z + [cd.2]\,t + [cl.2] = 0 \\ D''' &= [dd.3]\,t + [dl.3] = 0 \\ & \qquad [ll.4] = [vv] \end{array}\right\} \quad (9)$$

Dieses sind wirkliche Gleichungen, deren jede immer eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende, während (3) oder (8) mit den Unterstreichungen nur Abkürzungen der Gleichungen (2) sind, deren jede noch *alle* Unbekannten enthält.

Das Zahlenbeispiel auf S. 82 giebt folgende Endgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} +459\,x - 308\,y - 389\,z + 244\,t - 507 = 0 \\ +256\,y + 146\,z - 105\,t + 354 = 0 \\ +263\,z - 64\,t + 21 = 0 \\ +281\,t + 137 = 0 \\ 11 = [vv] \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die 4te Gleichung bestimmt t, und setzt man dieses rückwärts in die 3te Gleichung, so hat man auch z u. s. w. Kurz, man kann durch Rückwärtssubstituieren allmählich alle Unbekannten in der Aufeinanderfolge $t\ z\ y\ x$ finden.

Auflösung eines Systems von 4 Normalgleichungen:

	a	b	c	d	l	s	Probe
A	+ 459	− 308	− 389	+ 244	− 507	+ 501	0
		+ 464	+ 408	− 269	+ 695	− 990	0
		− 208	− 262	+ 164	− 341	+ 337	
			+ 676	− 331	+ 653	−1017	0
			− 330	+ 207	− 430	+ 425	
				+ 469	− 283	+ 170	0
				− 130	+ 270	− 267	
					+1129	−1687	0
					− 560	+ 554	
B'		+ 256	+ 146	− 105	+ 354	− 653	− 2
			+ 346	− 124	+ 223	− 592	− 1
			− 83	+ 60	− 202	+ 373	
				+ 339	− 13	− 97	0
				− 43	+ 145	− 268	
					+ 569	−1133	0
					− 490	− 902	
C''			+ 263	− 64	+ 21	− 219	+ 1
				+ 296	+ 132	− 365	− 1
				− 15	+ 5	− 53	
					+ 79	− 231	+ 1
					− 2	+ 17	
$t = -\dfrac{+137}{+281} = -0{,}488$ D'''				+ 281	+ 137	− 418	0
					+ 77	− 214	0
					− 66	+ 203	
					+ 11	− 11	

Die Ausrechnung der Abzüge − 208 − 262 + 164 u. s. w. ist mit dem Rechenschieber gemacht.

Man stellt dabei zuerst den Quotienten $\frac{308}{459}$ ein, und liest mit dieser *einzigen* Einstellung der Reihe nach ab:

$$\frac{308}{459}\,308 = 208\ ,\quad \frac{308}{459}\,389 = 262\ ,\quad \frac{308}{459}\,244 = 164\ ,\quad \frac{308}{459}\,507 = 341\ ,\quad \frac{308}{459}\,501 = 337$$

Dann in der zweiten Linie, mit *einer* Einstellung:

$$\frac{389}{459}\,389 = 330\ ,\quad \frac{389}{459}\,244 = 207\ ,\quad \frac{389}{459}\,507 = 430\ ,\quad \frac{389}{459}\,501 = 425$$

Diese Ergebnisse 208, 262 u. s. w. werden mit richtigen Vorzeichen d. h. nach den Regeln von § 19. S. 63—64 unter 464, 408 u. s. w. eingesetzt.

Die Eliminationen und die damit verwandten Berechnungen sind, wie die meisten kleineren Zahlenrechnungen in diesem Buche, lediglich mit dem Rechenschieber gemacht, und dagegen wird sachlich nichts einzuwenden sein. Dagegen entstehen formelle Übelstände, wenn man solche Berechnungen durch den Druck veröffentlicht.

Z. B. heisst oben der erste Subtrahend — 208, während der genauere Wert — 207 ist, denn die genaue Ausrechnung ist $-\frac{308}{459}\,308 = -\,206{,}7$. Der Fehler 208 statt 207 bleibt in dem Schlussresultat unschädlich.

Da es unsere Absicht war, in diesem Buche die Anwendung des Rechenschiebers praktisch zu zeigen, mussten wir *wirkliche* Rechnungen dieser Art vorführen, und nicht etwa solche, welche *nachher* logarithmisch verbessert sind. Es war notwendig, unverfälschte Originalrechnungen mitzuteilen, und dabei kleine formelle Widersprüche zu dulden, welche bei logarithmischen Rechnungen in einem Druckwerke nicht zulässig wären, deshalb haben wir auch den Fehler 208 statt 207 von der früheren Auflage auch wieder stehen gelassen.

§ 26. Reduzierte Fehlergleichungen.

Im Anschluss an die reduzierten Normalgleichungen können wir auch reduzierte Fehlergleichungen bilden, welche zu manchen Zwecken sehr nützlich sind.

Mit Beschränkung auf 3 Unbekannte $x\ y\ z$ haben wir die allgemeine Form einer Fehlergleichung:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l \tag{1}$$

und hiezu die erste Normalgleichung:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \tag{2}$$

woraus

$$x = -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,z - \frac{[a\,l]}{[a\,a]} \tag{3}$$

Dieses x setzen wir in (1) und haben:

$$v = \left(b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a\right) y + \left(c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a\right) z + \left(l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a\right) \tag{4}$$

oder

$$v = \qquad b'\,y + \qquad c'\,z + \qquad l' \tag{5}$$

wobei

$$b' = b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \qquad c' = c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \qquad l' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a \tag{6}$$

(4) oder (5) nennen wir eine „reduzierte Fehlergleichung“, und $b'\ c'\ l'$ nach (6) können wir reduzierte Coefficienten nennen.

Man kann sich leicht überzeugen, dass folgendes richtig ist:

$$\left.\begin{array}{lll} [b'\,b'] = [b\,b\,.\,1] & [b'\,c'] = [b\,c\,.\,1] & [b'\,l'] = [b\,l\,.\,1] \\ & [c'\,c'] = [c\,c\,.\,1] & [c'\,l'] = [c\,l\,.\,1] \\ & & [l'\,l'] = [l\,l\,.\,1] \end{array}\right\} \tag{7}$$

denn es ist z. B.:

$$b_1' = b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1 \qquad b_1'^2 = b_1^2 - 2\,a_1\,b_1\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,a_1^2$$

$$[b'\,b'] = [b\,b] - 2\,[a\,b]\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,[a\,a]$$

$$[b'\,b'] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b] = [b\,b\,.\,1] \text{ u. s. w.}$$