Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 26. Reduzierte Fehlergleichungen

Die Eliminationen und die damit verwandten Berechnungen sind, wie die meisten kleineren Zahlenrechnungen in diesem Buche, lediglich mit dem Rechenschieber gemacht, und dagegen wird sachlich nichts einzuwenden sein. Dagegen entstehen formelle Übelstände, wenn man solche Berechnungen durch den Druck veröffentlicht.

Z. B. heisst oben der erste Subtrahend — 208, während der genauere Wert — 207 ist, denn die genaue Ausrechnung ist $-\frac{308}{459}\,308 = -206{,}7$. Der Fehler 208 statt 207 bleibt in dem Schlussresultat unschädlich.

Da es unsere Absicht war, in diesem Buche die Anwendung des Rechenschiebers praktisch zu zeigen, mussten wir *wirkliche* Rechnungen dieser Art vorführen, und nicht etwa solche, welche *nachher* logarithmisch verbessert sind. Es war notwendig, unverfälschte Originalrechnungen mitzuteilen, und dabei kleine formelle Widersprüche zu dulden, welche bei logarithmischen Rechnungen in einem Druckwerke nicht zulässig wären, deshalb haben wir auch den Fehler 208 statt 207 von der früheren Auflage auch wieder stehen gelassen.

§ 26. Reduzierte Fehlergleichungen.

Im Anschluss an die reduzierten Normalgleichungen können wir auch reduzierte Fehlergleichungen bilden, welche zu manchen Zwecken sehr nützlich sind.

Mit Beschränkung auf 3 Unbekannte $x\ y\ z$ haben wir die allgemeine Form einer Fehlergleichung:

$$v = a x + b y + c z + l \tag{1}$$

und hiezu die erste Normalgleichung:

$$[a a] x + [a b] y + [a c] z + [a l] = 0 \tag{2}$$

woraus
$$x = -\frac{[a b]}{[a a]} y - \frac{[a c]}{[a a]} z - \frac{[a l]}{[a a]} \tag{3}$$

Dieses x setzen wir in (1) und haben:

$$v = \left(b - \frac{[a b]}{[a a]} a\right) y + \left(c - \frac{[a c]}{[a a]} a\right) z + \left(l - \frac{[a l]}{[a a]} a\right) \tag{4}$$

oder
$$v = \qquad b' y + \qquad c' z + \qquad l' \tag{5}$$

wobei
$$b' = b - \frac{[a b]}{[a a]} a \qquad c' = c - \frac{[a c]}{[a a]} a \qquad l' = l - \frac{[a l]}{[a a]} a \tag{6}$$

(4) oder (5) nennen wir eine „reduzierte Fehlergleichung“, und $b'\ c'\ l'$ nach (6) können wir reduzierte Coefficienten nennen.

Man kann sich leicht überzeugen, dass folgendes richtig ist:

$$\left.\begin{array}{lll} [b' b'] = [b b \,.\, 1] & [b' c'] = [b c \,.\, 1] & [b' l'] = [b l \,.\, 1] \\ & [c' c'] = [c c \,.\, 1] & [c' l'] = [c l \,.\, 1] \\ & & [l' l'] = [l l \,.\, 1] \end{array}\right\} \tag{7}$$

denn es ist z. B.:

$$b_1' = b_1 - \frac{[a b]}{[a a]} a_1 \qquad b_1'^2 = b_1^2 - 2 a_1 b_1 \frac{[a b]}{[a a]} + \frac{[a b]^2}{[a a]^2} a_1^2$$

$$[b' b'] = [b b] - 2 [a b] \frac{[a b]}{[a a]} + \frac{[a b]^2}{[a a]^2} [a a]$$

$$[b' b'] = [b b] - \frac{[a b]}{[a a]} [a b] = [b b \,.\, 1] \text{ u. s. w.}$$

Nun kann man die Fehlergleichung (5) nochmals reduzieren. Nimmt man nämlich die erste reduzierte Normalgleichung zur Hand:

$$[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \quad \text{oder} \quad [b'\,b']\,y + [b'\,c']\,z + [b'\,l'] = 0$$

und bestimmt daraus: $\quad y = -\dfrac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,z - \dfrac{[b'\,l']}{[b'\,b']}$

und setzt man dieses in (5), so wird:

$$v = \left(c' - \frac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,b'\right) z + \left(l' - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b'\right) \tag{8}$$

$$v = c''\,z + l'' \tag{9}$$

wobei $\quad c'' = c' - \dfrac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,l' \qquad l'' = l' - \dfrac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b' \qquad (10)$

und es gelten die ähnlich wie (7) leicht nachzuweisenden Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{ll} [c''\,c''] = [c\,c\,.\,2] & [c''\,l''] = [c\,l\,.\,2] \\ & [l''\,l''] = [l\,l\,.\,2] \end{array}\right\} \tag{11}$$

So kann man auch fortfahren, bis man hat:

$$v = l''' = l'' - \frac{[c''\,l'']}{[c''\,c'']}\,c'' \tag{12}$$

oder mit Zurückgehen auf (10) und (6):

$$v = l''' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b' - \frac{[c''\,l'']}{[c''\,c'']}\,c''$$

Wir haben also nun bewiesen, dass alle Eliminations-Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,c\,.\,1] \ldots [c\,l\,.\,2]$ u. s. w. nicht bloss der Form nach, sondern in Wirklichkeit Quadratsummen und Produktsummen sind, deren Elemente b', $c' \ldots c''$ u. s. w. angegeben werden können.

Insbesondere sind die $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2] \ldots$ *Quadrat*summen, und daher stets positiv.

§ 27. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ und mittlerer Fehler m.

Die Entwicklung von $[v\,v]$, welche in § 15. (9) bis (15) S. 52—53, für 2 Unbekannte gemacht wurde, lässt sich allgemein weiter führen:

Für 3 Elemente $x\ y\ z$ haben wir:

$$\left.\begin{array}{rl} [v\,v] = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z + 2\,[a\,l]\,x & \\ +\ \ [b\,b]\,y^2 + 2\,[b\,c]\,y\,z + 2\,[b\,l]\,y & \\ +\ \ [c\,c]\,z^2 + 2\,[c\,l]\,z & \\ +\ \ [l\,l] & \end{array}\right\} \tag{1}$$

Mit dieser Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ kann man die linken Seiten $A\ B'\ C'' \ldots$ der Endgleichungen (9) § 25. S. 81 in innige Beziehungen bringen. Zunächst hat man:

$$A = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] \tag{2}$$

also

$$\begin{array}{rl} \dfrac{A\,A}{[a\,a]} = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z + 2\,[a\,l]\,x & \\ +\ \dfrac{[a\,b]^2}{[a\,a]}\,y^2 + 2\,\dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,c]\,y\,z + 2\,\dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\,y & \\ +\ \dfrac{[a\,c]^2}{[a\,a]}\,z^2 + 2\,\dfrac{[a\,c]}{[a\,a]}\,[a\,l]\,z & \\ +\ \dfrac{[a\,l]^2}{[a\,a]} & \end{array}$$