Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 28. Gewichts-Coefficienten [αα] [αβ] u.s.w.

Diese Schlussfolge geht beliebig weiter; wir haben daher aus (13):

$$[v\,v] - [\varepsilon\,\varepsilon] = -m^2 - m^2 - m^2 \quad \text{oder} \quad [\varepsilon\,\varepsilon] = [v\,v] + 3\,m^2 \tag{17}$$

Der strenge Wert des mittleren Fehlerquadrats ist nach (10):

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}$$

und dieses giebt in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung (17):

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-3} \tag{18}$$

Dieses gilt für 3 Unbekannte, da wir der Kürze wegen nur 3 Symbole $x\ y\ z$ geschrieben haben; die Betrachtung gilt aber allgemein, und giebt daher für n Fehlergleichungen mit u Unbekannten:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u} \tag{19}$$

Diese Gleichung tritt an Stelle von (9).

Anhang zu § 27.

Ähnliche Entwicklungen wie die vorstehende Entwicklung von $[v\,v]$ kommen in der M. d. kl. Q. mehrfach vor; wir bilden deshalb aus dieser Entwicklung einen allgemeinen Satz, indem in (1) und (7) S. 85 alle $l = 0$ gesetzt werden, und dann (1) und (7) einander gleich gesetzt werden. Wenn man hiebei die Bedeutungen von A nach (2), B' nach (4), und C'' nach (6) berücksichtigt, so geben (1) und (7):

$$\left\{\begin{array}{r} [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z \\ +\ [b\,b]\,y^2\ + 2\,[b\,c]\,y\,z \\ +\ [c\,c]\,z^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} \dfrac{([a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z)^2}{[a\,a]} \\ + \dfrac{([b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z)^2}{[b\,b\,.\,1]} \\ + \dfrac{([c\,c\,.\,2]\,z)^2}{[c\,c\,.\,2]} \end{array}\right\} \tag{20}$$

Dieses ist eine algebraische Identität, welche mit der Bedingung Quadratsumme $[v\,v]$ = Minimum in gar keiner Beziehung besteht. Es ist hier nur vorausgesetzt, dass die Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. nach dem allgemeinen Gesetz der Elimination gebildet sind.

§ 28. Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ . . .

Nach dem Bisherigen haben wir, mit Beschränkung auf $n = 4$, $u = 3$, folgendes: Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl } n = 4 \quad \left\{\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + l_3 \\ v_4 = \underbrace{a_4\,x + b_4\,y + c_4\,z}_{\text{Anzahl } u = 3} + l_4 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Reduzierte Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r}[bb.1]\,y+[bc.1]\,z+[bl.1]=0\\ [bc.1]\,y+[cc.1]\,z+[cl.1]=0\end{array}\right\}\qquad(3)$$

$$[cc.2]\,z+[cl.2]=0\qquad(4)$$

Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{r}\underline{[aa]\,x}+[ab]\,y+[ac]\,z+[al]=0\\ \underline{[bb]\,y}+[bc]\,z+[bl]=0\\ \underline{[cc]\,z}+[cl]=0\\ \underline{[ll]}\end{array}\right\}\qquad(2^*)$$

Reduzierte Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{r}\underline{[bb.1]\,y}+[bc.1]\,z+[bl.1]=0\\ \underline{[cc.1]\,z}+[cl.1]=0\\ \underline{[ll.1]}\end{array}\right\}\qquad(3^*)$$

$$\left.\begin{array}{r}\underline{[cc.2]\,z}+[cl.2]=0\\ \underline{[ll.2]}\end{array}\right\}\qquad(4^*)$$

$$[ll.3]\qquad(5)$$

Die Bedeutung der Eliminations-Coefficienten setzen wir nochmals ausführlich her:

$$\left.\begin{array}{lll}[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab] & [bc.1]=[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac] & [bl.1]=[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\\ & [cc.1]=[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac] & [cl.1]=[cl]-\frac{[ac]}{[aa]}[al]\\ & & [ll.1]=[ll]-\frac{[al]}{[aa]}[al]\end{array}\right\}\qquad(3^{**})$$

$$\left.\begin{array}{ll}[cc.2]=[cc.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1] & [cl.2]=[cl.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1]\\ & [ll.2]=[ll.1]-\frac{[cl.1]}{[cc.1]}[cl.1]\end{array}\right\}\qquad(4^{**})$$

$$[ll.3]=[ll.2]-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cl.2]\Big\}\qquad(5^{**})$$

Nun wollen wir die Normalgleichungen (2) so aufgelöst denken, dass $x\ y\ z$ sich als lineare Funktionen der l zeigen, oder da es auf die Vorzeichen nicht ankommt, können wir auch $-x$, $-y$, $-z$ als lineare Funktionen der l darstellen:

$$\left.\begin{array}{l}-x=\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\alpha_3 l_3+\alpha_4 l_4\\ -y=\beta_1 l_1+\beta_2 l_2+\beta_3 l_3+\beta_4 l_4\\ -z=\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\gamma_3 l_3+\gamma_4 l_4\end{array}\right\}\qquad(6)$$

Hievon betrachten wir zuerst die dritte Gleichung, nämlich diejenige für z und wenden darauf das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz von (9) und (11) S. 17 an, nämlich indem der mittlere Fehler der l mit m und der mittlere Fehler von z mit m_z bezeichnet wird:

$$m_z^2=\gamma_1^2\,m^2+\gamma_2^2\,m^2+\gamma_3^2\,m^2+\gamma_4^2\,m^2$$

$$m_z^2=(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2+\gamma_4^2)\,m^2=[\gamma\gamma]\,m^2\qquad(7)$$

oder dasselbe in Gewichtsform:

$$\frac{1}{p_z}=[\gamma\gamma]\qquad(8)$$

Nun muss man andererseits auch z aus den Normalgleichungen (2) bestimmen, durch Elimination von x und y, was wir nach dem Verfahren der unbestimmten Coefficienten thun wollen, d. h. wir multiplizieren die Gleichungen (2) mit den zunächst noch unbestimmt gelassenen Coefficienten Q_1, Q_2, Q_3, wodurch wir erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1[a\,a]\,x + Q_1[a\,b]\,y + Q_1[a\,c]\,z + Q_1[a\,l] = 0 \\ Q_2[a\,b]\,x + Q_2[b\,b]\,y + Q_2[b\,c]\,z + Q_2[b\,l] = 0 \\ Q_3[a\,c]\,x + Q_3[b\,c]\,y + Q_3[c\,c]\,z + Q_3[c\,l] = 0 \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Wenn man diese 3 Gleichungen addiert, so sollen x und y verschwinden und z soll den Coefficienten $= 1$ erhalten, d. h. es wird über die Coefficienten Q_1 Q_2 Q_3 so verfügt, dass wird:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1[a\,a] + Q_2[a\,b] + Q_3[a\,c] = 0 \\ Q_1[a\,b] + Q_2[b\,b] + Q_3[b\,c] = 0 \\ Q_1[a\,c] + Q_2[b\,c] + Q_3[c\,c] = 1 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Damit giebt die Addition der 3 Gleichungen (9):

$$z + Q_1[a\,l] + Q_2[b\,l] + Q_3[c\,l] = 0 \qquad (11)$$

Dieses wird mit der ursprünglichen Annahme, d. h. mit der dritten Gleichung von (6) verglichen, und dazu ist nötig, dass wir die Klammern $[a\,l]$, $[b\,l]$, $[c\,l]$ in (11) auflösen und alles nach l_1 l_2 l_3 l_4 ordnen, d. h.:

$$\begin{aligned} z &+ Q_1(a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4) \\ &+ Q_2(b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4) \\ &+ Q_3(c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4) = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} z + (Q_1 a_1 + Q_2 b_1 + Q_3 c_1)\,l_1 + (Q_1 a_2 + Q_2 b_2 + Q_3 c_2)\,l_2 \\ \quad + (Q_1 a_3 + Q_2 b_3 + Q_3 c_3)\,l_3 + (Q_1 a_4 + Q_2 b_4 + Q_3 c_4)\,l_4 = 0 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Zur Vergleichung setzen wir die dritte Gleichung von (6) her, nämlich:

$$z + \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 = 0$$

Dieses mit (12) verglichen giebt:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = Q_1 a_1 + Q_2 b_1 + Q_3 c_1 \\ \gamma_2 = Q_1 a_2 + Q_2 b_2 + Q_3 c_2 \\ \gamma_3 = Q_1 a_3 + Q_2 b_3 + Q_3 c_3 \\ \gamma_4 = Q_1 a_4 + Q_2 b_4 + Q_3 c_4 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit a_1 a_2 a_3 a_4 und berücksichtigt (10), so erhält man:

$$[a\,\gamma] = [a\,a]\,Q_1 + [a\,b]\,Q_2 + [a\,c]\,Q_3 = 0 \qquad (14\,a)$$

Macht man dasselbe auch mit b und mit c, so bekommt man auch:

$$[b\,\gamma] = [a\,b]\,Q_1 + [b\,b]\,Q_2 + [b\,c]\,Q_3 = 0 \qquad (14\,b)$$

$$[c\,\gamma] = [a\,c]\,Q_1 + [b\,c]\,Q_2 + [c\,c]\,Q_3 = 1 \qquad (14\,c)$$

Diese 3 Gleichungen $[a\,\gamma] = 0$, $[b\,\gamma] = 0$, $[c\,\gamma] = 1$ sind erhalten worden bei der Elimination von x und y, d. h. bei der Bestimmung von z; würde man die Elimination umstellen (wobei auch wieder andere Coefficienten Q aufträten), so würde man analoge Gleichungen erhalten und die Gesamtheit aller solcher Formeln ist:

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{[a\,\alpha] = 1} & [b\,\alpha] = 0 & [c\,\alpha] = 0 \\ \overline{[a\,\beta] = 0} & \underline{[b\,\beta] = 1} & [c\,\beta] = 0 \\ [a\,\gamma] = 0 & \overline{[b\,\gamma] = 0} & \underline{[c\,\gamma] = 1} \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Wir gehen einen Schritt weiter, und multiplizieren die Gleichungen (13) der Reihe nach mit α_1 α_2 α_3 α_4, das giebt:

$$[\alpha\,\gamma] = Q_1\,[a\,\alpha] + Q_2\,[b\,\alpha] + Q_3\,[c\,\alpha]$$

d. h. wegen (15):

$$[\alpha\,\gamma] = Q_1 \tag{16 a}$$

Auf ähnlichem Wege, nämlich, wenn man die Gleichungen (13) mit β_1 β_2 β_3 β_4 und dann auch noch mit γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 multipliziert und addiert, erhält man auch:

$$[\beta\,\gamma] = Q_2 \qquad [\gamma\,\gamma] = Q_3 \tag{16 b u. 16 c}$$

Setzt man diese (16) in (11), so erhält man:

$$-z = [\alpha\,\gamma]\,[a\,l] + [\beta\,\gamma]\,[b\,l] + [\gamma\,\gamma]\,[c\,l] \tag{17}$$

Setzt man diese (16) auch in (10), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
[a\,a]\,[\alpha\,\gamma] + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\
[a\,b]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,b]\,[\beta\,\gamma] + [b\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\
[a\,c]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,c]\,[\beta\,\gamma] + [c\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 1
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Bei diesen Gleichungen (17) und (18) ist die dritte Unbekannte z bevorzugt; durch cyklische Vertauschung erhält man aus (17) und (18) das vollständige System:

Unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
-x &= [\alpha\,\alpha]\,[a\,l] + [\alpha\,\beta]\,[b\,l] + [\alpha\,\gamma]\,[c\,l] \\
-y &= [\alpha\,\beta]\,[a\,l] + [\beta\,\beta]\,[b\,l] + [\beta\,\gamma]\,[c\,l] \\
-z &= [\alpha\,\gamma]\,[a\,l] + [\beta\,\gamma]\,[b\,l] + [\gamma\,\gamma]\,[c\,l]
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Gewichtsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&[a\,a]\,[\alpha\,\alpha] + [a\,b]\,[\alpha\,\beta] + [a\,c]\,[\alpha\,\gamma] = 1 \qquad [a\,a]\,[\alpha\,\beta] + [a\,b]\,[\beta\,\beta] + [a\,c]\,[\beta\,\gamma] = 0 \\
&[a\,b]\,[\alpha\,\alpha] + [b\,b]\,[\alpha\,\beta] + [b\,c]\,[\alpha\,\gamma] = 0 \qquad [a\,b]\,[\alpha\,\beta] + [b\,b]\,[\beta\,\beta] + [b\,c]\,[\beta\,\gamma] = 1 \\
&[a\,c]\,[\alpha\,\alpha] + [b\,c]\,[\alpha\,\beta] + [c\,c]\,[\alpha\,\gamma] = 0 \qquad [a\,c]\,[\alpha\,\beta] + [b\,c]\,[\beta\,\beta] + [c\,c]\,[\beta\,\gamma] = 0 \\
&\qquad\qquad [a\,a]\,[\alpha\,\gamma] + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma] = 0 \\
&\qquad\qquad [a\,b]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,b]\,[\beta\,\gamma] + [b\,c]\,[\gamma\,\gamma] = 0 \\
&\qquad\qquad [a\,c]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,c]\,[\beta\,\gamma] + [c\,c]\,[\gamma\,\gamma] = 1
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Durch Auflösung der Gewichtsgleichungen (20) kann man alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. bestimmen, und zwar die nichtquadratischen, z. B. $[\alpha\,\beta]$ $[\beta\,\gamma]$ u. s. w. je doppelt, was als Rechenprobe dient.

Setzt man die so erhaltenen Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. in (19), so hat man die sogenannte „unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen", d. h. die Entwicklung der x y z als lineare Funktionen der Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ $[c\,l]$.

Die Gewichtsgleichungen (20) haben dieselben Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ u. s. w. wie die ursprünglichen Normalgleichungen (2); die Auflösung der Gewichtsgleichungen schliesst sich daher auch der Auflösung (2*) (3*) (4*) an.

Hiebei sind an Stelle der früheren $[a\,l]$. $[b\,l]$, $[c\,l]$ nun entweder -1 oder 0 getreten, und man wird bald finden, dass auch alle folgenden $[b\,l\,.\,1]$, $[c\,l\,.\,1]$, $[c\,l\,.\,2]$ nur -1 oder 0 werden können, z. B. die dritte Gruppe von (20) geht in Hinsicht auf die Absolutglieder dadurch aus (2*) hervor, dass man setzt

$$[a\,l] = 0 \qquad [b\,l] = 0 \qquad [c\,l] = -1$$

damit wird nach (3**) S. 88:

$$[b\,l\,.\,1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l] = 0 - 0 = 0$$

$$[c\,l\,.\,1] = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,[a\,l] = -1 - 0 = -1$$

Auf diesem Wege bekommt man für die dritte Gruppe von (20) folgendes System, welches (3*) und (4*) S. 88 entspricht:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]\,[\alpha\,\gamma]} + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ \underline{[b\,b]\,[\beta\,\gamma]} + [b\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ \underline{[c\,c]\,[\gamma\,\gamma]} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (21\,\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{[b\,b\,.\,1]\,[\beta\,\gamma]} + [b\,c\,.\,1]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]\,[\gamma\,\gamma]} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (21\,\text{b})$$

$$[c\,c\,.\,2]\,[\gamma\,\gamma] = 1 \qquad (21\,\text{c})$$

Wir nehmen diese Schlussgleichung von (21 c) zusammen mit (8) und haben:

$$p_z = \frac{1}{[\gamma\,\gamma]} = [c\,c\,.\,2] \qquad (22)$$

Dieses ist die Verallgemeinerung des Satzes, den wir in der Form $p_y = [b\,b\,.\,1]$ für 2 Unbekannte bereits in (8) § 17. S. 57 gehabt haben.

Da unsere Betrachtung zwar mit *drei* Elementen $x\ y\ z$ geführt, aber dem Gedanken nach nicht an *drei* gebunden ist, heisst dieser Satz nach (22) allgemein:

Wenn man die Normalgleichungen nach der Gauss schen Methode allmählich reduziert, d. h. $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w. bildet, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt, so ist in dieser letzten Gleichung der Coefficient der Unbekannten zugleich das Gewicht der Unbekannten.

Diese Gewichtsbestimmungsmethode ist sehr gebräuchlich.

Um zur unabhängigen Bestimmung der Gewichte aller Unbekannten nach dieser Methode zu gelangen, muss man die Elimination wenigstens einmal vollständig umkehren, also etwa zuerst mit der Ordnung $x\ y\ z$ die Unbekannte z und p_z bestimmen, dann mit der Ordnung $z\ y\ x$ die Bestimmung von x und p_x vornehmen, worauf y nebst p_y sich findet durch Umstellung, entweder der 2 Gleichungen, welche nach Elimination von x geblieben sind, oder der 2 Gleichungen, welche nach Elimination von z sich ergeben haben.

Man kann jedesmal hiebei auch einen nicht quadratischen Coefficienten $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. gelegentlich mitbestimmen, denn wenn z. B. x eliminiert ist, so dass man hat:

$$\begin{aligned} \underline{[b\,b\,.\,1]\,y} + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]\,z} + [c\,l\,.\,1] &= 0 \end{aligned}$$

so kann man auch rechnen:

$$[b\,c\,.\,2] = [b\,c\,.\,1] - \frac{[b\,b\,.\,1]\,[c\,c\,.\,1]}{[b\,c\,.\,1]} = \frac{1}{[\beta\,\gamma]} \qquad (23)$$

Man beweist dieses gerade so, wie (22) bewiesen wurde, d. h. man betrachtet $[\beta\,\gamma]$ als denjenigen speziellen Wert von z, welcher in (19) entsteht, wenn $[a\,l] = 0$, $[b\,l] = -1$ und $[c\,l] = 0$ gesetzt wird.

Man könnte in dieser Weise durch mehrfaches Umstellen der Eliminationsordnung alle Gewichts-Coefficienten nach und nach finden, und bei nur 2 oder 3 Unbekannten macht sich unter Umständen das ganz bequem.

Bei 2 Unbekannten ist überhaupt alles einfach, wie in dem Beispiel § 20. S. 65 gezeigt ist.

Bei 3 Unbekannten kann man so verfahren:

$$\begin{array}{llll} 1) & a & b & c \\ & & b & c \\ & & & c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{llll} 2) & c & b & a \\ & & b & a \\ & & & a \end{array}$$

giebt z und $[\gamma\,\gamma]$ nebst $[\beta\,\gamma]$. giebt x und $[\alpha\,\alpha]$ nebst $[\alpha\,\beta]$.

Nun muss man jedenfalls noch einmal umstellen, um y und $[\beta\,\beta]$ zu erhalten; also:

$$\begin{array}{lll} 3) & c & b \\ & & b \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{lll} 4) & a & b \\ & & b \end{array}$$

giebt y und $[\beta\,\beta]$ nebst $[\beta\,\gamma]$. giebt y und $[\beta\,\beta]$ nebst $[\alpha\,\beta]$.

Da man mit 1), 2) und 3) bereits alle Unbekannten und deren Gewichte hat, kann man statt noch 4) zu bilden, für den letzten noch fehlenden Coefficienten $[\alpha\,\beta]$ auch die erste der Gleichungen (20) selbst zu Hilfe nehmen.

Bei mehr als 3 Unbekannten ist aber das Verfahren der Gleichung (23) höchstens dann zu empfehlen, wenn man nur *einzelne* der Coefficienten $[\beta\,\gamma]$ etc. braucht, nach denen man dann die Eliminationsordnung einrichten kann. Braucht man alle Gewichts-Coefficienten, (was z. B. bei der Bessel schen Triangulationsausgleichung der Fall ist), so kann man nicht ohne die allgemeinen Gewichtsgleichungen (20) bzw. (21) auskommen, deren gemeinsame Auflösung wir in § 33. besonders behandeln werden.

§ 29. Gewicht einer Funktion der $x\ y\ z$ nach der Ausgleichung.

Wir betrachten die lineare Funktion:

$$F = f_1\,x + f_2\,y + f_3\,z \tag{1}$$

Das Gewicht von F kann man aus den *Einzel*gewichten der gemeinsam ausgeglichenen Elemente $x\ y\ z$ nicht unmittelbar bestimmen, weil die Gewichte der $x\ y\ z$ nicht unabhängig sind, man muss vielmehr, wie im Fall von § 17., auf die Beobachtungen selbst zurückgreifen, und F als Funktion derselben darstellen.

Wir benützen wieder die Gleichungen (6) § 28. S. 88:

$$\left.\begin{aligned} -x &= \alpha_1\,l_1 + \alpha_2\,l_2 + \alpha_3\,l_3 + \alpha_4\,l_4 \\ -y &= \beta_1\,l_1 + \beta_2\,l_2 + \beta_3\,l_3 + \beta_4\,l_4 \\ -z &= \gamma_1\,l_1 + \gamma_2\,l_2 + \gamma_3\,l_3 + \gamma_4\,l_4 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Setzt man diese Werte in (1), so erhält man:

$$-F = \left\{\begin{aligned} &+(f_1\,\alpha_1 + f_2\,\beta_1 + f_3\,\gamma_1)\,l_1 \\ &+(f_1\,\alpha_2 + f_2\,\beta_2 + f_3\,\gamma_2)\,l_2 \\ &+(f_1\,\alpha_3 + f_2\,\beta_3 + f_3\,\gamma_3)\,l_3 \\ &+(f_1\,\alpha_4 + f_2\,\beta_4 + f_3\,\gamma_4)\,l_4 \end{aligned}\right\}$$

Da die l bei Gewichtsberechnungen als unmittelbare Beobachtungen gelten, erhält man das Gewicht P nach dem allgemeinen Gesetze der Fehlerfortpflanzung, ebenso wie bei (7) und (8) des vorhergehenden § 28. S. 88:

$$\frac{1}{P} = \left\{\begin{aligned} &(f_1\,\alpha_1 + f_2\,\beta_1 + f_3\,\gamma_1)^2 \\ &+(f_1\,\alpha_2 + f_2\,\beta_2 + f_3\,\gamma_2)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

oder mit Ausführung der Quadrate:

$$\frac{1}{P} = \left\{\begin{aligned} f_1 f_1\,[\alpha\,\alpha] + 2\,f_1 f_2\,[\alpha\,\beta] &+ 2\,f_1 f_3\,[\alpha\,\gamma] \\ + \ f_2 f_2\,[\beta\,\beta] &+ 2\,f_2 f_3\,[\beta\,\gamma] \\ &+ \ f_3 f_3\,[\gamma\,\gamma] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Gleichung (3) kann man auch so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} = f_1\,(f_1\,[\alpha\,\alpha] + f_2\,[\alpha\,\beta] + f_3\,[\alpha\,\gamma]) \\ + f_2\,(f_1\,[\alpha\,\beta] + f_2\,[\beta\,\beta] + f_3\,[\beta\,\gamma]) \\ + f_3\,(f_1\,[\alpha\,\gamma] + f_2\,[\beta\,\gamma] + f_3\,[\gamma\,\gamma]) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

oder mit Ordnung nach Vertikal-Reihen und mit Zusammenfassung der Coefficienten von $f_1\ f_2\ f_3$:

$$\frac{1}{P} = q_1\,f_1 + q_2\,f_2 + q_3\,f_3 = [q\,f] \tag{5}$$