Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 32. Bildung der Endgleichungen ohne Zwischenglieder

Wenn einzelne Unbekannte z und t wie bei (7) und (8) nur in einem *Teil* der Fehlergleichungen vorkommen, so darf man für diese Partialgruppen von Fehlergleichungen reduzierte Fehlergleichungen von der Form (5) bilden und dann mit der Gesamtheit aller reduzierten Fehlergleichungen weiterrechnen, wie wenn es Originalfehlergleichungen wären.

Bei der Berechnung des mittleren Fehlers sind jedoch die anfänglich eliminierten Unbekannten (z und t) in der Zahl u aller Unbekannten mitzuzählen.

§ 32. Bildung der Endgleichungen ohne Zwischenglieder.

Die allmähliche Elimination, welche wir in § 25. durch die Gleichungen (4)—(7) S. 81 und durch das Zahlenbeispiel S. 82 gelehrt haben, reicht immer aus, und da man dabei Schritt für Schritt Summenproben hat, ist jenes Verfahren sehr gut. Indessen, nach Erlangung einer gewissen Übung im Ausrechnen der $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. kann man auch die Elimination mehr auf einmal machen, wie wir nun zeigen wollen:

Wir haben in § 25. S. 81 angenommen, dass die Endgleichungen von den Normalgleichungen durch Vermittlung der allmählich reduzierten Gleichungen (4) (5) (6) S. 81 erlangt werden. Obgleich alle hiebei vorkommenden Beträge von der Form $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$, $-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,c\,.\,1]}[b\,c\,.\,1]$ u. s. w. jedenfalls ausgerechnet werden müssen, kann man doch wenigstens das allmähliche Zusammensetzen dieser Beträge ersparen und durch eine Gesamtsummierung ersetzen, so dass von den Gleichungen (4) und (5) § 25. S. 81 immer nur die erste jeder Gruppe gebildet wird.

In gleicher Weise, wie $[l\,l\,.\,3]$ in (8) § 27. S. 85 in seine Bestandteile rückwärts zerlegt wurde, kann man dieses mit allen anderen Coefficienten thun, so zeigt z. B. ein Blick auf (4**) und (5**) § 28. S. 88:

$$[c\,l\,.\,2] = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l] - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1] \tag{1}$$

und nach diesem Beispiel ist folgendes Schema für 4 Unbekannte gebildet:

A	$[a\,a]$	$[a\,b]$	$[a\,c]$	$[a\,d]$	$[a\,l]$
α_2		$[b\,b]$	$[b\,c]$	$[b\,d]$	$[b\,l]$
α_1		$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$
B'		$[b\,b\,.\,1]$	$[b\,c\,.\,1]$	$[b\,d\,.\,1]$	$[b\,l\,.\,1]$
α_3			$[c\,c]$	$[c\,d]$	$[c\,l]$
α_2			$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l]$
β_1			$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,c\,.\,1]$	$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,d\,.\,1]$	$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]$
C''			$[c\,c\,.\,2]$	$[c\,d\,.\,2]$	$[c\,l\,.\,2]$
α_4				$[d\,d]$	$[d\,l]$
α_3				$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,l]$
β_2				$-\frac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,d\,.\,1]$	$-\frac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]$
γ_1				$-\frac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[c\,d\,.\,2]$	$-\frac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[c\,l\,.\,2]$
D'''				$[d\,d\,.\,3]$	$[d\,l\,.\,3]$

Nach diesem Schema ist im Folgenden das Zahlenbeispiel von § 25. S. 82 von 4 Gleichungen, nebst Summenproben und Fehlersummengliedern $[l\,l]$ u. s. w. nochmals behandelt, und zwar sind alle Beträge $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$ u. s. w. mit dem Rechenschieber berechnet, so dass keine Zahl mehr zu schreiben war, als hier hergesetzt ist.

	x a	y b	z c	t d	l	s	Probe
A	+ 459	− 308	− 389	+ 244	− 507	+ 501	
		+ 464	+ 408	− 269	+ 695	− 990	
		− 208	− 262	+ 164	− 341	+ 337	
B'		+ 256	+ 146	− 105	+ 354	− 653	− 2
			+ 676	− 331	+ 653	− 1017	
			− 330	+ 207	− 430	+ 425	
			− 83	+ 60	− 202	+ 373	
C''			+ 263	− 64	+ 21	− 219	+ 1
				+ 469	− 283	+ 170	
				− 130	+ 270	− 267	
				− 43	+ 145	− 268	
				− 15	+ 5	− 53	
$t = -\frac{+137}{+281} = -0,486$ D'''				+ 281	+ 137	− 418	0
					+ 1129	− 1687	
					− 560	+ 554	
					− 490	+ 902	
					− 2	+ 17	
					− 66	+ 203	
					+ 11	− 11	0

Die zwischen Horizontallinien stehenden Zahlen geben das Endgleichungssystem (10) § 25. S. 81.

Ob durch die vorstehende Eliminations-Anordnung ein rechnerischer Gewinn im Vergleich mit § 25. S. 82 erzielt wird, kommt namentlich auf die Zahl der Unbekannten an. Bei wenigen Unbekannten ist es nicht der Fall, dagegen bei zahlreichen Unbekannten ist diese Anordnung nützlich, wenn die Additionen mit wechselnden Zeichen bequem eingerichtet werden.

Diese Anordnung ist bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme im Gebrauch (mit Logarithmen), jedoch durchaus mit Subtraktion in Form von dekadischen Ergänzungen, so dass der Schluss obiger Tabelle so geschrieben wird:

+ 1129	× 8313
× 9440	554
× 9510	902
× 9998	17
× 9934	203
40011	× 9989
= 11	= − 11

Das kleine schiefe Kreuz × ist dabei Zeichen für dekadische Ergänzung, zum Beispiel: × 8313 = 8313 − 10000 = − 1687.

(Anmerkung. Die obenstehende Elimination, ebenso wie S. 82, ist nur mit dem gewöhnlichen Rechenschieber gemacht, weshalb die letzte Stelle nicht überall scharf ist.)