Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 30. Gewicht einer Funktion von Funktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Auf diesen Ausdruck (12) kann man die allgemeine Entwicklung (20) § 27. S. 87 anwenden, nämlich:

$$\frac{1}{P}=\frac{([a\,a]\,q_1+[a\,b]\,q_2+[a\,c]\,q_3)^2}{[a\,a]}+\frac{([b\,b\,.\,1]\,q_2+[b\,c\,.\,1]\,q_3)^2}{[b\,b\,.\,1]}+\frac{([c\,c\,.\,2]\,q_3)^2}{[c\,c\,.\,2]}$$

d. h. mit Einsetzung von (10a), (10b), (10c) giebt dieses:

$$\frac{1}{P}=\frac{f_1^2}{[a\,a]}+\frac{[f_2\cdot 1]^2}{[b\,b\,.\,1]}+\frac{[f_3\cdot 2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{13}$$

Dieses ist theoretisch die übersichtlichste Formel für das Funktionsgewicht.

Ob man im einzelnen Falle numerisch hiernach, d. h. nach (10a), (10b), (10c) und (13) rechnen will, oder ob man die ursprünglichen Formeln (3) oder (5) anwenden will, wird von den Umständen abhängen.

§ 30. Gewicht einer Funktion von Funktionen.

Eine weiter abschweifende und daher zunächst zu übergehende Betrachtung bezieht sich noch auf das Gewicht einer Funktion von Funktionen der ausgeglichenen x, y, z. Später bei der Fehler-Ellipse kann davon Gebrauch gemacht werden.

Man habe zwei Funktionen:

$$X=f_1\,x+f_2\,y+f_3\,z \qquad Y=f_1'\,x+f_2'\,y+f_3'\,z \tag{1}$$

Diese zwei Funktionen sollen nach dem vorigen § 29. (13) (s. oben) behandelt worden sein, und haben folgende Gewichte erhalten:

$$\frac{1}{P_x}=\frac{f_1^2}{[a\,a]}+\frac{[f_2\cdot 1]^2}{[b\,b\,.\,1]}+\frac{[f_3\cdot 2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \qquad \frac{1}{P_y}=\frac{f_1'^2}{[a\,a]}+\frac{[f_2'\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}+\frac{[f_3'\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]} \tag{2}$$

Nun stellt man noch eine Funktion von X und von Y auf:

$$(F)=r\,X+r'\,Y \tag{3}$$

deren Gewicht ebenfalls bestimmt werden soll.

Hiezu hat man jedenfalls den Weg, dass man vermöge (1) und (3), (F) in x und y ausdrückt und eine Funktion der x und y herstellt, nämlich:

$$(F)=(r\,f_1+r'\,f_1')\,x+(r\,f_2+r'\,f_2')\,y+(r\,f_3+r'\,f_3')\,z \tag{4}$$

Das Gewicht dieser Funktion von x, y und z ist bestimmt durch:

$$\frac{1}{(P)}=\frac{(r\,f_1+r'\,f_1')^2}{[a\,a]}+\frac{[(r\,f_2+r'\,f_2')\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}+\frac{[(r\,f_3+r'\,f_3')\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{5}$$

Ausser diesem unmittelbar sich darbietenden Wege zur Berechnung des Gewichtes (P) der Funktion (3) giebt es aber noch einen zweiten Weg durch Vermittlung der Gewichte P_x und P_y, welche man nach (2) schon hat.

Wir betrachten die Bestandteile von (2) und (5) nach dem Entstehungsgesetz (11) § 29. S. 93:

$$f_1=f_1 \qquad\qquad f_1'=f_1'$$

$$[f_2\,.\,1]=f_2-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}f_1 \qquad\qquad [f_2'\,.\,1]=f_2'-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}f_1'$$

$$[f_3\,.\,2]=f_3-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}f_1-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[f_2\,.\,1] \qquad [f_3'\,.\,2]=f_3'-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}f_1'-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[f_2\cdot 1]$$

$$r\,f_1+r'\,f_1'=r\,f_1+r_1'\,f_1'$$

$$[(r\,f_2+r'\,f_2')\,.\,1]=(r\,f_2+r'\,f_2')-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}(r\,f_1+r'\,f_1')$$

$$[(r\,f_3+r'\,f_3')\,.\,2]=(r\,f_3+r'\,f_3')-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}(r\,f_2+r'\,f_2')-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[(r\,f_2+r'\,f_2')\,.\,1]$$

Man hat also die sehr einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} r f_1 + r' f_1' &= r f_1 + r' f_1' \\ [(r f_2 + r' f_2') . 1] &= r [f_2 . 1] + r' [f_2' . 1] \\ [(r f_3 + r' f_3') . 2] &= r [f_3 . 2] + r' [f_3' . 2] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Setzt man dieses in (5) ein und quadriert, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(P)} = r^2 &\left\{ \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2' . 1]^2}{[b\,b . 1]} + \frac{[f_3' . 2]^2}{[c\,c . 2]} \right\} \\ + r'^2 &\left\{ \frac{f_1'^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2' . 1]^2}{[b\,b . 1]} + \frac{[f_3' . 2]^2}{[c\,c . 2]} \right\} \\ + 2 r r' &\left\{ \frac{f_1 f_1'}{[a\,a]} + \frac{[f_2 . 1][f_2' . 1]}{[b\,b . 1]} + \frac{[f_3 . 2][f_3' . 2]}{[c\,c . 2]} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder:

$$\frac{1}{(P)} = r^2 \frac{1}{P_x} + r'^2 \frac{1}{P_y} + 2 r r' \frac{1}{P_{xy}} \tag{8}$$

Dabei haben $\frac{1}{P_x}$ und $\frac{1}{P_y}$ die bereits in (2) angegebenen Bedeutungen, und $\frac{1}{P_{xy}}$ lässt sich aus (7) leicht ableiten:

$$\frac{1}{P_{xy}} = \frac{f_1 f_1'}{[a\,a]} + \frac{[f_2 . 1][f_2' . 1]}{[b\,b . 1]} + \frac{[f_3 . 2][f_3' . 2]}{[c\,c . 2]} \tag{9}$$

In Worten kann man dieses so ausdrücken:

Wenn für zwei Funktionen X und Y nach (1) die Gewichte in den Formeln (2) bestimmt sind, und wenn es sich dann abermals um eine Funktion (F) von den Funktionen X und Y handelt, so braucht man das Gewicht (P) von (F) nicht von Neuem zu berechnen, sondern man kann es nach (9) und (8) aus den schon berechneten Gewichten P_x und P_y ableiten.

Wir werden bei der Fehlerellipse von diesem Satze Gebrauch machen, und zwar mit der Vereinfachung:

$$(F) = X + Y, \text{ d. h. } r = r' = 1. \tag{10}$$

Hiefür kann man das vorstehende in folgende Regel fassen:

Wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_x} = [\alpha\,\alpha] &= \frac{A_0 A_0}{[a\,a]} + \frac{A_1 A_1}{[b\,b . 1]} + \frac{A_2 A_2}{[c\,c . 2]} + \dots \\ \frac{1}{P_y} = [\beta\,\beta] &= \frac{B_0 B_0}{[a\,a]} + \frac{B_1 B_1}{[b\,b . 1]} + \frac{B_2 B_2}{[c\,c . 2]} + \dots \\ \text{dann berechnet man: } [\alpha\,\beta] &= \frac{A_0 B_0}{[a\,a]} + \frac{A_1 B_1}{[b\,b . 1]} + \frac{A_2 B_2}{[c\,c . 2]} + \dots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und damit ist: $\frac{1}{(P)} = [\alpha\,\alpha] + [\beta\,\beta] + 2\,[\alpha\,\beta]$.

§ 31. Partielle Elimination.

Auch die Theorie der partiellen Elimination ist nicht ein wesentlicher Bestandteil unseres Entwicklungsganges, die partielle Elimination mag aber später von Nutzen sein.