Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 31. Partielle Elimination

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Man hat also die sehr einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} r f_1 + r' f_1' &= r f_1 + r' f_1' \\ [(r f_2 + r' f_2') \,.\, 1] &= r [f_2 \,.\, 1] + r' [f_2' \,.\, 1] \\ [(r f_3 + r' f_3') \,.\, 2] &= r [f_3 \,.\, 2] + r' [f_3' \,.\, 2] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Setzt man dieses in (5) ein und quadriert, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(P)} = r^2 &\left\{ \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2' \,.\, 1]^2}{[b\,b \,.\, 1]} + \frac{[f_3' \,.\, 2]^2}{[c\,c \,.\, 2]} \right\} \\ + r'^2 &\left\{ \frac{f_1'^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2' \,.\, 1]^2}{[b\,b \,.\, 1]} + \frac{[f_3' \,.\, 2]^2}{[c\,c \,.\, 2]} \right\} \\ + 2\, r\, r' &\left\{ \frac{f_1 f_1'}{[a\,a]} + \frac{[f_2 \,.\, 1][f_2' \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]} + \frac{[f_3 \,.\, 2][f_3' \,.\, 2]}{[c\,c \,.\, 2]} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder:

$$\frac{1}{(P)} = r^2 \frac{1}{P_x} + r'^2 \frac{1}{P_y} + 2\, r\, r' \frac{1}{P_{xy}} \tag{8}$$

Dabei haben $\frac{1}{P_x}$ und $\frac{1}{P_y}$ die bereits in (2) angegebenen Bedeutungen, und $\frac{1}{P_{xy}}$ lässt sich aus (7) leicht ableiten:

$$\frac{1}{P_{xy}} = \frac{f_1 f_1'}{[a\,a]} + \frac{[f_2 \,.\, 1][f_2' \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]} + \frac{[f_3 \,.\, 2][f_3' \,.\, 2]}{[c\,c \,.\, 2]} \tag{9}$$

In Worten kann man dieses so ausdrücken:

Wenn für zwei Funktionen X und Y nach (1) die Gewichte in den Formeln (2) bestimmt sind, und wenn es sich dann abermals um eine Funktion (F) von den Funktionen X und Y handelt, so braucht man das Gewicht (P) von (F) nicht von Neuem zu berechnen, sondern man kann es nach (9) und (8) aus den schon berechneten Gewichten P_x und P_y ableiten.

Wir werden bei der Fehlerellipse von diesem Satze Gebrauch machen, und zwar mit der Vereinfachung:

$$(F) = X + Y, \text{ d. h. } r = r' = 1. \tag{10}$$

Hiefür kann man das vorstehende in folgende Regel fassen:

Wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_x} = [\alpha\,\alpha] &= \frac{A_0 A_0}{[a\,a]} + \frac{A_1 A_1}{[b\,b \,.\, 1]} + \frac{A_2 A_2}{[c\,c \,.\, 2]} + \ldots \\ \frac{1}{P_y} = [\beta\,\beta] &= \frac{B_0 B_0}{[a\,a]} + \frac{B_1 B_1}{[b\,b \,.\, 1]} + \frac{B_2 B_2}{[c\,c \,.\, 2]} + \ldots \\ \text{dann berechnet man:}\quad [\alpha\,\beta] &= \frac{A_0 B_0}{[a\,a]} + \frac{A_1 B_1}{[b\,b \,.\, 1]} + \frac{A_2 B_2}{[c\,c \,.\, 2]} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und damit ist: $\frac{1}{(P)} = [\alpha\,\alpha] + [\beta\,\beta] + 2\,[\alpha\,\beta]$.

§ 31. Partielle Elimination.

Auch die Theorie der partiellen Elimination ist nicht ein wesentlicher Bestandteil unseres Entwicklungsganges, die partielle Elimination mag aber später von Nutzen sein.

Zunächst wollen wir die Entwicklungen von § 26. zum Teil wiederholen und zusammenfassen:

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_n = a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + l_n \end{array}}_{\text{Anzahl} \;=\; u.} \right\} \qquad (1)$$

Normalgleichungen:

$$\text{Anzahl} = u \left\{ \begin{array}{r} \underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ \underline{[b\,b]}\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ \underline{[c\,c]}\,z + [c\,l] = 0 \\ \underline{[l\,l]} \quad\;\; \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Erstmals reduzierte Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l} \text{Anzahl} \\ = u - 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} \underline{[b\,b\,.\,1]\,y} + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]}\,z + [c\,l\,.\,1] = 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,1]} \quad\quad\;\; \end{array} \text{ oder } \begin{array}{r} \underline{[b'\,b']\,y} + [b'\,c']\,z + [b'\,l'] = 0 \\ \underline{[c'\,c']}\,z + [c'\,l'] = 0 \\ \underline{[l'\,l']} \quad\;\; \end{array} \right\} \qquad (3)$$

Hiebei ist:

$$b' = b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \qquad c' = c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \qquad l' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a \qquad (4)$$

Auf das System (3) kann man auch dadurch kommen, dass man n reduzierte (fingierte) Fehlergleichungen schreibt:

Reduzierte Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} v_1 = b_1'\,y + c_1'\,z + l_1' \\ v_2 = b_2'\,y + c_2'\,z + l_2' \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_n = b_n'\,y + c_n'\,z + l_n \end{array}}_{\text{Anzahl} \;=\; u - 1} \right\} \qquad (5)$$

Alles dieses in Worte gefasst, giebt den Satz:

Wenn man statt der n Fehlergleichungen (1) die n reduzierten Fehlergleichungen (5) anschreibt, und aus denselben mit gleichen Gewichten wie bei (1), in üblicher Weise Normalgleichungen (3) bildet, so erhält man daraus dieselben Unbekannten y und z, und auch alle Gewichte und mittleren Fehler gerade so wie aus den ursprünglichen Fehlergleichungen (1). Man muss jedoch bei der Berechnung des mittleren Fehlerquadrats

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u} \qquad (6)$$

im Nenner $n - u$ in der Zahl u der Unbekannten das zuerst eliminierte x mitzählen, oder man darf in (6) nicht etwa den Nenner $= n - (u-1)$ nach (5) nehmen.

Man kann aus dem Vorstehenden auch noch folgenden, allgemein gültigen Satz ableiten:

Wenn man eine Unbekannte x bereits in den Fehlergleichungen, mit Hilfe der Beziehungen (4) eliminiert, und damit reduzierte Fehlergleichungen (5) aufstellt, so bekommt man daraus *dasselbe* Normalgleichungssystem (3), welches man auf dem gewöhnlichen Weg durch Elimination von x aus den Normalgleichungen erhalten haben würde.

Wir betrachten noch folgenden Fall:

Fehlergleichungen: *Normalgleichungen:*

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = c_1 z \ldots + a_1 x + b_1 y + l_1 & \underline{[c\,c]}\,z + [c\,a]\,x + [c\,b]\,y + [c\,l] = 0 \\ v_2 = c_2 z \ldots + a_2 x + b_2 y + l_2 & \underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{[b\,b]\,y} + [b\,l] = 0 \\ v_n = c_n z \ldots + a_n x + b_n y + l_n & \underline{[l\,l]} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Eine zweite Gruppe von Beobachtungen gebe:

$$\left.\begin{array}{ll} v_{n+1} = \ldots d_{n+1}\, t + a_{n+1}\, x + b_{n+1}\, y + l_{n+1} & \underline{(d\,d)}\, t + (d\,a)\, x + (d\,b)\, y + (d\,l) = 0 \\ v_{n+2} = \ldots d_{n+2}\, t + a_{n+2}\, x + b_{n+2}\, y + l_{n+2} & \underline{(a\,a)\, x} + (a\,b)\, y + (a\,l) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{(b\,b)\, y} + (b\,l) = 0 \\ & \underline{(l\,l)} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Die Unbekannten x und y kommen in beiden Gruppen vor, dagegen z nur in der ersten, t nur in der zweiten Gruppe.

Nun soll z aus den Normalgleichungen von (7), und t aus den Normalgleichungen von (8) eliminiert werden. Dieses giebt:

$$\text{aus (7):} \quad [a\,a\,.\,1]\,x + [a\,b\,.\,1]\,y + [a\,l\,.\,1] = 0 \qquad (9)$$

$$\text{aus (8):} \quad (a\,a\,.\,1)\,x + (a\,b\,.\,1)\,y + (a\,l\,.\,1) = 0 \qquad (10)$$

Diese beiden Gleichungen nehmen wir so zusammen:

$$([a\,a\,.\,1] + (a\,a\,.\,1))\,x + ([a\,b\,.\,1] + (a\,b\,.\,1))\,y + ([a\,l\,.\,1] + (a\,l\,.\,1)) = 0 \qquad (11)$$

Dieses ist genau dieselbe erste Normalgleichung, welche man bekommen haben würde, wenn man aus allen Fehlergleichungen von (7) und (8) *zusammen* genommen Normalgleichungen gebildet und daraus z und t eliminiert hätte.

Um dieses zu beweisen, bilden wir das Gesamtnormalgleichungssystem für die Fehlergleichungen (7) und (8) unmittelbar:

$$\begin{array}{llll} \underline{[c\,c]}\,z \;\ldots & + [c\,a]\,x & + [c\,b]\,y & + [c\,l] = 0 \\ (d\,d)\,t & + (d\,a)\,x & + (d\,b)\,y & + (d\,l) = 0 \\ & ([a\,a] + (a\,a))\,x & + ([a\,b] + (a\,b))\,y & + ([a\,l] + (a\,l)) = 0 \end{array}$$

erstmals reduziert:

$$\left((d\,d) - \frac{0}{[c\,c]}\,0\right) t + \left((d\,a) - \frac{0}{[c\,c]}\,[c\,a]\right) x + \ldots$$

$$\left([a\,a] + (a\,a) - \frac{[c\,a]}{[c\,c]}\,[c\,a]\right) x + \ldots$$

nochmals reduziert:

$$\left([a\,a] + (a\,a) - \frac{[c\,a]}{[c\,c]}\,[c\,a] - \frac{(d\,a)}{(d\,d)}\,(d\,a)\right) x + \ldots \qquad (12)$$

Der Coefficient von x in (11) enthält in der That dieselben Bestandteile wie der Coefficient von x in (12), und da es mit allen anderen Coefficienten sich ähnlich verhält, so ist damit der bei (11) ausgesprochene Satz bewiesen.

Nun kann man auch noch einen Schritt weiter gehen, und mittelst des bei (5) bewiesenen Satzes über reduzierte Fehlergleichungen zu dem Schluss kommen:

Wenn einzelne Unbekannte z und t wie bei (7) und (8) nur in einem *Teil* der Fehlergleichungen vorkommen, so darf man für diese Partialgruppen von Fehlergleichungen reduzierte Fehlergleichungen von der Form (5) bilden und dann mit der Gesamtheit aller reduzierten Fehlergleichungen weiterrechnen, wie wenn es Originalfehlergleichungen wären.

Bei der Berechnung des mittleren Fehlers sind jedoch die anfänglich eliminierten Unbekannten (z und t) in der Zahl u aller Unbekannten mitzuzählen.

§ 32. Bildung der Endgleichungen ohne Zwischenglieder.

Die allmähliche Elimination, welche wir in § 25. durch die Gleichungen (4)—(7) S. 81 und durch das Zahlenbeispiel S. 82 gelehrt haben, reicht immer aus, und da man dabei Schritt für Schritt Summenproben hat, ist jenes Verfahren sehr gut. Indessen, nach Erlangung einer gewissen Übung im Ausrechnen der $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. kann man auch die Elimination mehr auf einmal machen, wie wir nun zeigen wollen:

Wir haben in § 25. S. 81 angenommen, dass die Endgleichungen von den Normalgleichungen durch Vermittlung der allmählich reduzierten Gleichungen (4) (5) (6) S. 81 erlangt werden. Obgleich alle hiebei vorkommenden Beträge von der Form $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$, $-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,c\,.\,1]}[b\,c\,.\,1]$ u. s. w. jedenfalls ausgerechnet werden müssen, kann man doch wenigstens das allmähliche Zusammensetzen dieser Beträge ersparen und durch eine Gesamtsummierung ersetzen, so dass von den Gleichungen (4) und (5) § 25. S. 81 immer nur die erste jeder Gruppe gebildet wird.

In gleicher Weise, wie $[l\,l\,.\,3]$ in (8) § 27. S. 85 in seine Bestandteile rückwärts zerlegt wurde, kann man dieses mit allen anderen Coefficienten thun, so zeigt z. B. ein Blick auf (4**) und (5**) § 28. S. 88:

$$[c\,l\,.\,2] = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l] - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1] \tag{1}$$

und nach diesem Beispiel ist folgendes Schema für 4 Unbekannte gebildet:

A	$[a\,a]$	$[a\,b]$	$[a\,c]$	$[a\,d]$	$[a\,l]$
α_2		$[b\,b]$	$[b\,c]$	$[b\,d]$	$[b\,l]$
α_1		$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$
B'		$[b\,b\,.\,1]$	$[b\,c\,.\,1]$	$[b\,d\,.\,1]$	$[b\,l\,.\,1]$
α_3			$[c\,c]$	$[c\,d]$	$[c\,l]$
α_2			$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l]$
β_1			$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,c\,.\,1]$	$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,d\,.\,1]$	$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]$
C''			$[c\,c\,.\,2]$	$[c\,d\,.\,2]$	$[c\,l\,.\,2]$
α_4				$[d\,d]$	$[d\,l]$
α_3				$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,l]$
β_2				$-\frac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,d\,.\,1]$	$-\frac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]$
γ_1				$-\frac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[c\,d\,.\,2]$	$-\frac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[c\,l\,.\,2]$
D'''				$[d\,d\,.\,3]$	$[d\,l\,.\,3]$