Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 27. Fehlerquadratsumme [vv] und mittlerer Fehler m

Nun kann man die Fehlergleichung (5) nochmals reduzieren. Nimmt man nämlich die erste reduzierte Normalgleichung zur Hand:

$$[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \quad \text{oder} \quad [b'\,b']\,y + [b'\,c']\,z + [b'\,l'] = 0$$

und bestimmt daraus: $y = -\dfrac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,z - \dfrac{[b'\,l']}{[b'\,b']}$

und setzt man dieses in (5), so wird:

$$v = \left(c' - \frac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,b'\right) z + \left(l' - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b'\right) \tag{8}$$

$$v = c''\,z + l'' \tag{9}$$

wobei $$c'' = c' - \frac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,l' \qquad l'' = l' - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b' \tag{10}$$

und es gelten die ähnlich wie (7) leicht nachzuweisenden Beziehungen:

$$\left.\begin{matrix} [c''\,c''] = [c\,c\,.\,2] & [c''\,l''] = [c\,l\,.\,2] \\ & [l''\,l''] = [l\,l\,.\,2] \end{matrix}\right\} \tag{11}$$

So kann man auch fortfahren, bis man hat:

$$v = l''' = l'' - \frac{[c''\,l'']}{[c''\,c'']}\,c'' \tag{12}$$

oder mit Zurückgehen auf (10) und (6):

$$v = l''' = \;l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b' - \frac{[c''\,l'']}{[c''\,c'']}\,c''$$

Wir haben also nun bewiesen, dass alle Eliminations-Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,c\,.\,1] \ldots [c\,l\,.\,2]$ u. s. w. nicht bloss der Form nach, sondern in Wirklichkeit Quadratsummen und Produktsummen sind, deren Elemente b', $c' \ldots c''$ u. s. w. angegeben werden können.

Insbesondere sind die $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2] \ldots$ *Quadrat*summen, und daher stets positiv.

§ 27. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ und mittlerer Fehler m.

Die Entwicklung von $[v\,v]$, welche in § 15. (9) bis (15) S. 52—53, für 2 Unbekannte gemacht wurde, lässt sich allgemein weiter führen:

Für 3 Elemente $x\;y\;z$ haben wir:

$$\left.\begin{aligned} [v\,v] = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y &+ 2\,[a\,c]\,x\,z + 2\,[a\,l]\,x \\ + \;[b\,b]\,y^2 &+ 2\,[b\,c]\,y\,z + 2\,[b\,l]\,y \\ &+ \;[c\,c]\,z^2 \;+ 2\,[c\,l]\,z \\ &\qquad\qquad + \;[l\,l] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Mit dieser Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ kann man die linken Seiten $A\;B'\;C'' \ldots$ der Endgleichungen (9) § 25. S. 81 in innige Beziehungen bringen. Zunächst hat man:

$$A = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] \tag{2}$$

also
$$\begin{aligned} \frac{A\,A}{[a\,a]} = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y &+ 2\,[a\,c]\,x\,z \qquad + 2\,[a\,l]\,x \\ + \;\frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}\,y^2 &+ 2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,c]\,y\,z + 2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\,y \\ &+ \;\frac{[a\,c]^2}{[a\,a]}\,z^2 \qquad + 2\,\frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,[a\,l]\,z \\ &\qquad\qquad\qquad + \;\frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich Glied für Glied von der Summe [v v] in (1) subtrahieren; dieses giebt:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v] - \frac{A\,A}{[a\,a]} = [b\,b\,.\,1]\,y^2 + 2\,[b\,c\,.\,1]\,y\,z + 2\,[b\,l\,.\,1]\,y \\ + \quad [c\,c\,.\,1]\,z^2 + 2\,[c\,l\,.\,1]\,z \\ + \quad [l\,l\,.\,1]\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Genau in derselben Weise kann man mit der zweiten Endgleichung fortfahren:

$$B' = [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{B'\,B'}{[b\,b\,.\,1]} = [b\,b\,.\,1]\,y^2 + 2\,[b\,c\,.\,1]\,y\,z + 2\,[b\,l\,.\,1]\,y \\ + \frac{[b\,c\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}\,z^2 + 2\,\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\,z \\ + \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\end{aligned}$$

Dieses kann man wieder Glied für Glied von (3) abziehen, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v] - \frac{A\,A}{[a\,a]} - \frac{B'\,B'}{[b\,b\,.\,1]} = [c\,c\,.\,2]\,z^2 + 2\,[c\,l\,.\,2]\,z \\ + \quad [l\,l\,.\,2]\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens giebt:

$$C'' = [c\,c\,.\,2]\,z + [c\,l\,.\,2] \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{C''\,C''}{[c\,c\,.\,2]} = [c\,c\,.\,2]\,z^2 + 2\,[c\,l\,.\,2]\,z \\ + \frac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}\,[c\,l\,.\,2]\end{aligned}$$

Wenn man auch dieses noch, Glied für Glied, von (5) abzieht, so erhält man:

$$[v\,v] - \frac{A\,A}{[a\,a]} - \frac{B'\,B'}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{C''\,C''}{[c\,c\,.\,2]} = [l\,l\,.\,3] \tag{7}$$

Nun sind aber die $A\ B'\ C''$ nach (2), (4) und (6), d. h. die linken Seiten der Endgleichungen (9) § 25. S. 82 sämtlich *Null*, und (7) wird sehr einfach:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,3] \tag{7a}$$

Wenn man dieses Restglied $[l\,l\,.\,3]$ wieder in seine Teile zerlegt, so hat man:

$$[l\,l\,.\,3] = [l\,l\,.\,2] - \frac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}\,[c\,l\,.\,2]$$

$$[l\,l\,.\,2] = [l\,l\,.\,1] - \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]$$

$$[l\,l\,.\,1] = [l\,l] - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]$$

folglich:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,3] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{8}$$

Am Schluss von § 26. wurde gezeigt, dass alle Nenner $[a\,a]$ $[b\,b\,.\,1]$ $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w. positiv sind; man sieht also aus (8) deutlich, wie die Summe $[l\,l]$ allmählich abnimmt.

Aus $[v\,v]$ berechnet man auch den mittleren Fehler m einer einzelnen Beobachtung (vom Gewicht 1). Wenn v die wahren Beobachtungsfehler wären, so würde man bei n Fehlergleichungen haben:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n} \quad (?) \tag{9}$$

dagegen bekommt man aus den wahren Beobachtungsfehlern ε richtig:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} \tag{10}$$

Bezeichnet man die wahren Unbekannten mit $X\ Y\ Z$, so hat man:

$$\begin{array}{ll} & v = a\,x + b\,y + c\,z + l \\ & \varepsilon = a\,X + b\,Y + c\,Z + l \\ \hline \text{Differenz} & v = a\,(x - X) + b\,(y - Y) + c\,(z - Z) + \varepsilon \end{array} \tag{11}$$

Diese Gleichung hat wieder die Form einer Fehlergleichung, und würde in der Form $[a\,v] = 0$ $[b\,v] = 0$ auch Normalgleichungen von der früheren Form geben; man kann daher auf die Gleichung (11) auch alle mit den Fehlergleichungen vorgenommenen Umformungen anwenden, insbesondere ist nach (8):

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,\varepsilon\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{12}$$

und mit den reduzierten Coefficienten b' c'' von § 26:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b'\,\varepsilon']}{[b'\,b']} - \frac{[c''\,\varepsilon'']}{[c''\,c'']} \tag{13}$$

wobei die ε' ε'' . . . folgende Bedeutungen haben:

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,a \qquad \varepsilon'' = \varepsilon' - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,b' = \varepsilon' - \frac{[b'\,\varepsilon']}{[b'\,b']}\,b' \tag{14}$$

Aus (13) erkennt man, wegen der quadratischen Gestalt der Glieder, dass $[\varepsilon\,\varepsilon]$ jedenfalls grösser als $[v\,v]$ ist. Die Differenz $[\varepsilon\,\varepsilon] - [v\,v]$ ist selbst eine Funktion der ε, also in aller Strenge niemals zu bestimmen; man kann aber wenigstens die Mittelwerte bestimmen, gegen welche die Glieder von (13) konvergieren. Wir betrachten zuerst:

$$\begin{aligned} [a\,\varepsilon]^2 &= (a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + a_3\,\varepsilon_3 + \ldots)^2 \\ &= a_1^2\,\varepsilon_1^2 + a_2^2\,\varepsilon_2^2 + a_3^2\,\varepsilon_3^2 + \ldots \\ &\quad + 2\,a_1\,a_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + 2\,a_1\,a_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3 + \ldots \end{aligned} \tag{15}$$

Der Mittelwert der Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\,\varepsilon_3$ u. s. w. verschwindet wegen der gleichwahrscheinlichen Zeichen + und — und der Mittelwert der Quadrate ε_1^2, ε_2^2 . . . ist $= m^2$ zu setzen. Es ist also als Mittelwert der Funktion (15) zu nehmen:

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots)\,m^2 = [a\,a]\,m^2$$

und

$$\frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} = m^2 \tag{16}$$

Gehen wir zu dem zweiten Gliede von (13) über, so ist zuerst zu zeigen, dass der Mittelwert von $[b'\,\varepsilon']$ auch gleich dem Mittelwert von $[b'\,\varepsilon]$ ist, denn nach der ersten Gleichung von (14) ist:

$$[b'\,\varepsilon'] = [b'\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,[a\,b']$$

Hier ist aber über das Vorzeichen von $[a\,\varepsilon]$ gar nichts bekannt, es ist also im Mittel $[b'\,\varepsilon'] = [b'\,\varepsilon]$, folglich nach denselben Schlüssen wie bei (15) und (16):

$$\frac{[b'\,\varepsilon']^2}{[b'\,b']} = \frac{[b'\,\varepsilon]^2}{[b'\,b']} = m^2$$

Diese Schlussfolge geht beliebig weiter; wir haben daher aus (13):

$$[v\,v] - [\varepsilon\,\varepsilon] = -m^2 - m^2 - m^2 \quad \text{oder} \quad [\varepsilon\,\varepsilon] = [v\,v] + 3\,m^2 \tag{17}$$

Der strenge Wert des mittleren Fehlerquadrats ist nach (10):

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}$$

und dieses giebt in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung (17):

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-3} \tag{18}$$

Dieses gilt für 3 Unbekannte, da wir der Kürze wegen nur 3 Symbole x y z geschrieben haben; die Betrachtung gilt aber allgemein, und giebt daher für n Fehlergleichungen mit u Unbekannten:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u} \tag{19}$$

Diese Gleichung tritt an Stelle von (9).

Anhang zu § 27.

Ähnliche Entwicklungen wie die vorstehende Entwicklung von $[v\,v]$ kommen in der M. d. kl. Q. mehrfach vor; wir bilden deshalb aus dieser Entwicklung einen allgemeinen Satz, indem in (1) und (7) S. 85 alle $l = 0$ gesetzt werden, und dann (1) und (7) einander gleich gesetzt werden. Wenn man hiebei die Bedeutungen von A nach (2), B' nach (4), und C'' nach (6) berücksichtigt, so geben (1) und (7):

$$\left\{\begin{array}{r} [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z \\ + \;\; [b\,b]\,y^2 \;\; + 2\,[b\,c]\,y\,z \\ + \;\; [c\,c]\,z^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} \dfrac{([a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z)^2}{[a\,a]} \\ + \dfrac{([b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z)^2}{[b\,b\,.\,1]} \\ + \dfrac{([c\,c\,.\,2]\,z)^2}{[c\,c\,.\,2]} \end{array}\right\} \tag{20}$$

Dieses ist eine algebraische Identität, welche mit der Bedingung Quadratsumme $[v\,v]$ = Minimum in gar keiner Beziehung besteht. Es ist hier nur vorausgesetzt, dass die Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. nach dem allgemeinen Gesetz der Elimination gebildet sind.

§ 28. Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ . . .

Nach dem Bisherigen haben wir, mit Beschränkung auf $n = 4$, $u = 3$, folgendes: Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl } n = 4 \left\{\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + l_3 \\ \underbrace{v_4 = a_4\,x + b_4\,y + c_4\,z + l_4}_{\text{Anzahl } u\,=\,3} \end{array}\right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$