Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

Ph. Lötzbeyer

Darstellende Geometrie

mit Einschluß der

Perspektive

Als Anhang

Darstellende Geometrie des Geländes

Dresden
Verlag von L. Ehlermann

Grundlehren der darstellenden Geometrie

mit Einschluß der Perspektive

von

Dr. **Ph. Lötzbeyer**
Oberlehrer am Reformrealgymnasium II in Berlin-Wilmersdorf

Mit Anhang:

Darstellende Geometrie des Geländes

(Kotierte Projektion)

Dresden
Verlag von L. Ehlermann
1918

Dem für das Vaterland gefallenen Kameraden und Freunde

Prof. Dr. Julius Dronke

in treuem Gedenken.

Vorwort.

Das vorliegende Buch bildet den Abschluß des Lehrbuches der Mathematik für die Oberstufe der Realanstalten von Dronke-Lötzbeyer und dürfte da besonders in Betracht kommen, wo der darstellenden Geometrie und dem Linearzeichnen im Unterricht ein breiter Raum gewährt wird. Auswahl und Darbietung des Lehrstoffes sind indes so getroffen, daß das Buch auch an weiteren Anstalten, wie Techniken, Baugewerk- und anderen Fachschulen usw. Verwendung finden kann und sich auch für alle die besonders eignet, die eines ersten Führers in das Studium der verschiedenen Darstellungsverfahren bedürfen. Namentlich dürfte es sich auch für alle militärischen Bildungsanstalten eignen. Der heutige Offizier, besonders der der technischen Waffen, bedarf eines hohen Maßes von Anschauungskraft auf den verschiedensten Gebieten, wie Waffentechnik, militärischen Bauten, Topographie, Bildmeßkunst usw.

Wie kein anderes geometrisches Gebiet besitzt die darstellende Geometrie die Möglichkeit zur Ausbildung der Anschauung, die ja auch für den Praktiker so ungeheuer wichtig ist, und benötigt dabei in der vorliegenden Behandlung nur ganz weniger elementargeometrischer Vorkenntnisse. Dennoch hat sie zurzeit noch nicht das volle Bürgerrecht im Lehrstoff der höheren Schulen und muß vor der Hand noch vor weniger wertvollen Gebieten im Unterricht zurücktreten. Mit Recht betont man seit Jahren die Anwendungen im mathematischen Unterricht und sucht überall, oft nicht ohne große Künstelei — es ist nicht immer leicht in der reinen Mathematik — die Brücke ins praktische Leben zu schlagen. Bei der darstellenden Geometrie dagegen liegt ihr unmittelbarer Zusammenhang mit dem praktischen Leben klar zutage. Sie ist geradezu ein klassisches Beispiel aus neuerer Zeit, wie die praktischen Bedürfnisse des Lebens zur Wissenschaft führen, eine Tatsache, die dem Schüler nicht verborgen bleiben sollte. Und unsere Kriegszeit hat jedem Sehenden gezeigt, wie wertvoll die Förderung des praktischen Sinnes und die Ausstattung der Jugend mit so praktisch verwertbaren Kenntnissen ist, wie sie die darstellende Geometrie bietet. Weiter bildet sie die unmittelbare Grundlage zum Verständnis für so manche Gebiete wie Technik, Kartographie, Bildmeßkunst usf., und die Möglichkeit zu lehrreichen Streifzügen in das Gebiet ihrer zahlreichen Anwendungen, z. B. in der Geologie, der Baukunst, vor allem in das verwandte Gebiet der Malerei. Überall bietet sich reiche Gelegenheit für den Schüler zu selbständigen kleinen, freien Arbeiten und Vorträgen, für die einige ältere und neuere Bücher besondere Beachtung verdienen. Ich nenne das klassische Büchlein von Dürer, „Unterweisung der Messung", das durch die von Hans Thoma veranlaßte Neuausgabe weiteren Kreisen zugänglich geworden ist, weiter J. H. Lambert, „Freye Perspektive", H. E. Timerding, „Die Erziehung der Anschauung", ganz besonders auch G. Hauck, „Malerische Perspektive" (herausgegeben von Hedwig Hauck) mit den zahlreichen fesselnden Bemerkungen über ihre Beziehung zur Kunst und aus der letzten Zeit A. Wolff, „Mathematik und Malerei" (1916).

Im einzelnen sei folgendes bemerkt:

Die Darbietung ist eine streng systematische. So wird in der schiefen Parallelprojektion von der wirklichen Grundaufgabe, der Abbildung des Punktes, nicht wie vielfach sonst von der Abbildung von Tiefenstrecken oder gleich gar von Körpern ausgegangen und im Aufbau folgerichtig durchgeführt. Der hier eingeschlagene Weg hat sich nach meinen langjährigen Erfahrungen auch auf der Unterstufe sehr bewährt und führte am einfachsten und zwanglosesten zum Ziele.

Die Perspektive ist recht eingehend behandelt. Jeder, der sich mit ihr beschäftigt hat, weiß, wie befruchtend sie auf sein „Sehvermögen" gewirkt hat, wie sie ihm die Augen geöffnet für so vieles Schöne in Kunst und Natur.[1]) Ihre Kenntnis erleichtert das Zeichnen in der freien Natur (Anfertigen von Ansichtsskizzen). Kein Geringerer als Pestalozzi hat ihre Einführung in den Volksunterricht gefordert. Insbesondere eröffnet die Perspektive das Verständnis für eine der größten Kunstepochen aller Zeiten und ihre außerordentliche Bedeutung für die Entwicklung der Malerei und gleichzeitig auch für die mannigfachen Aufgaben, die die Kunst im Laufe der Zeiten bewegt haben und noch heute bewegen. Kein Lehrer soll sich die Gelegenheit entgehen lassen, dem Suchen und Forschen jener Zeit einige Stunden zu widmen. Der Unterricht kann auch so, nicht nur durch seinen wissenschaftlichen Ernst, humanistisch im wahrsten Sinne des Wortes gestaltet werden.

Durchweg ist bei den grundlegenden Aufgaben eingehender verweilt, dann führt der Weg schnell empor, und manches ist der Sprache des Zeichners, den Zeichnungen, überlassen, was sonst vieler Worte bedurft hätte.

Nirgends rächt sich oberflächliche Arbeit mehr als in der darstellenden Geometrie, wo sie zu mechanischem, sinnlosem Nachzeichnen führt. Drum soll man sich die herzlich wenigen elementaren mathematischen

---

[1]) Was sagt doch Goethe vom Sehen?
Was ist das Schwerste von allem?
Was dir das Leichteste dünkt:
Mit den Augen zu sehen,
Was vor den Augen dir liegt.

Überlegungen, die notwendig sind, nicht verdrießen lassen. Sie lohnen sich reichlich. Die Anschauung soll unterstützen, nicht aber das Denken überflüssig machen. Den Wert der deutschen Gründlichkeit hat ja unsere eiserne Zeit deutlich genug gezeigt. Zur Erleichterung des Verständnisses und zur Anregung sind die Flächen einzelner Körper, und zwar auf verschiedene Art, angelegt. Zur Hebung der Anschaulichkeit sind bei den Körpern verschiedene Töne verwandt. Diese Abtönung hat, um Mißverständnissen vorzubeugen, mit der Bestimmung von Helligkeitsgraden nichts zu tun.

Reiche Anregung für die Behandlung der Perspektive bot die bereits erwähnte „Malerische Perspektive" von Guido Hauck, die nicht nur überall den großen Pädagogen, sondern auch den kunstverständigen Gelehrten erkennen läßt.

Im Anhang ist ein Abriß der kotierten Projektion, besonders in Anwendung auf die Darstellung von Geländeflächen, gegeben.[1]) Die Notwendigkeit der Berücksichtigung dieses Verfahrens im Unterricht der höheren Lehranstalten ist mir während meiner langen Fronttätigkeit immer wieder zum Bewußtsein gekommen. Mathematischer und Zeichenunterricht müssen dabei vorzugsweise Hand in Hand gehen. Leider muß ich es mir versagen, einiges aus eignen Arbeiten über äußerst lehrreiche Anwendungen zu bringen, da sie in das Gebiet der angewandten Kriegsmathemathik gehören. Die Figuren 13a und 23 verdanke ich der Freundlichkeit des Kartographen Herrn E. Steinau.

Das vorliegende Buch war bereits vor dem Kriege im Druck und ist noch in den Fahnen von meinem hochverehrten Mitarbeiter und Freunde, Herrn Prof. Dr. Dronke, der schon im August 1914 im Osten an der Spitze seiner Kompagnie den Heldentod starb, durchgesehen worden. In den ruhigen Tagen an der Westfront 1915 konnte ich die Durchsicht fortsetzen und erst jetzt infolge meiner Kommandierung zur Artillerie-Prüfungskommission nach Berlin zu Ende führen. Habent sua fata libelli! Wenn deshalb kleine Versehen oder Unebenheiten unterlaufen sind, so bitte ich zu bedenken, daß im Kriege manches der Vollkommenheit entraten muß.

Bei der Auszeichnung einer Reihe von Figuren hat mich mein früherer Schüler, Herr cand. ing. Max Rudel in Berlin-Wilmersdorf, unterstützt. Ihm, wie auch Herrn Oberlehrer Dr. Werner Gaedecke, Berlin-Wilmersdorf, für seine Mithilfe bei der Durchsicht sage ich meinen innigsten Dank. Mein besonderer Dank gilt auch dem Verleger, Herrn Hofrat Dr. Ehlermann, für die unvergleichliche Geduld bei der Erledigung der Durchsicht. Seiner Anregung ist zum großen Teile die schöne innere Ausstattung zu danken.

Z. Zt. Berlin-Wilmersdorf im September 1917.

Dr. Lötzbeyer.

[1]) Zur Weiterbildung sei auf das empfehlenswerte Büchlein von R. Rothe „Darstellende Geometrie des Geländes" hingewiesen.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Dritter Abschnitt.

Schattenbestimmung der Parallelprojektion.

Zweiter Teil.

Perspektive (Zentralprojektion).

Erster Abschnitt.

Das Schnittverfahren.

Zweiter Abschnitt.

Das Fluchtpunktverfahren (freie Perspektive).

Dritter Abschnitt.

Schattenbestimmung der Perspektive.

Anhang.

Darstellende Geometrie des Geländes.

(Kotierte Projektion oder Zahlrißverfahren.)

Darstellung von Geländeflächen.

Allgemeines.

§ 1. Aufgabe und Bedeutung der darstellenden Geometrie. Zur Geschichte ihrer Entstehung.

Körperliche Gebilde können nicht unmittelbar wie ebene Gebilde durch Zeichnung in *einer* Ebene so dargestellt werden, daß ihre wahre Gestalt vollständig bestimmt ist (Grund?). Auch ist es nicht möglich, die *Konstruktionen der Stereometrie* ohne weiteres in *einer* Zeichenebene auszuführen. Man muß sich zunächst damit begnügen, sie im Geiste mit Hilfe der Vorstellungskraft auszuführen.

Die *darstellende Geometrie* lehrt nun, sowohl räumliche Gebilde durch gesetzmäßige Abbildungen in einer Ebene so darzustellen, daß ihre wahre Gestalt und gegenseitige Lage vollständig bestimmt ist, als auch alle im Raume auszuführenden Aufgaben durch entsprechende in einer Ebene zu lösen.

Dadurch ist sie für viele Zweige der Technik und Kunst von hervorragender praktischer Bedeutung. Denn sie gibt die Mittel an die Hand, einerseits bereits vorhandene Gegenstände, wie Bauwerke, Maschinen, Monumente usf. durch Zeichnungen genau und klar zur Darstellung zu bringen, anderseits von noch nicht vorhandenen genaue Pläne zu entwerfen, die als Grundlage für die spätere Ausführung dienen können.

So verdankt denn auch die darstellende Geometrie ihre Entstehung den rein praktischen Bedürfnissen des Handwerkers, Malers und Technikers. Die bei diesen gebräuchlichen Verfahren gesammelt und durch Verschmelzung zu einem Ganzen in ein wissenschaftliches Gewand gekleidet zu haben, ist das Verdienst des französischen Mathematikers *Gaspard Monge* (1746—1818). Durch das von ihm ausgebildete Grund- und Aufrißverfahren, das allerdings schon vor ihm bekannt war, hat er zuerst der Projektionslehre eine einheitliche Grundlage gegeben (s. § 24).

Wegen ihrer vielseitigen Anwendbarkeit in den technischen Wissenschaften wurden die Lehren der darstellenden Geometrie rasch bekannt. Sie wurden später erweitert und vertieft und gaben den Anstoß zur Entstehung der *Geometrie der Lage*.

G. *Monge* war zuerst Professor der Mathematik an der Genieschule zu *Mézières* und lehrte schon hier seine darstellende Geometrie, durfte aber darüber nichts veröffentlichen. Später wurde er Professor an der nach seinen Plänen eingerichteten École polytechnique, wo er seit 1795 seine Géométrie descriptive vortrug und in kurzer Zeit eine große Anzahl hervorragender Geometer und Ingenieure heranbildete. Monges Schüler (Poncelet, Plücker) waren es, die die projektive Geometrie begründeten. 1792 war er kurze Zeit Marineminister. Nach Napoleons Sturz, dessen Anhänger er war und den er auch nach Ägypten begleitet hatte, verlor er 1816 Amt und Würde.

§ 2. Das Projektionsverfahren (Abbildungsverfahren) und die verschiedenen Projektionsarten.

1 a) Die Natur zeigt am besten den Weg, räumliche Gebilde in einer Ebene darzustellen. Auf dem lotrecht stehenden Schirm B (Bildebene) entwerfen wir mit Hilfe der sehr kleinen (punktförmigen)

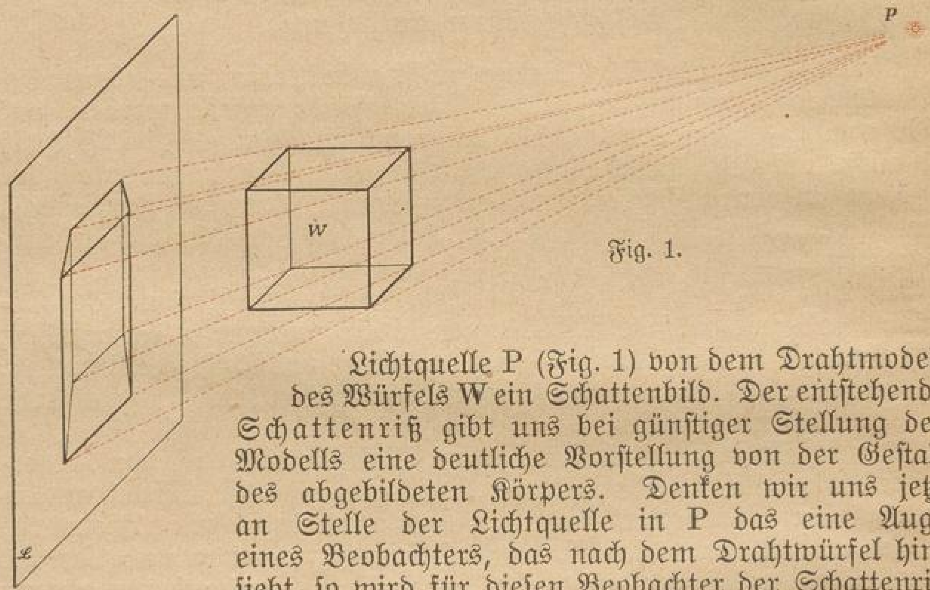


Fig. 1.

Lichtquelle P (Fig. 1) von dem Drahtmodell des Würfels W ein Schattenbild. Der entstehende Schattenriß gibt uns bei günstiger Stellung des Modells eine deutliche Vorstellung von der Gestalt des abgebildeten Körpers. Denken wir uns jetzt an Stelle der Lichtquelle in P das eine Auge eines Beobachters, das nach dem Drahtwürfel hinsieht, so wird für diesen Beobachter der Schattenriß durch den Körper vollständig verdeckt, da die Sehstrahlen, die von dem Auge nach den einzelnen Punkten des Körpers gehen, mit den Lichtstrahlen zusammenfallen. Das Bild ist demnach als die Gesamtheit der Schnittpunkte aller vom Auge in P nach allen Punkten des Gegenstandes gezogenen Sehstrahlen (des Sehstrahlenbündels) mit dem Schirm anzusehen. Wird jetzt das Schattenbild durch genaue Nachzeichnung festgehalten und dann der Körper weggenommen, so hat das in P befindliche Auge (annähernd) den Eindruck des ursprünglichen Körpers, der um so täuschender ist, je besser die Zeichnung in der Farbe gelungen ist. Die Zeichnung ist also als **Abbildung** des Körpers zu betrachten.

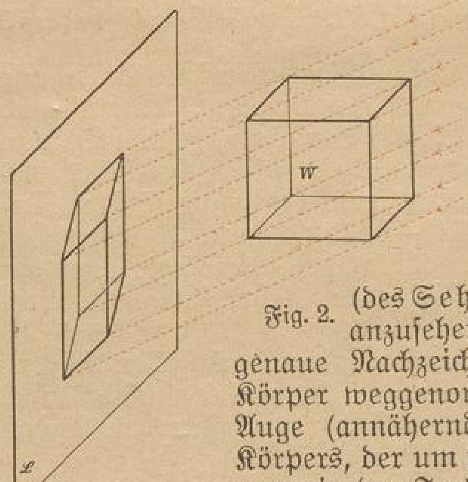


Fig. 2.

b) Entwerfen wir (Fig. 2) dagegen von dem Drahtwürfel mit Hilfe der Strahlen der Sonne, die wir wegen der ungeheuren Entfernung als parallel ansehen dürfen, ein Schattenbild, so zeigt uns dieses den Gegenstand niemals so, wie wir ihn sehen, da wir ja nie unser Auge in unendliche Entfernung bringen können. Dennoch ist auch ein durch parallele Strahlen erzeugtes Bild, das Parallelbild oder Parallelriß[1]) heißt, recht anschaulich und macht auf unser Auge einen befriedigenden Eindruck. Im Gegensatz dazu heißt das vorher entworfene Zentralbild oder Zentralriß, da es durch Strahlen, die von einem Punkte (Zentrum) ausgingen, erzeugt wurde.

Hätte man von einem festen, undurchsichtigen Würfel (statt wie vorher von dem Drahtwürfel) die Schattenbilder entworfen, so hätte man nur ein Bild des Körperumrisses erhalten, das keine deutliche Vorstellung ermöglichte. Deshalb bilden wir auch im folgenden von den darzustellenden Körpern wie vorher bei dem Drahtwürfel nur die Kanten und Eckpunkte, bei krummflächigen Körpern nur die Umrisse und wichtige Schnitte ab.

2a) Dem von der Natur gewiesenen Weg folgt die geometrische Abbildung durch **Projektion,** die als eine Nachbildung des Sehvorgangs unter vereinfachenden Annahmen anzusehen ist. Es sei 𝔅 (Fig. 3) eine feste Ebene und P ein außerhalb der Ebene gegebener fester Punkt. Ist nun A ein Punkt, der der Ebene 𝔅 nicht angehört, so besteht das **Verfahren der Projektion,** das Projizieren[2]) oder Abbilden, darin, daß man P mit A geradlinig verbindet und diese Verbindungslinie zum Schnitt mit der Ebene 𝔅 bringt. Den Schnittpunkt A′ nennt man die **Projektion (Riß[1]))** oder das **Bild** des Punktes A und sagt, der Punkt A ist von P auf die Ebene 𝔅 projiziert oder abgebildet worden. Der projizierende Strahl PA heißt der **Projektions-** oder **Sehstrahl,** P das **Projektionszentrum** (Aug- oder Sehpunkt) und 𝔅 die **Projektions-, Riß-** oder **Bildebene.**

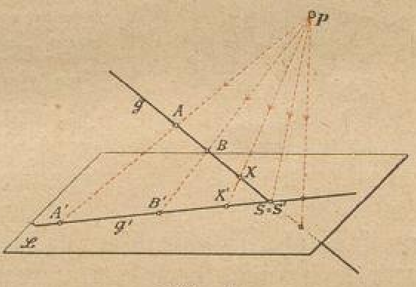


Fig. 3.

Alle Punkte, die auf dem Strahl PA liegen, haben dieselbe Projektion.

Die Projektion eines Punktes ist wieder ein Punkt.

b) Ist g eine durch A (Fig. 3) gehende Gerade, die 𝔅 im Punkte S, dem **Spurpunkt** der Geraden, durchstößt, und projizieren wir alle ihre Punkte von P auf 𝔅, so erhalten wir als Bild wieder eine Gerade g′. Denn die Gesamtheit aller Projektionsstrahlen (PA, PB ...) der Punkte von g liegt in der durch das Projektionszentrum und die Gerade g

[1]) Riß von reißen (Reißzeug!) vom mhd. rîzen = einritzen, verwunden, zeichnen.
[2]) Projizieren von proicere (lat.) = hinwerfen, entwerfen.

bestimmten Ebene, der sogenannten **projizierenden Ebene** oder **Sehebene** der Geraden g, die die Bildebene in der **Spur** g' durchdringt. Jedem Punkte X von g entspricht ein und nur ein Bildpunkt X'. Wie erhält man den Bildpunkt des „unendlich fernen Punktes" von g? Welcher Punkt von g fällt mit seinem Bildpunkte zusammen? Die Abbildung einer durch das Projektionszentrum gehenden Geraden ist ein Punkt (Grund?). Daraus folgt:

Die Projektion einer Geraden, die nicht durch das Projektionszentrum geht, ist wieder eine Gerade.

Demnach erhält man das Bild einer Strecke AB, indem man ihre Endpunkte projiziert und die Projektionen verbindet. Das Bild einer krummen Linie ergibt sich durch Abbildung einer Anzahl nahe beieinander liegender Punkte, die durch einen zusammenhängenden Kurvenzug zu verbinden sind.

Das Bild einer ebenen Figur findet man durch Projektion der sie begrenzenden Linien. Es ist im allgemeinen wieder eine ebene Figur. In welchem Falle schrumpft es zusammen auf eine Strecke? (Fig. 4.)

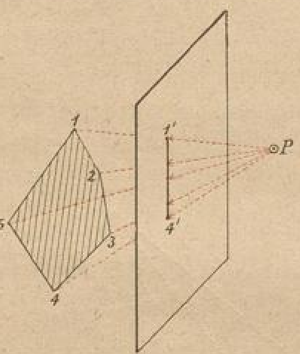


Fig. 4.

3 a) Das unter 2) behandelte Projektionsverfahren, bei dem das Projektionszentrum einen endlichen Abstand von der Bildebene hat, nennt man **Zentralprojektion** oder **Perspektive**[1]) und die durch sie erzeugten Bilder **Zentralbilder** oder **Perspektiven.**

b) Läßt man (Fig. 3) das Projektionszentrum P immer weiter in der Richtung A'A von der Bildebene wegrücken, so wird der von zwei Projektionsstrahlen (z. B. von PA und PB) gebildete Winkel immer kleiner. Liegt es unendlich fern, so sind die Projektionsstrahlen parallel (vgl. Fig. 5 u. 6). In diesem Falle spricht man von **Parallelprojektion.** Die Schattenbilder, die die Sonne liefert, sind ausgezeichnete Parallelprojektionen. Versuche mit Stäben und Drahtmodellen!

Bei der Parallelprojektion, die als Grenzfall der Zentralprojektion aufzufassen ist, unterscheidet man noch **schiefe (schräge)** und **gerade Parallelprojektion** oder **Normalprojektion,** je nachdem die Projektionsstrahlen zur Bildebene schief oder senkrecht stehen. Dementsprechend heißen auch die durch schiefe oder gerade Parallelprojektion gewonnenen Bilder **Schräg-** oder **Normalbilder.**

[1]) Die beiden Begriffe decken sich nicht vollständig. Mit Perspektive bezeichnet man im allgemeinen die Anwendungen der Gesetze der Zentralprojektion und spricht auch nur dann von einer perspektivischen Abbildung, wenn Gegenstand und Sehpunkt durch die Bildebene getrennt sind. Perspektive von perspicere (lat.) = hindurchsehen. Der Sinn des Wortes wird erst recht in § 28 klar.

Erster Teil.

Parallelprojektion.

§ 3. Hauptsätze der Parallelprojektion.

1) Aus den Anfangsgründen der Stereometrie ergeben sich einige wichtige Sätze, die sowohl für die schiefe als auch für die gerade Parallelprojektion von grundlegender Bedeutung sind.

Erklärung. **Strecken, Gerade oder ebene Figuren, die der Bildebene parallel sind, heißen frontal.**[1])

I. **Jede frontale Strecke hat ein paralleles und gleiches Bild.**

Zieht man (Fig. 5) durch alle Punkte der zur Bildebene 𝔅 parallelen Strecke AB die projizierenden Strahlen parallel einer beliebig gewählten Richtung, so schneidet die durch sie bestimmte projizierende Ebene 𝔈 die Bildebene 𝔅 in einer zu AB parallelen Spur A′B′ (L. I. § 71, 1), also ist $A'B' \parallel AB$. Da $AA' \parallel BB'$ ist, so ist AA′B′B ein Parallelogramm und daher auch $A'B' = AB$. Die Parallelprojektion einer Strecke auf eine zu ihr parallele Ebene kann demnach als eine Parallelverschiebung längs der Projektionsstrahlen der Endpunkte aufgefaßt werden.

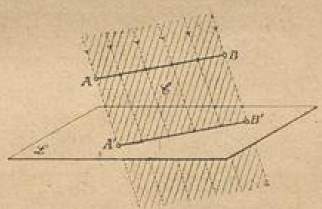


Fig. 5.

II. **Jede frontale ebene Figur hat ein ihr kongruentes Bild.**

Die Parallelprojektion A′B′C′D′E′ (Fig. 6) der zur Bildebene 𝔅 parallelen Figur ABCDE ist dieser kongruent (Beweis!). Man kann sich das Bild durch Parallelverschiebung der Figur ABCDE entstanden denken.

Welches Schrägbild hat ein frontaler Kreis?

2) Bezeichnet a′ die Projektion einer beliebigen Strecke a, so heißt das Verhältnis a′ : a ihr **Projektions-** oder **Abbildungsverhältnis.**

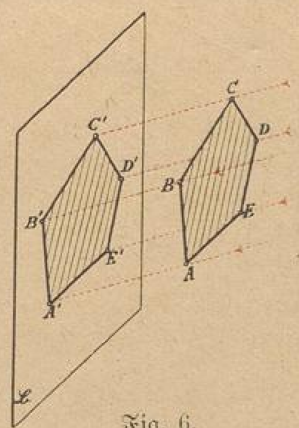


Fig. 6.

[1]) frons (lat.) = Stirn.

III. Parallele Strecken haben parallele Bilder von gleichem Projektionsverhältnis.

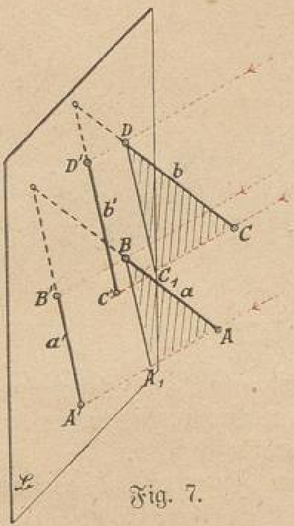


Fig. 7.

Sind $AB = a$ und $CD = b$ (Fig. 7) zwei parallele Strecken, so müssen auch ihre projizierenden Ebenen einander parallel sein (L. I. § 63, 4) und deshalb die Bildebene in parallelen Spuren schneiden (L. I. § 70, 1). Daher ist $A'B' \parallel C'D'$. Zieht man jetzt $BA_1 \parallel B'A'$ und $DC_1 \parallel D'C'$, so ist $\triangle ABA_1 \sim \triangle CDC_1$. Folglich verhält sich $\frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1D}{CD}$ oder, da $A_1B = A'B' = a'$ und $C_1D = C'D' = b'$ ist,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

Parallele Strecken werden also durch Parallelprojektion im gleichen Verhältnis gekürzt oder gestreckt. Was folgt daraus für die Bilder von parallelen Strecken von gleicher Länge? Vgl. die Schattenbilder der parallelen Stäbe von Zäunen.

Parallelogramme erscheinen in der Abbildung wieder als Parallelogramme.

Für die gerade Parellelprojektion ist

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \cos \varphi,$$

wo φ den Neigungswinkel der Strecken a und b zu der Bildebene bedeutet.

IV. Teilverhältnisse von Strecken bleiben bei Parallelprojektion erhalten.

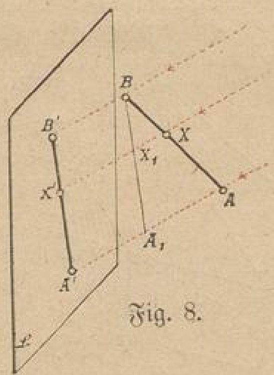


Fig. 8.

Denn wird (Fig. 8) die Strecke AB durch den Punkt X im Verhältnis m:n geteilt, so wird auch ihr Bild A'B' durch die Projektion X' des Teilpunktes im gleichen Verhältnis geteilt.

$$\frac{AX}{XB} = \frac{A'X'}{X'B'} = \frac{m}{n}.$$

Wird z. B. AB durch X halbiert, so wird auch A'B' durch X' halbiert.

Erster Abschnitt.

Schiefe Parallelprojektion.

(Parallelprojektion auf eine Tafel.)

§ 4. Bestimmung der Richtung der Projektionsstrahlen. Die erste Grundaufgabe.

1a) Für alle Darstellungen in schiefer Parallelprojektion benutzen wir als **Bildebene** B (Fig. 9) die lotrecht gehaltene Zeichenebene (Wandtafel!). Wir setzen ein für allemal fest, daß die Projektionsstrahlen von vorn und oben kommen und zwar im allgemeinen von rechts oben nach links unten verlaufen.

Die lotrecht stehende Bildebene B schneiden wir durch eine horizontale Ebene G, die im allgemeinen zur Aufnahme der darzustellenden Gebilde dient und daher **Grundebene** heißt. Ihre Schnittgerade OX mit der Bildebene heißt **Projektions-** oder **Bildachse.**

b) Von besonderer Bedeutung für unser Abbildungsverfahren sind die zur Bildebene senkrechten Geraden, die wir im folgenden zur

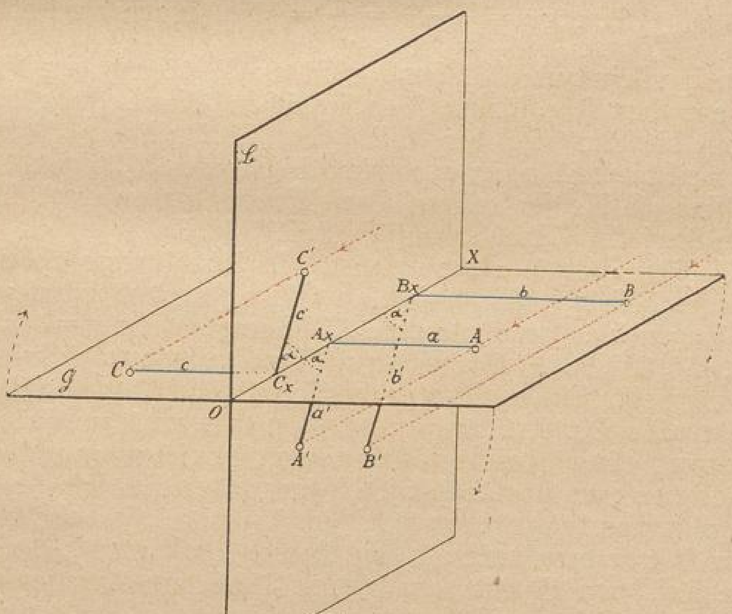


Fig. 9.

Abkürzung **Tiefenlinien** nennen. Es seien $AA_x = a$, $BB_x = b$ und $CC_x = c$ (Fig. 9) drei in der Grundebene gelegene Tiefenlinien, deren Fußpunkte auf der Bildachse entsprechend die Punkte A_x, B_x

und C_x sind. Projizieren wir nach Wahl irgend einer Projektionsrichtung die Strecken a, b und c auf die Bildebene, so sind nach § 3, S. III ihre Bilder a′, b′ und c′ parallel, schneiden also die Bildachse unter dem gleichen Winkel α, ferner haben sie das gleiche Projektionsverhältnis q ($a' : a = b' : b = c' : c = q$).

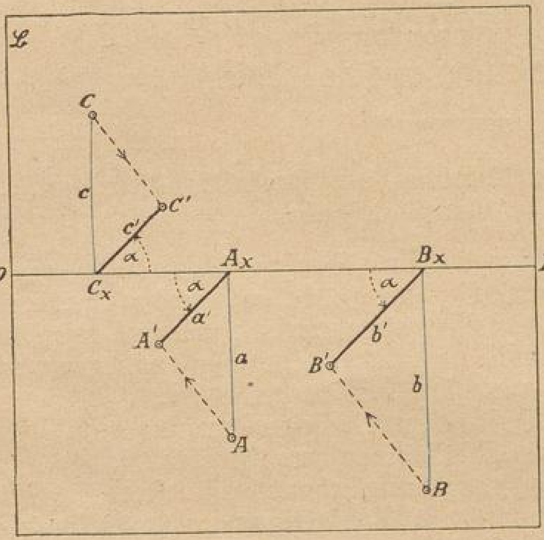


Fig. 10.

Die Angabe des Projektionsverhältnisses q und des Winkels α gibt uns das einfachste Mittel an die Hand, Schrägbilder ohne Benutzung der projizierenden Strahlen zu entwerfen, da durch q und α die Richtung der Projektionsstrahlen vollständig festgelegt ist. Durch q ist zunächst nur der Neigungswinkel φ bestimmt, unter dem die Projektionsstrahlen (z. B. AA′) die Bildebene treffen. Denn es ist z. B. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{A'A_x}{AA_x} = \frac{a'}{a} = q$[1]). (Warum reicht die Angabe von q allein zur Abbildung nicht aus?) Durch den Winkel α, in dem aus den Fig. 9 und 10 ersichtlichen Sinne gemessen, wird dann noch die Richtung der Bilder der Tiefenlinien eindeutig bestimmt, weil die verlängert gedachten Bildstrecken a′, b′ und c′ nichts anderes sind als die senkrechten Projektionen der durch A, B und C gehenden Projektionsstrahlen auf B (L. I. § 72, 3a).

Die Größen q und α nennt man die **Abbildungszahlen.** Man kann für sie beliebige Werte wählen. Der Zweckmäßigkeit und Einfachheit wegen bevorzugt man die Abbildungszahlen $q = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ und $\alpha = 30°, 45°, 60°, 90°$.[2]) Oft wird q als **Verkürzungsverhältnis** bezeichnet, da es meist kleiner als oder höchstens gleich 1 gewählt wird.

c) Für alle Darstellungen denken wir uns im folgenden, da wir nur eine Zeichenebene zur Verfügung haben, die Grundebene um die Achse OX samt den in ihr liegenden Figuren heruntergeklappt (s. Fig. 9 und 10), so daß der vordere Teil von G mit dem unteren von B und der hinter der Bildebene gelegene Teil von G mit dem oberen Teile von B zusammenfällt.

---

[1]) Für $\frac{a'}{a} = q = 1$ z. B. ist $\varphi = 45°$; für $\frac{a'}{a} = \frac{1}{2}$ ist $\varphi \approx 63{,}43°$.

[2]) Die Wahl dieser Winkel ist deswegen praktisch und bequem, weil sich dabei stets die gebräuchlichen rechtwinkligen Zeichendreiecke mit 30° und 60°, 45° und 45° verwenden lassen.

2 a) **Erste Grundaufgabe. Die schiefe Parallelprojektion eines in der Grundebene gelegenen Punktes A für die Abbildungszahlen q und α (z. B. $\frac{1}{2}$ und 45°) zu bestimmen.**

Wir fällen (Fig. 11) von A auf die Bildachse das Lot AA_x und ziehen unter einem Winkel von 45° zur Bildachse $A_x A' = \frac{1}{2} A_x A$. A′ ist dann das gesuchte Bild von A.

Man findet demnach das Schrägbild eines beliebigen in der Grundebene gelegenen Punktes A, indem man auf die Bildachse das Lot AA_x fällt und diese Strecke für die gegebenen Abbildungszahlen abbildet. Der Endpunkt A′ der Bildstrecke A_xA' ist das gesuchte Bild des Punktes A.

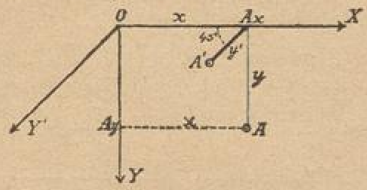


Fig. 11.

Die Abbildung mehrerer Punkte (Fig. 10), z. B. A, B und C, für dieselben Abbildungszahlen kann dadurch sehr vereinfacht werden, daß die Verbindungsstrecken von A, B und C mit ihren Bildern A′, B′ und C′ AA′, BB′, CC′ einander parallel sind (Grund?). Es braucht infolgedessen bei der Zeichnung nur für ein Achsenlot (AA_x) die Verkürzung bestimmt zu werden.

b) Statt unmittelbar durch seine Lage kann ein Punkt A auch durch seine senkrechten Abstände von einem rechtwinkligen Achsensystem (Koordinatensystem) gegeben sein (Fig. 11). Die Bildachse wählen wir als x-Achse und die in einem beliebigen Punkte O auf ihr in der Grundebene errichtete Senkrechte als y-Achse. $OA_x = x$ ist die Abszisse und $OA_y = A_xA = y$ die Ordinate des Punktes A, x und y sind seine Koordinaten.

Aufgabe. Bilde für $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$ die Punkte ab, deren Koordinaten sind
$$x = \pm 3;\ y = \pm 2{,}4 \text{ (Längeneinheit 1 cm).}$$

Wie bildet sich die y-Achse ab?

§ 5. Die Abbildung ebener, in der Grundebene gelegener oder ihr paralleler Figuren.

1) Aufgabe 1. Das Schrägbild eines in der Grundebene gelegenen Rechtecks ABCD, dessen Seite AB auf der Bildachse liegt, zu zeichnen (Fig. 12). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

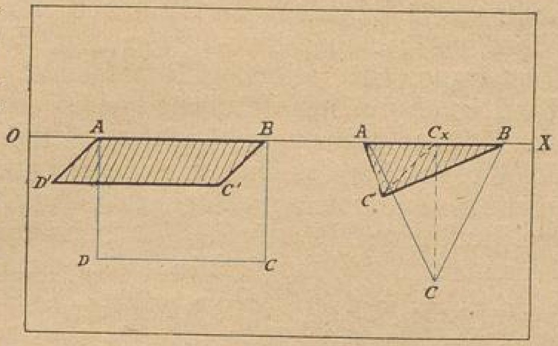


Fig. 12.

Die Seiten AB und CD bilden sich in natürlicher Größe ab, und zwar fällt AB mit seinem Bilde zusammen. Dagegen erscheinen die zur Bildebene senkrechten Strekken AD und BC im Bilde auf die Hälfte verkürzt und ihre Projektionen $A'C'$ und $B'D'$ bilden mit der Bildachse einen Winkel von 45°. Zeichnung!

Aufgabe 2. Das Schrägbild eines in der Grundebene gelegenen gleichschenkligen Dreiecks ABC, dessen Seite AB auf der Bildachse liegt, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Lösung s. Fig. 12.

Aufgabe 3. Das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden regelmäßigen Sechsecks zu zeichnen, von dem ein Seitenpaar der Bildachse parallel ist (Fig. 13). $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

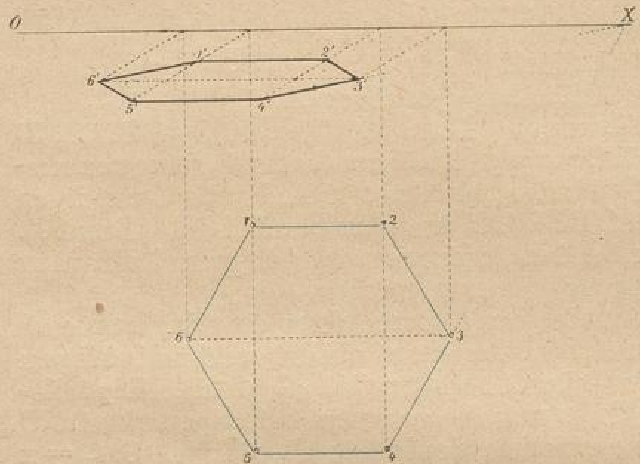


Fig. 13.

Wie bilden sich die frontalen Strecken $\overline{12}$, $\overline{54}$, $\overline{63}$ ab? Eine sehr scharfe Genauigkeitsprobe für die Zeichnung besteht darin, daß die Verlängerungen der Seiten der Urfigur und der ihrer zugehörigen Bilder (z. B. $\overline{43}$ und $\overline{4'3'}$) sich auf der Achse schneiden müssen. (Grund?) Vgl. § 20. 1b u. 2.)

Aufgabe 4. Das Schrägbild eines beliebig in der Grundebene gelegenen Fünfecks $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ zu zeichnen. Genauigkeitsprobe! (Vgl. Aufgabe 3.)

Aufgabe 5. Ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkte durch ihre Koordinaten gegeben sind, abzubilden. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

A: $x = 3$, $y = 2$; B: $x = 7$, $y = 4$; C: $x = 5$, $y = 6$. Längeneinheit 1 cm.

2) Das **Bild einer Kurve,** die in der Grundebene gelegen ist, erhält man dadurch, daß man auf ihr eine hinreichend große Anzahl aufeinander folgender Punkte wählt, sie nach der Grundaufgabe abbildet und die aufeinander folgenden Bildpunkte durch einen stetigen Kurvenzug aus freier Hand verbindet. Eine übergroße Zahl von Punkten abzubilden, ist unzweckmäßig. Denn mit Hilfe unseres Auges, das für den schönen und stetigen Verlauf einer Kurve außerordentlich empfindlich ist, können nahe beieinander liegende Punkte meist genauer verbunden werden, als es durch Einschaltung neu bestimmter Zwischenpunkte möglich ist. Beim Ausziehen des Bildes in Tusche bedient man sich eines Kurvenlineals.

Aufgabe 6. Das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden Kreises mit dem gegebenen Radius r, dessen Mittelpunkt M auf der Bildachse liegt, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Wir teilen den Durchmesser AB (Fig. 14), der mit seinem Bilde zusammenfällt, in eine Anzahl, etwa 8, gleiche Teile und ziehen in den Teilpunkten die zum Durchmesser senkrechten Sehnen. Ihre Endpunkte bilden wir in bekannter Weise ab und verbinden sie durch einen zusammenhängenden Kurvenzug. Das **Schrägbild des Kreises** heißt **Ellipse.** Sie ist die Schnittkurve des von sämtlichen Projektionsstrahlen gebildeten Zylindermantels mit der Bildebene, der diese oberhalb und unterhalb der Achse durchstößt. Erzeuge mit Drahtmodellen Schrägbilder von Kreisen! Beobachte die Schattenbilder von Rädern und die Sonnenbilder runder Öffnungen!

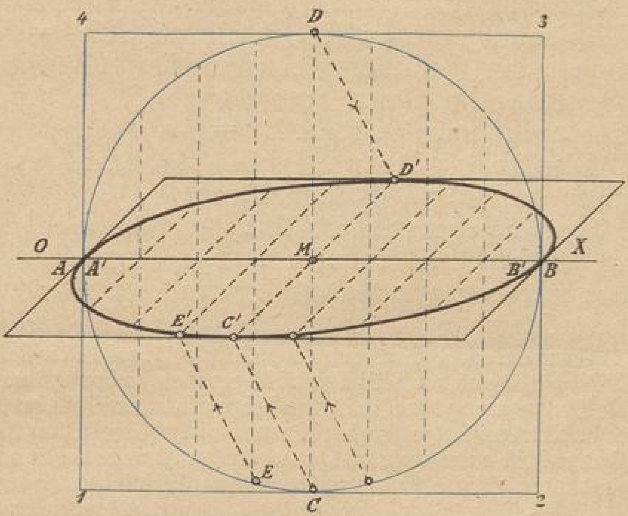


Fig. 14.

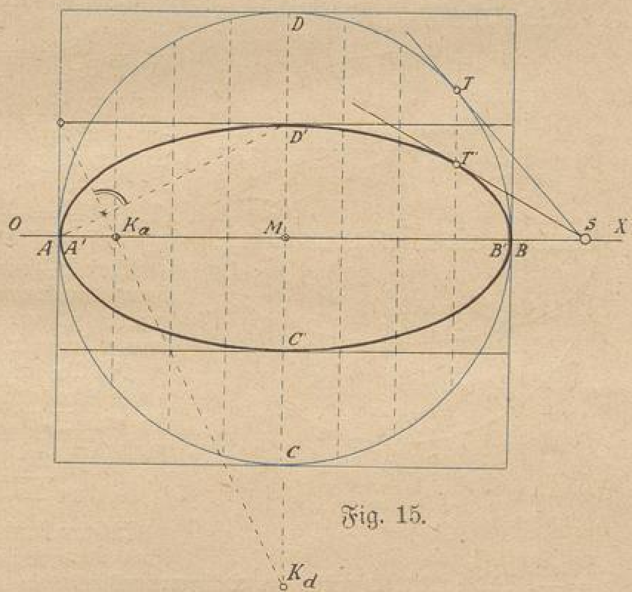


Fig. 15.

Für die Darstellung der Ellipse braucht nur der vor der Bildebene gelegene Halbkreis gezeichnet und abgebildet zu werden. Wie findet man daraus das Bild des hinter der Bildebene liegenden Halbkreises (s. § 3, S. III und IV)?

Um eine möglichst genaue Zeichnung der Ellipse zu erhalten, ist es nützlich, einige Tangenten in den Endpunkten der zueinander senkrechten Durchmesser AB und CD, die das Tangentenquadrat 1 2 3 4 bilden, mit abzubilden. Das ist auch wichtig, um die seitlich übergreifenden Bogenstücke bei A und B, die sogenannten Henkel, in schöner und genauer Form zu gewinnen. Dazu ist jedoch namentlich die Abbildung einiger weiterer Punkte bei A und B erforderlich.

Nach der Bemerkung in § 4, 2a) sind die Verbindungslinien der Kreispunkte mit ihren Bildern parallel (z. B. CC' ∥ EE'). Dadurch wird das fortgesetzte umständliche Teilen überflüssig.

Aufgabe 7. Es soll der in Aufg. 6 bezeichnete Kreis für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 90°$ abgebildet und die Tangente im Punkte T′ der Ellipse bestimmt werden (Fig. 15).

Wo müssen sich die Tangente des Kreises in T und die zugehörige Ellipsentangente in T′ schneiden? $A'B' = AB$ und $C'D'$ sind die Bilder der senkrechten Durchmesser AB und CD des Kreises. Da die Kurve zu ihnen symmetrisch ist, so heißen sie die Achsen der Ellipse, und zwar $A'B' = 2a$ die große (Hauptachse) und $C'D' = 2b$ die kleine Achse (Nebenachse). Hinsichtlich der Zeichnung der Kurve s. Anmerkung.

Das angegebene Abbildungsverfahren des Kreises ändert sich nicht, wenn der Kreis beliebig in der Grundebene liegt (Grund?). Man hat nur den zur Bildachse parallelen Durchmesser als Bildachse zu betrachten.

Anmerkung. Sind von einer Ellipse (Fig. 16) die beiden Achsen ($A'B' = 2a$ und $C'D' = 2b$) und der Mittelpunkt M gegeben, so benutzt man beim Ausziehen mit Vorteil die Krümmungskreise in den Endpunkten der Achse, den sogenannten Scheitelpunkten, d. h. die Kreise, die sich der Kurve in den Scheitelpunkten am innigsten anschmiegen. Dadurch ist man imstande, von der punktweise bestimmten und mit Bleistift vorgezeichneten Ellipse Kurvenstücke in den Scheiteln mit der Zirkelreißfeder auszuziehen.

Es sei (Fig. 16) k ein durch den Scheitel A′ gehender Kreis, dessen Mittelpunkt auf A′B′ liegt. Er schneide die Ellipse in den Punkten P′ und Q′, den Bildern der Punkte P und Q des um M mit a beschriebenen Kreises. Nach der Zeichnung der Ellipse ist dann

$$\text{(I)}\quad \frac{P'P_x}{PP_x} = q = \frac{D'M}{DM} = \frac{b}{a}.$$

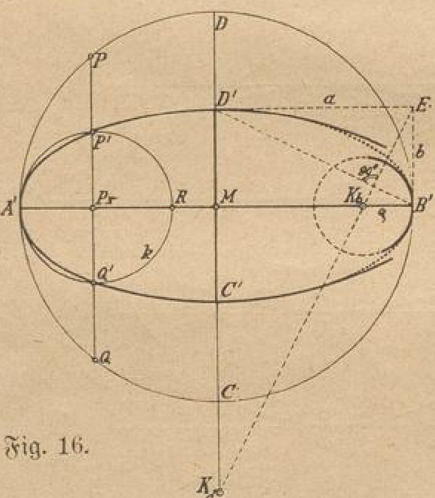


Fig. 16.

Ist R der zweite Schnittpunkt von K mit der großen Achse A′B′, so ergibt sich durch Anwendung des Sehnensatzes nach (I)

$$\text{(II)}\quad \frac{P_xR}{P_xB} = \frac{A'P_x \cdot P_xR}{A'P_x \cdot P_xB} = \frac{P_xP'^2}{P_xP^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Rückt P_x immer näher an den Scheitel A′ heran, so kommen auch die Punkte P′ und Q′ immer näher, und der Kreis k schmiegt sich immer inniger an die Ellipse in A′ an. Fällt endlich P_x mit A′ zusammen, so wird P_xR gleich dem doppelten „Krümmungsradius" 2ρ und P_xB' gleich $A'B' = 2a$. Mithin ist nach (II) $\frac{2\rho}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$ oder $\rho = \frac{b^2}{a}$.

Entsprechend findet man für den Radius der Krümmungskreise in C′ und D′ $r = \frac{a^2}{b}$. Die Mittelpunkte der Krümmungskreise in den Scheitelpunkten B′ und D′ erhält man gleichzeitig durch folgende einfache Konstruktion: Man vervollständige das rechtwinklige Dreieck MB′D′ zu dem Rechteck MB′ED′ und fälle von E das Lot auf B′D′, das MB′ in K_b und die Verlängerung von D′C′ in K_a trifft. Es ist dann $K_bB' = \rho$ und $K_aD' = r$. Beweis!

3) Denkt man sich eine in der Grundebene gelegene Figur, z. B. ein Fünfeck, samt der Grundebene parallel zu sich verschoben, so erhalten wir nach § 3, S. II stets ein kongruentes und gleichliegendes Bild. Das ist wichtig für die Abbildung der Grund- und Deckflächen von Prismen und Zylindern.

§ 6. Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. Die zweite Grundaufgabe.

1 a) Um die Lage eines Punktes im Raume festzulegen, wählen wir (Fig. 17) auf der wagerechten Achse unserer lotrechten Bildebene B einen beliebigen Punkt O und errichten in O auf der Bildachse sowohl in der Bildebene wie in der wagerechten Grundebene G die Senkrechte. So erhalten wir drei zueinander senkrechte Achsen, die als x= oder Breitenachse, y= oder Tiefenachse, z= oder Höhenachse unterschieden werden. Ihr Schnittpunkt O heißt **Null-** oder **Anfangspunkt** des rechtwinkligen Achsenkreuzes. Die drei Achsen bestimmen drei zueinander senkrechte Ebenen, die **Koordinatenebenen.** Durch diese Ebenen wird der ganze Raum in acht Fächer, Raumachtel, geteilt (Modell eines Raumachtels!). Um eine einfache Anschauung zu gewinnen, denken wir uns die in einer Fußbodenecke eines Zimmers zusammenstoßenden Flächen endlos erweitert. Die Fußbodenebene entspricht unserer Grundebene G oder der xy=Ebene, die lotrechten Wandflächen entsprechen unseren lotrechten Ebenen, und zwar ist die xz=Ebene unsere Bildebene (Frontebene) B, die yz=Ebene heißt Seitenebene, da ein auf der Grundebene vor B stehender Beschauer sie zur Seite hat.

Ist ein Punkt P in einem Raumachtel gegeben, so fällen wir auf die Koordinatenebenen die Lote $PP_1 = z$, $PP_2 = y$ und $PP_3 = x$. Diese Abstände des Punktes P von den Koordinatenebenen heißen die **Koordinaten** von P. Durch sie ist die Lage des Punktes P bestimmt. Denn ziehen wir P_1P_x senkrecht zu OX, so ist $OP_x = x$ und $P_1P_x = y$ (vgl. auch § 63, 4). Indes ist die Lage von P nur dann völlig bestimmt, wenn außer den Koordinaten x, y und z (z. B. 4; 3; 5) noch das Raumachtel angegeben ist, in dem P liegt. Wieviel Punkte gibt es, die dieselben Koordinaten haben?

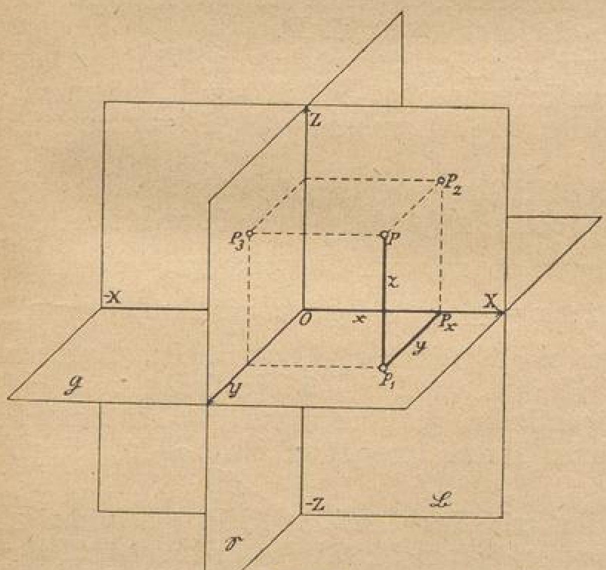


Fig. 17.

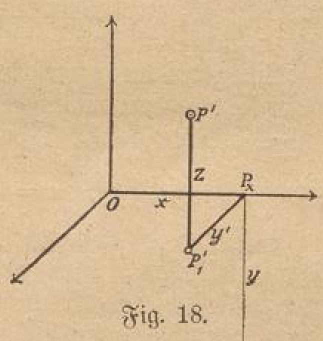


Fig. 18.

Um nun die Lage eines Punktes P lediglich durch die Angabe seiner Koordinaten zu bestimmen, wählen wir auf der x-Achse die Richtung OX, auf der y-Achse die Richtung OY und auf der z-Achse die nach oben gehende Richtung als die positive. Die entgegengesetzten Richtungen sind dann negativ. Wir gelangen dann zu dem Punkte P mit den Koordinaten $x = +2$, $y = +3$, $z = +2{,}5$ (Längeneinheit 1 cm), indem wir von O auf der x-Achse 2 cm in positiver Richtung bis P_x, dann parallel der positiven Richtung der y-Achse 3 cm bis P_1 und endlich parallel der positiven Richtung der z-Achse 2,5 cm bis P gehen, also dem Streckenzuge $OP_x P_1 P$ folgen. Die Lage des Punktes P ist eindeutig bestimmt. Wie gelangen wir zum Punkte Q mit den Koordinaten $x = -2$, $y = +3$, $z = -2{,}5$?

b) Für uns kommt im folgenden besonders der Fall in Betracht, daß der Punkt P durch seine senkrechte Projektion P_1 auf die Grundebene, den **Grundriß** von P (welche Koordinaten sind dadurch gegeben?) und durch seinen Abstand z von der Grundebene, der positiv oder negativ sein kann, gegeben ist.

Der Einfachheit halber stellen wir die abzubildenden Körper zumeist in das erste Raumachtel, für das die Achsenrichtungen sämtlich positiv sind.

2a) **Zweite Grundaufgabe. Das Schrägbild eines beliebigen Raumpunktes P zu bestimmen.**

Wir erhalten das Bild des Punktes P (Fig. 17 und 18), der durch seine Koordinaten x, y und z gegeben ist, indem wir das Bild des Streckenzuges $OP_x P_1 P$ bestimmen. P_1P bildet sich dabei in natürlicher Größe parallel der z-Achse ab (§ 3, S. I).

Ist P durch seinen Grundriß P_1 (Fig. 18) und seinen Abstand z von der Grundebene gegeben, so finden wir das Bild P′ von P, indem wir zunächst P_1 in bekannter Weise abbilden und dann $P_1'P' = z$ parallel zur z-Achse ziehen.

Wie gewinnt man aus der Abbildung des Punktes die Abbildung von Strecken und daraus die von Flächen und Körpern?

Aufgabe. Bilde die Punkte ab mit den Koordinaten

$$x = \pm 3;\; y = \pm 2;\; z = \pm 4 \text{ (Längeneinheit 1 cm).}$$

b) Nennen wir die zur x-Achse (Bildachse) parallelen Geraden **Breitenlinien**, die zur y-Achse parallelen **Tiefenlinien** und die zur z-Achse parallelen **Höhenlinien**, so können wir für die Darstellung von Körpern in schiefer Parallelprojektion die einfache Regel aufstellen:

Breiten- und Höhenlinien erscheinen auch im Bild als solche in natürlicher Größe, dagegen erscheinen die Tiefenlinien nach Maßgabe der Abbildungszahlen verkürzt und um ihren Schnittpunkt mit der Bildachse gedreht.

§ 7. Abbildung von Körpern und Körperschnitten.

1a) **Aufgabe 1.** Das Schrägbild eines auf der Grundebene ruhenden Würfels (Kantenlänge $a = 4$ cm), dessen Grundkante CD auf der Bildachse liegt, für die Abbildungszahlen $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$ zu zeichnen (Fig. 19).

Man bilde zunächst die Grundfläche für die gegebenen Abbildungszahlen und dann die Ecken der Deckfläche ab (Genauigkeitsproben!). Welche Seitenflächen des Würfels bilden sich in wahrer Größe ab? Was für Figuren sind die Bilder der anderen Flächen?

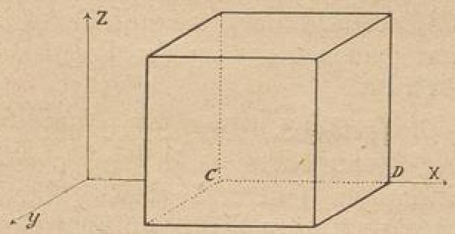


Fig. 19.

Sichtbarkeit. Betrachtet man den abzubildenden Würfel in der Richtung der Projektionsstrahlen (Sehstrahlen), so sind einzelne Kanten dem Auge nicht sichtbar. Die Bilder solcher dem Auge nicht sichtbaren Linien eines Körpers werden im folgenden punktiert oder auch weggelassen, dagegen die der sichtbaren gleichmäßig ausgezogen. Die Abbildungen gewinnen dadurch sehr an Anschaulichkeit.

Aufgabe 2. Den in Aufg. 1 bezeichneten Würfel auch für die Abbildungszahlen

	a)	b)	c)	d)
$q =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\alpha =$	30°	45°	90°	45°

darzustellen (Fig. 20).

Um die Wirkung auf das Auge beurteilen zu können, sind die Schrägbilder desselben Würfels für die gebräuchlichen, in Aufg. 2 gegebenen Abbildungszahlen nebeneinander gezeichnet. Der unschöne Eindruck, den

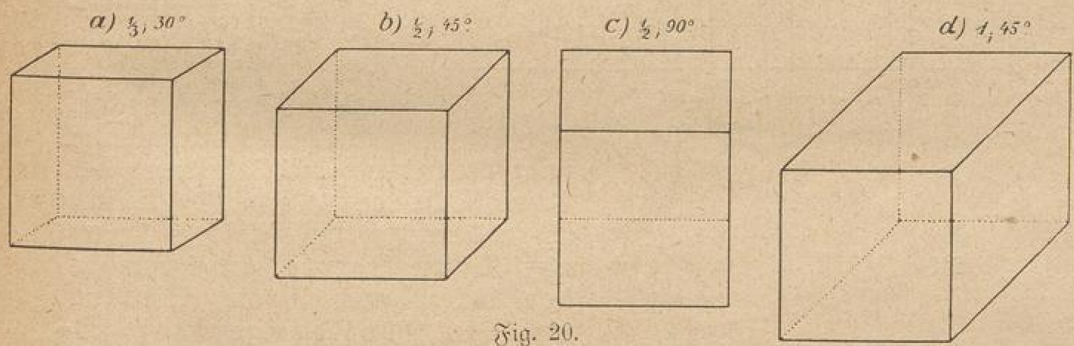


Fig. 20.

man z. B. im Falle Aufg. 2d) erhält, rührt daher, daß man das Bild nicht in der Richtung der Projektionsstrahlen betrachtet. Geschieht dieses in einiger Entfernung, so verschwindet für das Auge die Verzerrung, und das Bild wirkt richtig. Die Projektion mit den Werten $q = 1$ und $\alpha = 45^\circ$ ist unter dem Namen **Kavalierperspektive**[1]) bekannt, da sie seinerzeit den französischen

[1]) Der Name wird auch darauf zurückgeführt, daß die Projektion mit den Werten $q = 1$ und $\alpha = 45^\circ$ früher zur Anfertigung von Übersichtsplänen von Festungswerken benutzt wurde. Mit „Kavaliere" bezeichnet man die hohen Aufbauten bei den Festungswerken.

Kavalieren auf der Kriegsschule als die bequemste zur Anwendung empfohlen wurde. Für $q = 1$ und $\alpha = 90°$ erhält man die sogenannte **Militärperspektive**, die also den Grundriß in wahrer Gestalt liefert. Bei sehr steilem Einfallen der Projektionsstrahlen spricht man von **Vogelperspektive.**

Aufgabe 3. Das Schrägbild eines Würfels zu zeichnen, der so auf der Grundebene ruht, daß eine Diagonale seiner Grundfläche zur Bildachse senkrecht steht (Übereckstellung). a) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$; b) $q = 1$, $\alpha = 90°$ (Militärperspektive).

Aufgabe 4. Den Körper zu zeichnen, der aus einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm entsteht, wenn man die Ecken durch Schnitte, die durch die Mitten dreier in einer Ecke zusammenstoßender Kanten geführt werden, abschneidet. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$. (Kubooktaeder, Kristallform von Eisenkies).

Aufgabe 5. Ein auf der Grundebene stehendes gerades Prisma mit der Höhe h in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Die Grundfläche des Prismas sei ein beliebiges Fünfeck ABCDE, das nach Gestalt und Lage in Fig. 21 angegeben ist. Nach Abbildung der Grundfläche zieht man durch die Eckpunkte A'B'C'D'E' des Bildes die Parallelen zur z-Achse und trägt auf ihnen die gegebene Höhe h ab. Die Deckfläche ergibt sich danach durch Parallelverschiebung um die Höhe h nach oben.

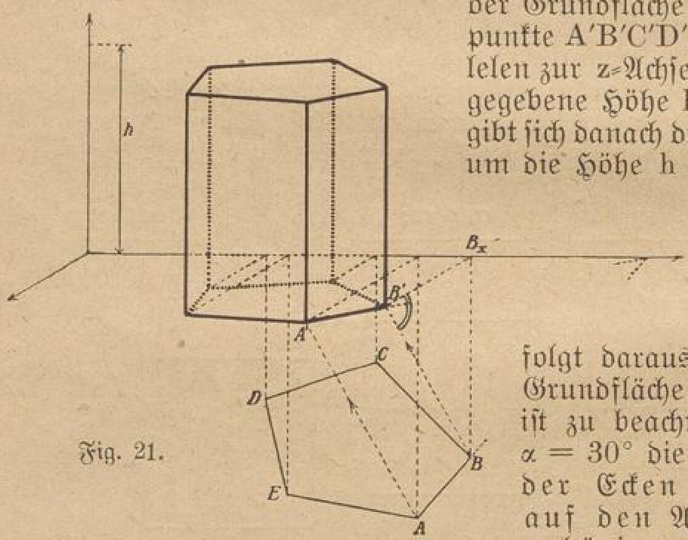
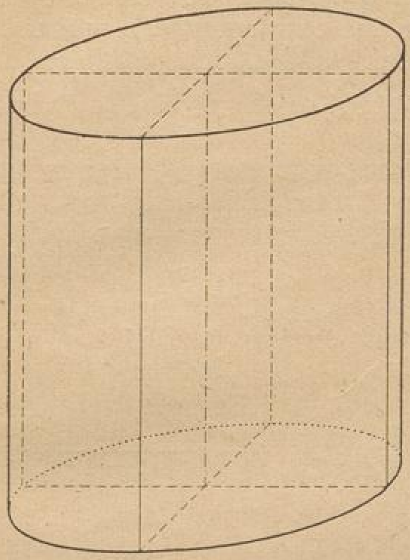


Fig. 21.

Die Grundseiten und ihre Bilder (z. B. AB und A'B') schneiden sich auf der Bildachse. Welche Vereinfachung folgt daraus für die Abbildung der Grundfläche des Körpers? Weiter ist zu beachten, daß für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30°$ die Verbindungsstrecken der Ecken mit ihren Bildern auf den Abbildungen der zugehörigen Tiefenlinien (30°-Linien) senkrecht stehen, z. B. $BB' \perp B'B_x$.

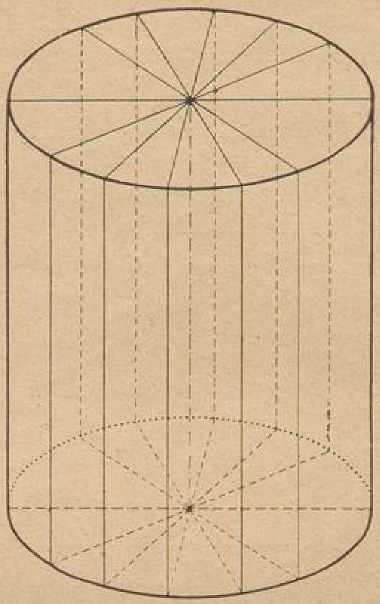
Aufgabe 6. Das Schrägbild eines auf der Grundebene stehenden geraden Zylinders von der Höhe h zu zeichnen. a) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45$, b) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 90°$ (Fig. 22 und 23).

Die Zylinderachse lassen wir der Einfachheit halber mit der z-Achse zusammenfallen. Die Grundfläche wird nach § 5, Aufg. 6 abgebildet. Die der Grundfläche parallele und kongruente Deckfläche ergibt sich wie beim Prisma durch Parallelverschiebung um die Höhe h. Die gemeinsamen Tangenten der Bilder der Grund- und Deckfläche des Zylinders bilden für den Mantel die Sichtbarkeitsgrenzen, die in Fig. 23 mit den Seitenlinien des in der Bildebene gelegenen Achsenschnittes (Frontalschnittes) zusammenfallen.



$(\frac{1}{2}, 45^\circ)$

Fig. 22.



$(\frac{1}{2}, 90^\circ)$

Fig. 23.

b) **Aufgabe 7.** Das Schrägbild einer auf der Grundebene stehenden Pyramide mit der Höhe h zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$.

Von der Pyramide (Fig. 24) ist außer der Höhe die Grundfläche nach Lage und Gestalt, ferner die senkrechte Projektion S_1 (Grundriß) der Spitze gegeben. Zeichnung!

Aufgabe 8. Einen geraden Kegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$ (vgl. Fig. 29).

c) **Aufgabe 9.** Ein regelmäßiges Oktaeder mit der Achsenlänge $l = 6$ cm in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen (Fig. 25). $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30^\circ$.

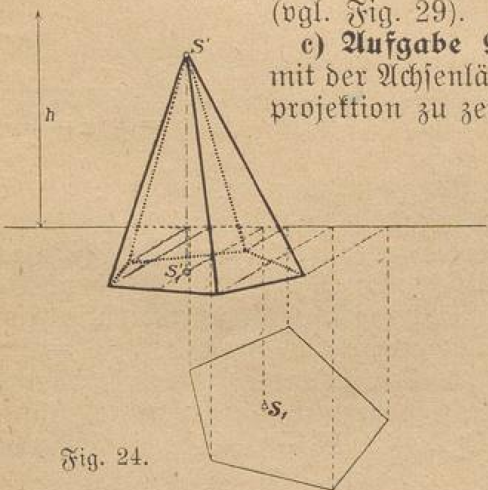


Fig. 24.

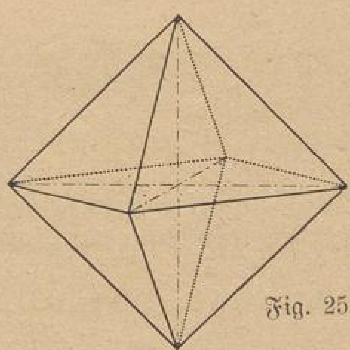


Fig. 25.

Der Einfachheit halber lassen wir die drei Achsen des Körpers mit den Achsen unseres Koordinatensystems zusammenfallen. Die Höhen- und Breitenachse erscheinen im Bilde in natürlicher Größe, während die Tiefenachse auf ein Drittel verkürzt wird (L. I. § 103).

Bilde den Körper auch ab, wenn die Kantenlänge $a = 4$ cm gegeben ist.

Aufgabe 10. Das Schrägbild eines Rhombendodekaeders zu zeichnen. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

Der Körper entsteht aus dem Würfel, indem auf die Seitenflächen regelmäßige vierseitige Pyramiden, deren Höhe gleich der halben Kantenlänge ist, aufgesetzt werden. Der Körper wird von 12 Rhom-

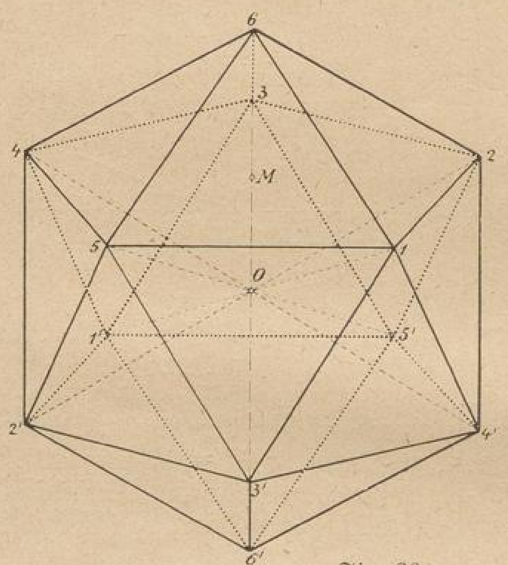


Fig. 26a.

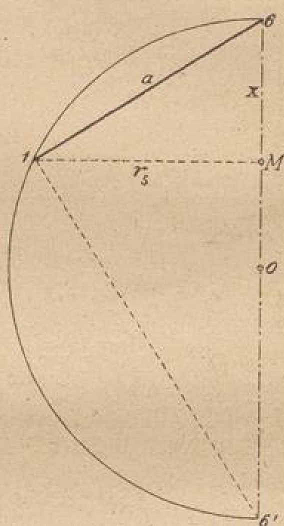


Fig. 26b.

ben begrenzt (Name!). Da der Granat diese Kristallform besitzt, heißt er auch Granatoeder.

Aufgabe 11. Das Schrägbild eines regelmäßigen Ikosaeders (Kantenlänge a), von dem die Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte (66′) auf der Grundebene senkrecht steht, zu zeichnen. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 90°$ (Fig. 26).

Nach einer kurzen Orientierung über den Bau des Körpers (L. I. § 104, 1) ergibt sich die folgende einfache Darstellung:

Bilde zunächst das zur Grundebene parallele regelmäßige Fünfeck 1 2 3 4 5 (Fig. 26a) mit dem Mittelpunkte M ab, ziehe $M6 = x$, wo x die Höhe der fünfseitigen Pyramide bezeichnet (Konstruktion in Fig. 26b), parallel der z-Achse und verlängere M 6 bis 6′, so daß $66' = 2r$, dem Durchmesser der Umkugel, wird. Nun halbiere 66′ und bestimme mit Hilfe des Mittelpunktes O die Gegenpunkte der Ecken des Fünfecks 1 2 3 4 5. $1'O = 1O$; $2'O = 2O$; ... (§ 3, S. IV). Löse die Aufgabe auch für $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

Aufgabe 11a. Ein regelmäßiges Ikosaeder ruht mit einer Seitenfläche so auf der Grundebene, daß die Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte der Bildebene parallel ist. Das Schrägbild zu entwerfen für $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$ (Fig. 27).

Wie muß man das Bild (Fig. 27) betrachten, wenn es richtig wirken soll?

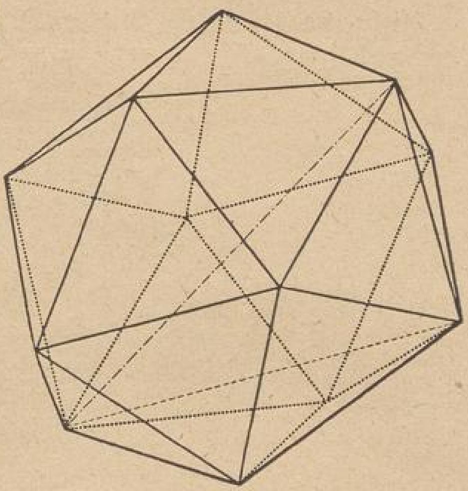


Fig. 27.

Aufgabe 12. Das Schrägbild eines regelmäßigen Dodekaeders (Kantenlänge a), das mit einer Seitenfläche beliebig auf der Grundebene ruht, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Die 20 Ecken des Körpers bilden zu je 5 die Ecken von 4 regelmäßigen Fünfecken, die im vorliegenden Falle der Grundebene parallel sind. Die Abbildung dieser Fünfecke liefert am schnellsten eine genaue Zeichnung. Zur Orientierung über den Körper s. L. I. § 105.

2) **Aufgabe 13.** Ein regelmäßig-sechsseitiges Prisma durch eine zur Bildebene senkrechte Ebene, deren Neigungswinkel mit der Grundebene 30° beträgt, zu schneiden (Fig. 28). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Zeichnung! Bestimme die Schnittfigur in wahrer Größe!

Aufgabe 14. Löse die entsprechende Aufgabe für einen geraden Zylinder (vgl. Fig. 30). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 90°$.

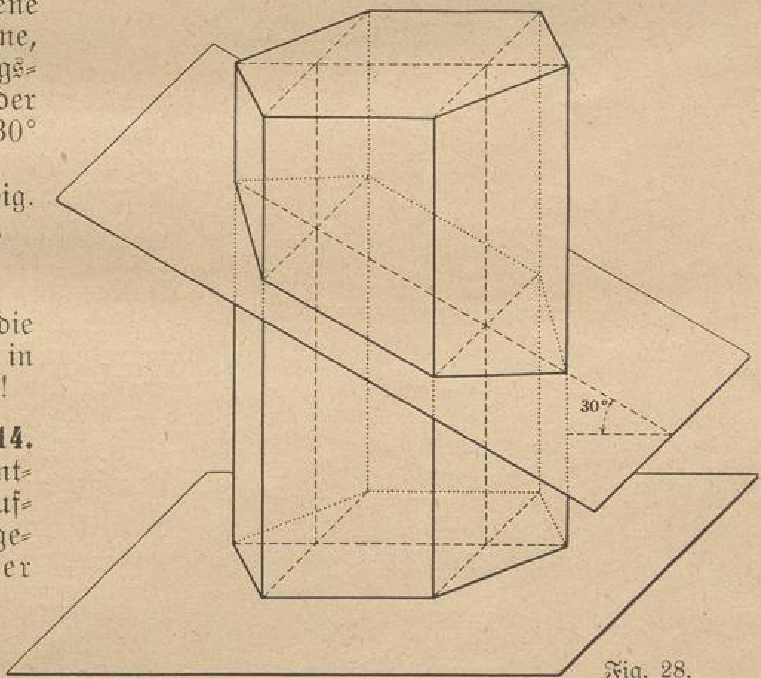


Fig. 28.

$(q = \frac{1}{2}, \alpha = 45°)$

Aufgabe 15. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide durch eine zur Bildebene senkrechte Ebene, deren Neigung zur Grundebene

$\varphi = 30^\circ$ beträgt, zu schneiden und die Schnittfigur in wahrer Größe zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^\circ$.

Aufgabe 16. Löse die entsprechende Aufgabe für einen geraden *Kegel* (Fig. 29). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$.

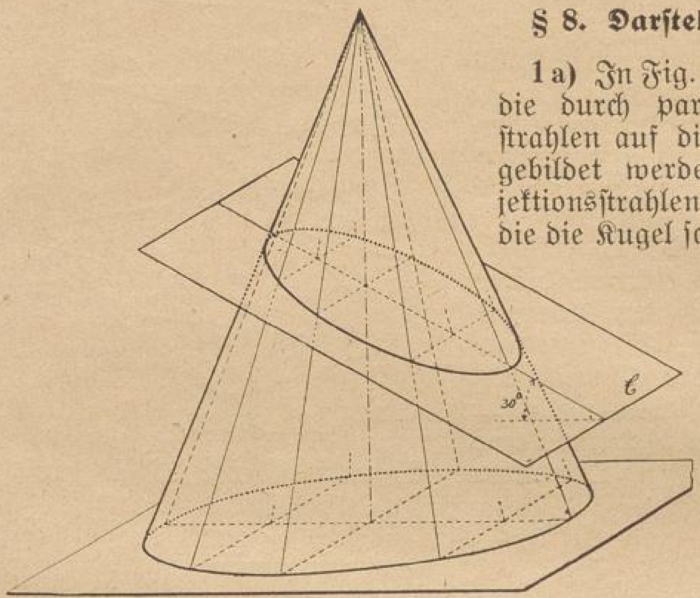


Fig. 29.

§ 8. Darstellung der Kugel.

1 a) In Fig. 30 sei O eine Kugel, die durch parallele Projektionsstrahlen auf die Bildebene B abgebildet werden soll. Die Projektionsstrahlen zerfallen in solche, die die Kugel schneiden, und solche, die sie berühren. Die berührenden Projektionsstrahlen bilden einen Strahlenzylinder (Berührungszylinder), der die Kugel in einem *Großkreise* u, dessen *Ebene auf den Projektionsstrahlen senkrecht* steht, berührt und die Bildebene in einer Kurve u', einer Ellipse, die nichts anderes als die Parallelprojektion des Großkreises u darstellt, durchdringt. Für ein Auge, das aus sehr großer Entfernung längs den Projektionsstrahlen hinsieht, wäre der *Großkreis* u der **wahre Umriß** des Körpers. Im Gegensatz dazu heißt sein Bild u' der **scheinbare Umriß** der Kugel. Dieser ist offenbar allein nicht imstande, in dem Beschauer den Eindruck einer Kugel hervorzurufen. Um dies zu erreichen, ist noch die Abbildung von wichtigen Schnitten erforderlich.

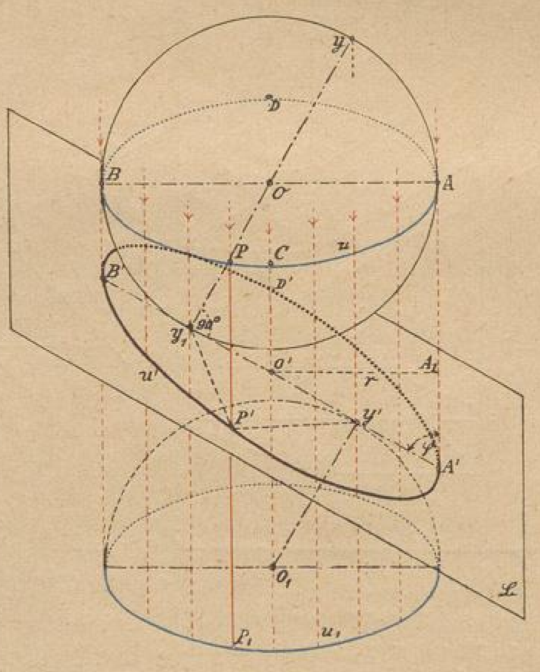


Fig. 30.

b) Um den Umrißkreis u (Fig. 30) abzubilden, beachten wir, daß der zur

Bildebene B parallele Durchmesser CD sich in wahrer Größe abbildet, also $C'D' = CD = 2r$. Dagegen erscheint der zu CD senkrechte Durchmesser AB im Bilde ($A'B'$) gestreckt und auch senkrecht zu $C'D'$. $A'B' = 2a$ wird die große und $C'D' = 2b$ die kleine Achse der Ellipse. Die halbe Länge der ersten ergibt sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $A'O'A_1$, von dem die Kathete $O'A_1 = r$ und der gegenüberliegende Winkel $O'A'A_1 = \varphi$, der Neigungswinkel der Bildstrahlen mit der Bildebene, der leicht bestimmt werden kann,[1]) bekannt sind. Denkt man sich die Kugel innerhalb des Tangentenzylinders verschoben, bis sie die Bildebene berührt, so wird diese auf $A'B'$ im Punkte Y_1 berührt. Der zur Bildebene senkrechte Durchmesser Y_1Y bildet sich auf $A'B'$ ab, und zwar als die Brennpunkte[2]) Y_1 und Y' der Umrißellipse. Das Umrißbild der Kugel ändert sich nicht, wenn diese innerhalb des Tangentenzylinders beliebig verschoben wird.

2) Aufgabe. Das Schrägbild einer Kugel zu zeichnen (Fig. 31). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

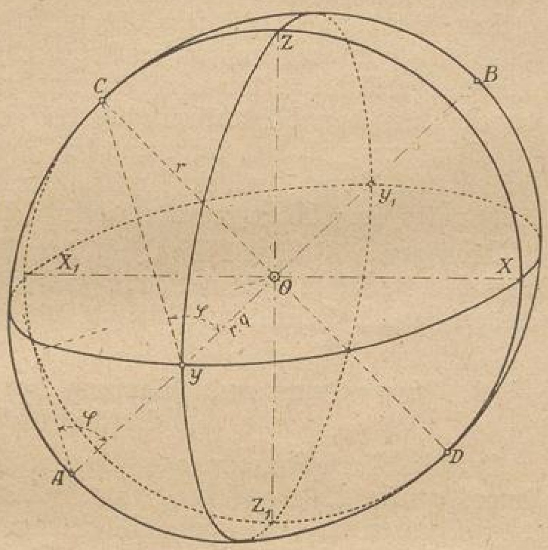


Fig. 31.

I. Als Nullpunkt unseres Koordinatensystems wählen wir den Mittelpunkt O der Kugel und bilden zunächst die in den drei Koordinatenebenen gelegenen Schnittkreise ab, von denen sich der Frontalkreis, das ist der in der Bildebene gelegene, in wahrer Größe abbildet. Die beiden anderen Schnittkreise erscheinen im Bild als Ellipsen, die zum Teil über den Frontalkreis hinausgreifen. Die große Achse der Umrißellipse liegt auf dem Bild YY_1 des zur Bildebene senkrechten Durchmessers, die kleine Achse ist gleich dem dazu senkrechten Durchmesser $CD = 2r$. Da $OC = r$ und $OY = r.q$, also $\sphericalangle CYO = \varphi$ ist, so findet man den Endpunkt A der halben großen Achse der Umrißellipse, indem man parallel zu CY

[1]) Ist z. B. $q = \frac{1}{2}$ gegeben, so ist $\cotg \varphi = \frac{A'A_1}{A_1O'} = \frac{1}{2}$, also, da $A_1O' = r$, $A'A_1 = \frac{1}{2}r$.

[2]) Der Nachweis, daß das Umrißbild u' der Kugel eine Ellipse mit den Brennpunkten Y' und Y_1 ist, ergibt sich leicht mit Hilfe der sog. Dandelinschen Kugeln O und O_1 (Fig. 30). Diese berühren die Bildebene in den Punkten Y_1 und Y' und den Tangentenzylinder in den Kreisen u und u_1, deren Ebenen zu dessen Achse senkrecht sind und deshalb überall den gleichen Abstand haben. Für einen beliebigen Punkt P' von u' ist daher $P'Y' + P'Y_1 = P'P_1 + P'P = PP_1$. Das Umrißbild u' hat daher die Eigenschaft, daß die Summe der Abstände eines jeden Punktes von den beiden Punkten Y' und Y_1, den Brennpunkten, fest ist, es ist also eine Ellipse (L. II. § 51, 2). $PP_1 = A'B'$, Beweis!

an den Frontalkreis die Tangente zieht, die die Verlängerung von OY in A trifft.

Um das erhaltene Bild noch anschaulicher zu gestalten, ist die Abbildung von Schnitten parallel zur Grundebene oder parallel zur Seitenebene erforderlich. Zu dem Zwecke teile man z. B. den in der z-Achse liegenden Durchmesser in 6 gleiche Teile, lege durch die Teilpunkte die zur Grundebene parallelen Schnitte und bilde sie samt den umgeschriebenen Quadraten ab. Die Bilder dieser Schnitte sind Ellipsen, die von der Umrißellipse sämtlich umschlossen werden. In der Fig. 31 sind sie der Deutlichkeit halber nicht gezeichnet.

II. Eine einfache und bei günstig gewählten Abbildungszahlen recht anschauliche Darstellung der Kugel ergibt sich auch, wenn man in gleicher Weise wie vorher eine hinreichend große Anzahl frontaler Schnitte abbildet, die sich wieder als Kreise darstellen. Die umhüllende Ellipse ist wieder der scheinbare Umriß der Kugel.

Das Bild der Kugel (Fig. 31) wirkt infolge der starken Verzerrung zunächst befremdend auf unser Auge. Doch ändert sich das sofort, wenn man die Bildebene lotrecht hält und in angemessener Entfernung in der Richtung der Sehstrahlen nach dem Bild hinsieht. Dann verschwindet die Verzerrung für das Auge und die Figur stellt mit täuschender Körperlichkeit eine Kugel dar, die Umrißellipse erscheint als Kreis, obgleich der Sehpunkt (Projektionszentrum) unendlich fern liegt.

Übungen. 1. Wie bildet sich der Umriß u der Kugel ab, wenn $\alpha = 90°$ wird? 2. In welchem Falle ist u' wieder ein Kreis? 3. Wie ändert sich die Gestalt des Umrißbildes, wenn $\sphericalangle\ \varphi$ immer kleiner wird?

§ 9. Anwendung und Wertung der schiefen Parallelprojektion. Geschichtliches.

1) Die Darstellungen der schiefen Parallelprojektion zeichnen sich durch große Anschaulichkeit aus. Neben den Breiten- und Höhenverhältnissen treten auch die Tiefenverhältnisse klar hervor. Sie eignet sich deshalb besonders zur Darstellung von Gegenständen, in deren Gestalt drei zueinander senkrechte Richtungen hervortreten. So bildet sie das einfachste Verfahren zum Zeichnen von Kristallformen, wobei man die Werte $q = \frac{1}{3}$ und $\alpha = 20°$ bevorzugt, zum Darstellen wissenschaftlicher und technischer Apparate (Physikbuch!), zum Skizzieren von Maschinenteilen und architektonischen Gegenständen, endlich zum Anfertigen der stereometrischen Figuren. Die Abbildung mit den Zahlen $q = 1$ und $\alpha = 45°$ (Kavalierperspektive) gestattet bei unverändertem Maßstab die unmittelbare Entnahme der Höhen-, Breiten- und Tiefenmaße. Sie wird deswegen häufig im Baufach zur Darstellung von Steinschnitten angewandt. Das unter dem Namen „Militärperspektive" bekannte Abbildungsverfahren wird benutzt zur Anfertigung von Festungs-, Stadt- und Lageplänen.

Den erwähnten Vorzügen steht, abgesehen von dem fehlerhaften Eindruck, den das Schrägbild besonders in gerader Ansicht auf das

Auge macht, ein Hauptmangel gegenüber. Die schiefe Parallelprojektion ist zur unmittelbaren Festlegung räumlicher Gebilde nicht einfach genug. Schon die Darstellung verhältnismäßig einfacher Körper erfordert das Hinzutreten der senkrechten Projektion. So ist z. B. in Aufg. 7, § 7 zur Darstellung der Pyramide in Wirklichkeit die senkrechte Projektion sowohl zur Grundebene (Grundriß) als auch zur Bildebene (Aufriß) gegeben. Weiter bietet die Darstellung von krummen Linien und Flächen Schwierigkeiten. Ein zur Grundfläche paralleler Kreis z. B. bildet sich bei schiefer Parallelprojektion als Ellipse ab, während er bei der senkrechten Projektion sich wieder als Kreis darstellt.

2) Die Anfänge der schiefen Parallelprojektion gehen, wie alte Stadt- und Befestigungspläne lehren, weit zurück. Schon die Darstellungen in den Gräbern der alten Ägypter zeigen die Gegenstände (z. B. eine Palastanlage) in einer Art Militärperspektive.[1])

Das bereits sehr früh benutzte Verfahren der schiefen Parallelprojektion wurde besonders durch J. H. Lambert (1728—1777) wissenschaftlich behandelt und bekanntgemacht. Im vorigen Jahrhundert ist das Verfahren der schiefen Parallelprojektion verallgemeinert und als besondere Darstellungsmethode („Axonometrie") begründet worden. Wählt man als Bildebene nicht, wie wir es bisher getan haben, eine lotrechte Ebene, sondern eine ganz beliebige schief gelegene Ebene, so erhält man die allgemeinste Form der schiefen Parallelprojektion.

Zweiter Abschnitt.

Gerade Parallelprojektion.

(Grund- und Aufrißverfahren).

§ 10. Allgemeines. Darstellung auf zwei Bildebenen.

1) Die gerade Parallelprojektion oder senkrechte Projektion[2]) ist als besonderer Fall der Parallelprojektion zu betrachten, bei der die Projektionsstrahlen die Bildebene unter einem rechten Winkel treffen. Deswegen gelten auch hier die in § 3 abgeleiteten Hauptsätze der Parallelprojektion. Die senkrechte Projektion hat den besonderen Vorzug, daß sie gestattet, Körper nach den drei Hauptrichtungen in gleichem Maßstabe abzubilden. Darauf beruht ihre große Bedeutung für Handwerk, Technik und Kunst.

[1]) Vgl. F. Schilling, Über Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie, 1904, S. 147.

[2]) Wenn im zweiten Abschnitt von Projektion oder Projizieren schlechthin gesprochen wird, so ist stets die senkrechte (orthogonale = rechtwinklige) Projektion gemeint.

2a) Projizieren wir einen einfachen Körper, z. B. einen Quader (Fig. 32), auf eine zu seiner Grundfläche parallele Ebene B_1, so erhalten wir als seine Projektion das Rechteck Q_1, durch das die Ausmessungen des Körpers nur nach der Breite und Tiefe bestimmt sind. Um auch die Höhe in der einfachsten Weise festzulegen, projizieren wir den Körper noch auf eine zweite Ebene B_2 parallel der Breiten- und Höhenrichtung, so daß die Höhe sich in wahrer Größe darstellt (Fig. 32). Durch Hinzutreten der zweiten Projektion Q_2 sind Gestalt und Ausmessungen des Körpers bestimmt. Wie wir im folgenden sehen werden, genügt im allgemeinen zur vollständigen Darstellung (Festlegung) eines Körpers die Projektion auf zwei Ebenen.

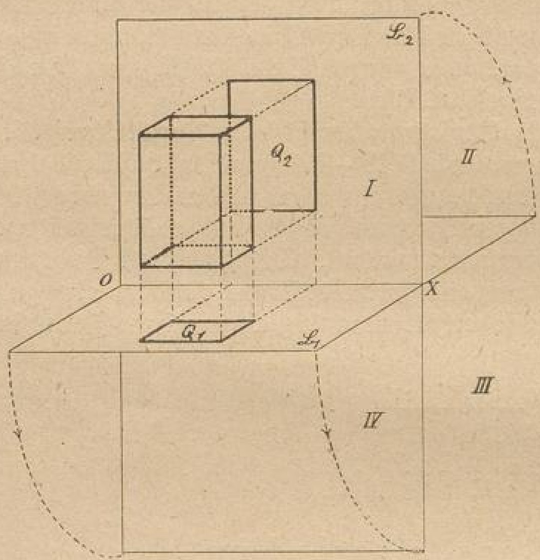


Fig. 32.

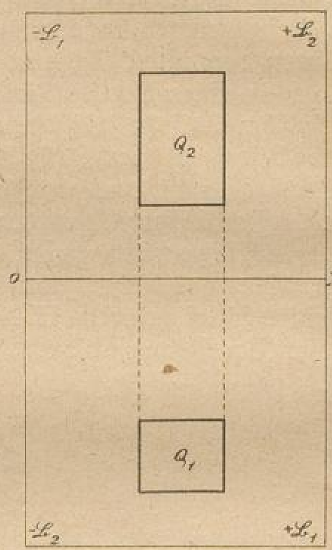


Fig. 33.

Die **erste Bildebene** B_1 (Fig. 32) oder **erste Tafel** wählt man wagerecht, die **zweite Bildebene** B_2 oder **zweite Tafel** lotrecht zu B_1. Die Ebene B_1 heißt auch **Grund-** oder **Grundrißebene;** die Ebene B_2, die unserer Bildebene bei der schiefen Parallelprojektion entspricht, **Aufrißebene.** Dementsprechend heißen die Projektionen eines Gebildes auf diese Ebenen **Grundriß** oder **erste Projektion** (Q_1) und **Aufriß** oder **zweite Projektion** (Q_2). Die Schnittgerade OX der beiden Bildebenen wird als **Bild-** oder **x-Achse** bezeichnet.

b) Denken wir uns (Fig. 32) die Bildebenen B_1 und B_2 unbegrenzt erweitert, so teilen sie den Raum in vier Teilräume (Raumviertel oder Quadranten) I, II, III und IV. Als Aufrißebene betrachten wir stets die lotrecht vor uns gehaltene Zeichenebene. Dann bezeichnen wir den vorderen oberen Teilraum als I. Raumviertel, den hinter B_2 gelegenen oberen als II. Raumviertel usw. Der Einfachheit halber nehmen wir die darzustellenden Gebilde im allgemeinen im I. Teilraum an.

c) Um mit einer Zeichenebene auszukommen, denkt man die erste Bildebene (Fig. 33) um die Achse in der durch die Pfeile angegebenen Richtung um 90° gedreht. Dadurch fällt der vordere Teil der Grundrißebene mit dem unteren Teile der Aufrißebene zusammen, während der hinter B_2 gelegene Teil der Grundrißebene mit dem oberen Teil von B_1 zur Deckung kommt. Von dem in Fig. 32 samt seinen senkrechten Projektionen im Schrägbilde gezeichneten Quader erhalten wir nach Vereinigung beider Bildebenen die in Fig. 33 gegebene Darstellung.

Es ist dauernd zu beachten, daß die Vereinigung der beiden Bildebenen lediglich den Zweck hat, die Darstellung auf einer einzigen Zeichenebene zu ermöglichen. Für die Ausführung hat man sich daher die beiden Ebenen stets in ihrer rechtwinkligen Verbindung zu denken.

Bei Darstellung von Gebilden im ersten Raumviertel (Fig. 32) braucht man nur die vordere Hälfte der Grundrißebene und die obere der Aufrißebene in Betracht zu ziehen. Nach Vereinigung der Bildebene trennt die Achse („trennende Achse") Grundriß und Aufriß; das über der Achse gelegene Feld ist Aufrißebene, das darunter liegende Grundrißebene.

§ 11. Darstellung des Punktes.

1) Sind in Fig. 34 B_1 und B_2 die beiden zueinander senkrechten Bildebenen und ist P ein beliebiger Punkt im I. Raumviertel, so sind die Fußpunkte P_1 und P_2 der von P auf die Bildebenen gefällten Lote die Projektionen von P. P_1 ist sein Grundriß oder seine erste Projektion, P_2 sein Aufriß oder seine zweite Projektion. Den Abstand $PP_1 = z$ des Punktes P von B_1 nennen wir seinen **ersten Tafelabstand** oder Höhenabstand, entsprechend $PP_2 = y$ seinen **zweiten Tafelabstand** oder Tiefenabstand. Die durch die Tafelabstände PP_1 und PP_2 bestimmte Ebene steht auf beiden Bildebenen senkrecht (L. I. § 72, 3), ist mithin auch senkrecht zu ihrer Schnittgeraden, der Bildachse OX. Ist P_x der Schnittpunkt der Ebene mit der Achse, so sind demnach P_1P_x und P_2P_x senkrecht zur Achse OX (L. I. § 67, 1), d. h. die Lote von Grund- und Aufriß eines Punktes auf die Bildachse haben denselben Fußpunkt.

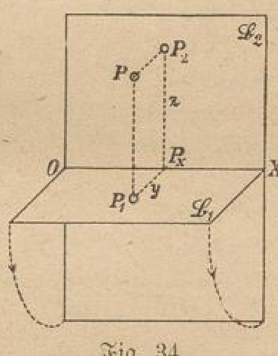


Fig. 34.

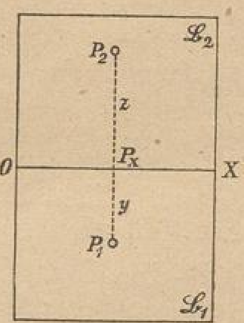


Fig. 35.

Das Viereck $PP_1P_xP_2$ (Fig. 34) ist ein Rechteck. In diesem ist $P_2P_x = PP_1 = z$ und $P_1P_x = PP_2 = y$.

Der erste Tafelabstand eines Punktes ist also gleich dem Abstand seines Aufrisses von der Bildachse und der zweite Tafelabstand gleich dem Abstand seines Grundrisses von der Bildachse.

2) Wird die Grundebene in der früher angegebenen und auch aus der Fig. 34 ersichtlichen Weise in die Aufrißebene heruntergeklappt (Fig. 35), so fallen nach 1) die Lote P_1P_x und P_2P_x in eine Gerade. Wir erhalten damit den einfachen, aber sehr wichtigen Satz:

Grund- und Aufriß eines Punktes liegen stets auf einer Senkrechten zur Achse.

Umgekehrt können nur dann je ein Punkt der ersten und zweiten Bildebene die Bilder eines und desselben Raumpunktes sein, wenn ihre Lote auf die Bildachse denselben Fußpunkt haben.

3) Übungen. a) Warum ist ein Punkt des Raumes durch seine Projektion auf eine feste Ebene nicht bestimmt? Welche Angaben wären noch erforderlich, um seine Lage völlig zu bestimmen?

b) Wie liegen (Fig. 36 und 37) Grund- und Aufriß zur Bildachse, wenn der abzubildende Punkt 1. im I.; 2. im II.; 3. im III.; 4. im IV. Raumviertel liegt?

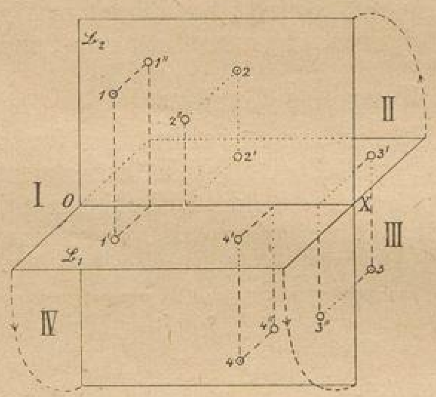


Fig. 36.

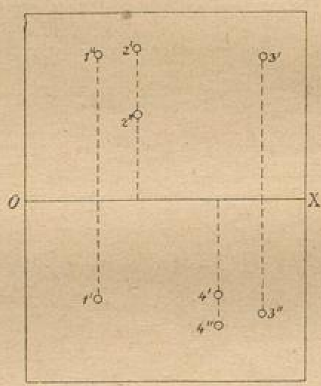


Fig. 37.

c) Wo liegt P, wenn 1. sein Grundriß P_1; 2. sein Aufriß P_2 auf der Bildachse liegt?

d) Wo liegt P, wenn sein Grund- und Aufriß den gleichen Abstand von der Achse haben? (Halbierungsebene; zwei Möglichkeiten!)

e) Wo liegt P, wenn sein Grund- und Aufriß 1. über der Achse; 2. unter der Achse zusammenfallen? (Vgl. d.)

§ 12. Darstellung der Geraden.

1 a) Projizieren wir (Fig. 38) die Gerade g, die B_1 im Punkte G und B_2 im Punkte A durchstößt, auf die beiden Bildebenen, so erhalten wir als ihre erste Projektion (Grundriß) die Gerade g_1, als zweite Projektion (Aufriß) g_2. Die Projektionen einer Geraden sind im allgemeinen wieder Gerade. Denn sie ergeben sich als Schnittgerade der projizierenden Ebenen, die die Gesamtheit aller projizierenden Lote umfassen, mit den Bildebenen. Aus ihren Projektionen g_1 und

g_2 ergibt sich umgekehrt die ursprüngliche Gerade g als Schnitt der durch g_1 und g_2 zu den zugehörigen Bildebenen gelegten Normalebenen.

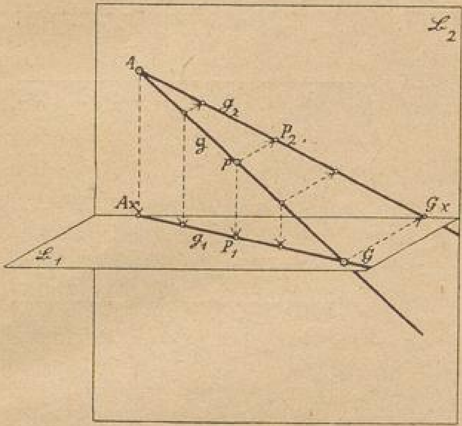


Fig. 38.

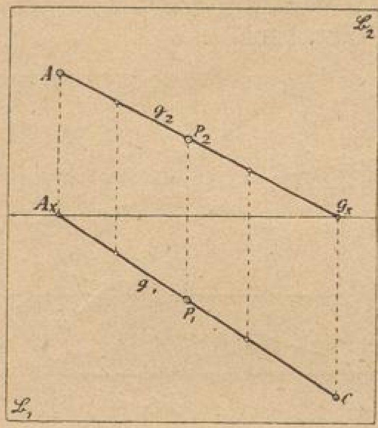


Fig. 39.

Nach Vereinigung der Grundebene mit der Bildebene gewinnen wir für die Gerade g (Fig. 38) die in Fig. 39 gegebene Darstellung. Die Bilder desselben Punktes P liegen auf einer Senkrechten zur Achse ($P_1P_2 \perp OX$).

b) Der Punkt G, in dem g die Grundrißebene durchstößt, heißt die **erste Spur** oder **Grundrißspur** der Geraden, entsprechend der Punkt A ihre **zweite Spur** oder **Aufrißspur.** Jeder dieser Spurpunkte fällt mit seiner gleichnamigen Projektion zusammen, z. B. G mit seiner ersten Projektion G_1. Die zweite Projektion G_x von G liegt auf der Achse, ebenso die erste A_x von A. Die Grundrißspur G der Geraden g liegt daher (Fig. 38 und 39) senkrecht unter (oder über) dem Schnittpunkte G_x ihrer zweiten Projektion g_2 mit der Achse; ihre Aufrißspur dagegen senkrecht über (oder unter) dem Schnittpunkte A_x ihrer ersten Projektion g_1 mit der Achse. Löse danach die

Aufgabe 1. Die Spuren einer durch ihre Projektionen g_1 und g_2 gegebenen Geraden zu bestimmen (Fig. 38).

Umgekehrt sind durch die Spuren G und A einer Geraden g auch ihre Projektionen g_1 und g_2 bestimmt.

Aufgabe 2. Gegeben sind die Spuren G und A einer Geraden g. Ihre Projektionen g_1 und g_2 zu finden.

Man lote (Fig. 39) die Spuren auf die Achse und verbinde den Fußpunkt A_x des Lotes von A mit G und den Fußpunkt G_x des Lotes von G mit A.

2) Gerade in besonderer Lage zu den Bildebenen.

Bei den folgenden in besonderer Lage befindlichen Geraden sind die Spuren zu bestimmen oder ihre Lage anzugeben. Zur Erleichterung der Anschauung und des Verständnisses ist stets zuerst ein Schrägbild anzufertigen.

a) g iſt ſchief zu beiden Bildebenen und durchſtößt $\mathfrak{B}_1$ hinter der Achſe, ſo daß nur die zweite Spur ſichtbar iſt (Fig. 40 und 41). In welchem Raumviertel liegt die von den Spuren begrenzte Strecke AG der Geraden?

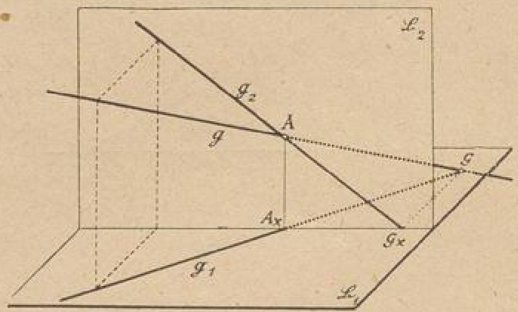


Fig. 40.

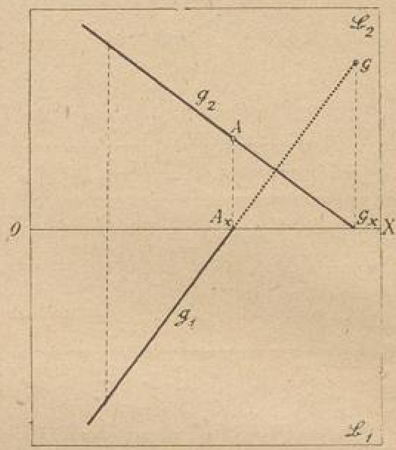


Fig. 41.

b) g iſt parallel zu $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$) und ſchief zu $\mathfrak{B}_2$ ($\mathfrak{B}_1$). Vgl. Fig. 42 und 43. Die zweite Projektion g_2 iſt der Achſe parallel. Wo liegt G_x (A_x)?

c) g iſt parallel zu $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Zeichnung! Wo liegen die Spuren G und A von g?

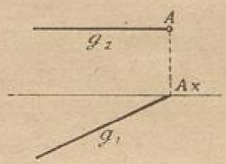


Fig. 42.

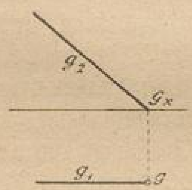


Fig. 43.

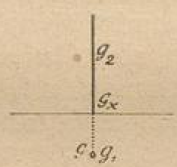


Fig. 44.

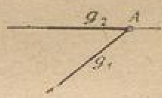


Fig. 45.

d) g iſt ſenkrecht zu $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$). S. Fig. 44. g_1 ſchrumpft in dieſem Falle in einen Punkt zuſammen, der mit der erſten Spur G von g zuſammenfällt. Wo liegt die zweite Spur A?

e) g liegt in $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$). S. Fig. 45.

3a) Gerade und Punkt.

Ein Punkt P (Fig. 38 und 39) **liegt dann und nur dann auf einer Geraden, wenn ſeine Projektionen P_1 und P_2 auf den entſprechenden Projektionen der Geraden liegen, alſo P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2.**

Umgekehrt geht eine Gerade dann und nur dann durch einen Punkt P, wenn ihre Projektionen durch die entſprechenden Projektionen des Punktes gehen.

b) Für die Beurteilung der **Lage zweier Geraden** ergibt ſich aus a) der wichtige Satz:

Schneiden ſich zwei Gerade (g und l, Fig. 46), ſo liegen die Schnittpunkte S_1 und S_2 ihrer gleichnamigen Projektionen auf einem Lot (S_1S_2) zur Achſe und umgekehrt.

Rückt der Schnittpunkt P der Geraden g und l ins Unendliche, so rücken damit auch seine Projektionen ins Unendliche. Was folgt daraus für die gleichnamigen Projektionen paralleler Geraden?[1])

Aufgabe. Zu einer durch ihre Projektionen g_1 und g_2 gegebenen Geraden durch einen Punkt P (P_1P_2) die Parallele zu zeichnen. Lösung!

Liegen (Fig. 47) die Schnittpunkte der Projektionen zweier Geraden g und l nicht senkrecht untereinander, so haben die Geraden im allgemeinen keinen Punkt gemeinsam. Die Projektionen stellen also **zwei windschiefe Gerade** dar.

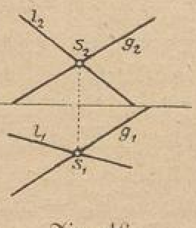


Fig. 46.

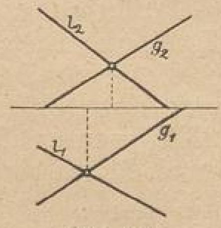


Fig. 47.

In welchem Ausnahmefalle können die Schnittpunkte der Projektionen zweier windschiefer] Geraden senkrecht untereinander liegen?

§ 13. Bestimmung der Tafelneigungen einer Geraden und der wahren Länge einer Strecke.

1) Aufgabe. Die Neigungswinkel einer Geraden g mit den Bildebenen zu bestimmen.

Da GA_x (s. Schrägbild Fig. 48) die Projektion von g auf $\mathfrak{B}_1$ ist, ist $\sphericalangle AGA_x$ der Neigungswinkel γ_1 von g mit der ersten Tafel oder Bildebene. Um γ_1 zu finden, denken wir uns das Dreieck GA_xA um GA_x in die erste Bildebene umgelegt, so daß es in die Lage des Dreiecks GA_xA_0 kommt. Wir erhalten dann zur Bestimmung von γ_1 die folgende Konstruktion: Man errichte (Fig. 49) auf GA_x in A_x das Lot $A_xA_0 = A_xA$ und verbinde A_0 mit G. Alsdann ist $\sphericalangle A_0GA = \gamma_1$.

Entsprechend finden wir den Neigungswinkel γ_2 mit der zweiten Bildebene.

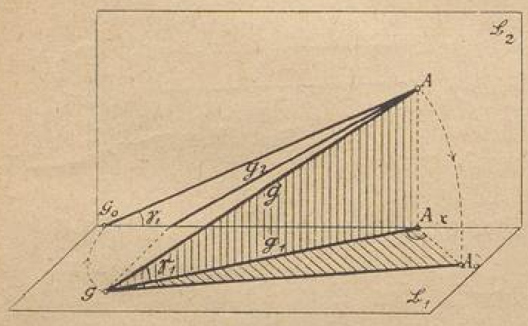


Fig. 48.

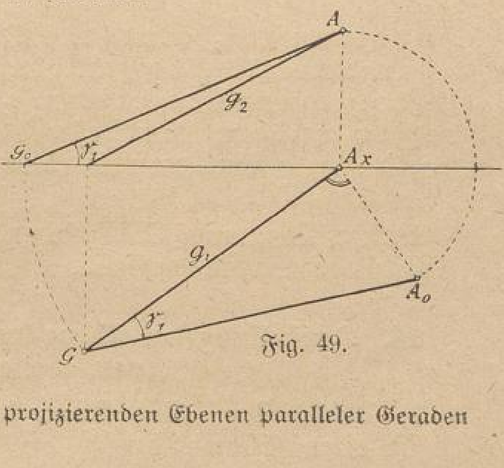


Fig. 49.

[1]) Beachte auch, daß die entsprechenden projizierenden Ebenen paralleler Geraden parallel sind.

Bemerkung. Anstatt Dreieck GA_xA um g_1 als Drehungsachse in die erste Bildebene umzulegen, können wir es uns auch um AA_x gedreht denken, bis es in die zweite Bildebene fällt (Fig. 48 und 49). Die Konstruktion wird dann noch einfacher. Inwiefern?

$GA_0 = AG_0$ ist die wahre Länge der von den Spurpunkten G und A begrenzten Strecke der Geraden g.

2) Aufgabe. *Die wahre Länge der durch ihre Projektionen L_1M_1 und L_2M_2 gegebenen Strecke LM zu bestimmen.*

Aus dem Schrägbilde Fig. 50 erkennen wir, daß die Strecke LM mit ihrer ersten Projektion L_1M_1 und den Endloten $LL_1 = l$ und $MM_1 = m$ das Trapez LMM_1L_1 bildet. Denken wir uns dieses Trapez um L_1M_1 in die Grundrißebene umgelegt, so erhalten wir das Trapez $L_0M_0M_1L_1$, in dem $L_0M_0 = LM$ und $L_0L_1 = l$ und $M_0M_1 = m$ ist. Um das umgelegte Trapez in der Zeichenebene (Fig. 51) zu gewinnen, errichten wir auf L_1M_1 in L_1 das Lot $L_1L_0 = L_xL_2 = l$ und in M_1 das Lot $M_1M_0 = M_xM_2 = m$. Sodann ist L_0M_0 gleich der wahren Länge der Strecke LM.

Eine andere mehr Raum ersparende Konstruktion ergibt sich aus dem folgenden leicht zu beweisenden Satz (Fig. 50 und 51):

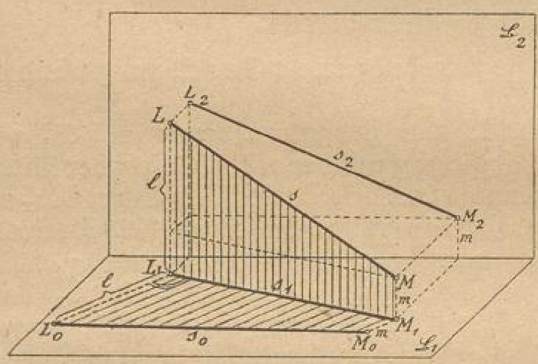


Fig. 50.

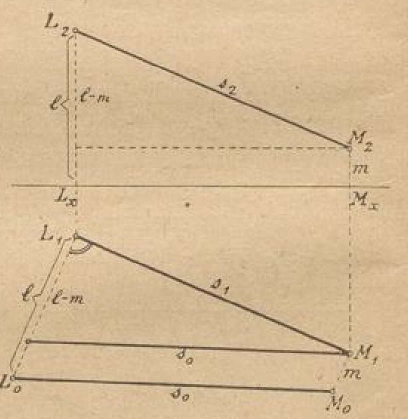


Fig. 51.

Die wahre Länge einer Strecke ist die Hypotenuse (s_0) eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die eine Projektion (s_1) und dessen andere Kathete die Differenz (l—m) der Abstände der Endpunkte der andern Projektion (s_2) von der Achse ist.

Welche Lage muß LM haben, damit eine Projektion die wahre Größe der Strecke darstellt?

§ 14. Darstellung der Ebene durch ein ebenes Vieleck (Darstellung von ebenen Vielecken).

1) Da die Lage einer Ebene durch drei ihrer Punkte bestimmt ist, *so ist eine Ebene durch die Projektionen dreier Punkte,* die nicht einer Geraden angehören, oder, was dasselbe ist, durch die Projektion eines in ihr liegenden Dreiecks, vollständig festgelegt. Infolgedessen dürfen bei einem ebenen Vieleck, z. B. dem Fünfeck in Fig. 52, nur von drei Ecken (1, 2, 3) die beiden Projektionen willkürlich gewählt werden. Von den übrigen Ecken (4 und 5) dagegen darf nur je eine Projektion (z. B. 4′ und 5′) beliebig angenommen werden.

Aufgabe 1. Von einem beliebig im Raum gelegenen ebenen Fünfeck sind der Grundriß (1′2′3′4′5′) und die Aufrisse (1″, 2″, 3″) dreier Ecken gegeben. Die Aufrisse der übrigen Ecken zu bestimmen (Fig. 52).

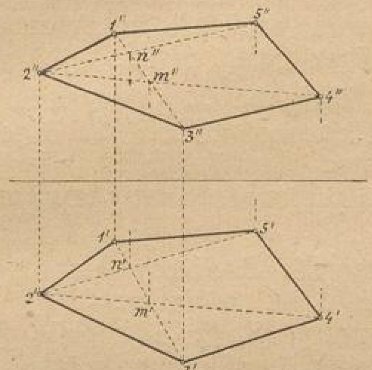


Fig. 52.

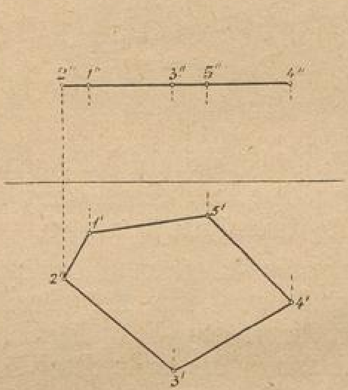


Fig. 53.

Die Aufrisse der Ecken 4 und 5 müssen so konstruiert werden, daß sie mit den drei beliebig angenommenen Ecken 1, 2, 3 in einer Ebene liegen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Diagonalen des Vieleckes sich schneiden müssen, also nicht windschief sein dürfen. Daher zeichnen wir zunächst die beiden Projektionen 1′3′ und 1″3″ der Diagonale 1 3 und ziehen durch den dritten festbestimmten Punkt 2 im Grundriß die Diagonalen 2′4′ und 2′5′, die die Diagonale 1′3′ in m′ und n′ schneiden. Die Aufrisse m″ und n″ dieser Schnittpunkte bestimmen wir durch Hinaufloten auf 1″3″ und erhalten, wenn wir 2″ mit m″ und n″ verbinden, die Aufrisse der Diagonalen 2 4 und 2 5, deren Endpunkte 4″ und 5″ senkrecht über den zugehörigen Grundrissen 4′ und 5′ liegen.

Was für eine zweite Projektion ergibt ein ebenes Vieleck (Fig. 53), das der Grundrißebene parallel ist? Wieviel Ecken brauchen in diesem Falle nur im Aufriß gegeben zu sein, um seine Projektionen zu zeichnen?

2) Gerade und Punkte in einer Ebene.

a) **Aufgabe 2.** Von der Geraden g, die in der Ebene des Dreiecks 1 2 3 liegt, ist die erste Projektion g_1 gegeben. Die zweite Projektion g_2 zu bestimmen (Fig. 54).

Die Gerade g kann nur dann in der Ebene des Dreiecks liegen, wenn die Schnittpunkte von g_2 mit den Seiten des Dreiecks im

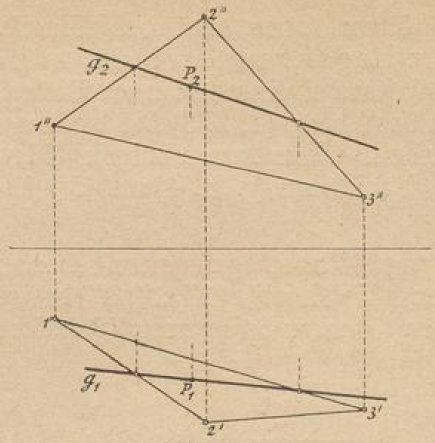


Fig. 54.

Aufriß senkrecht über den zugehörigen Schnittpunkten von g_1 mit den entsprechenden Seiten des Grundrißdreiecks liegen. Lösung!

b) Zur **Festlegung eines Punktes P in der Ebene,** die z. B. durch ein Dreieck bestimmt ist, benutzen wir eine beliebige durch P in der Ebene gezogene Gerade, die so das Bindeglied zwischen Punkt und Ebene bildet. Diese Hilfsgerade muß die in a) angegebene Eigenschaft besitzen.

Aufgabe 3. Von dem in der Ebene des Dreiecks 1 2 3 gelegenen Punkte P ist der Grundriß P_1 gegeben. Den Aufriß P_2 zu bestimmen.

Lösung s. Fig. 54. Statt einer beliebigen Geraden g kann man einfacher eine Eckenlinie benutzen.

3) **Aufgabe 4.** Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit der Ebene des Dreiecks 1 2 3 zu finden.

Zur Bestimmung des Schnittpunktes S (s. Schrägbild Fig. 55) legen wir durch die erste Projektion g_1 der Geraden g, die den Um-

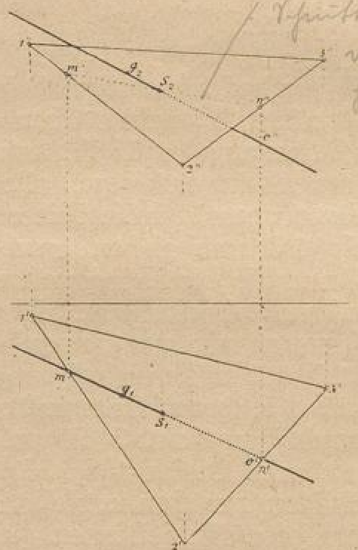


Fig. 55.

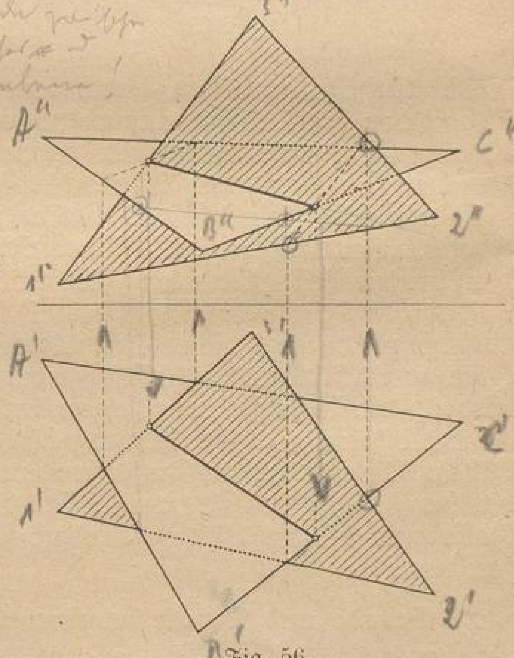


Fig. 56.

fang des Grundrisses in m′ und n′ trifft, die zur Grundebene senkrechte Hilfsebene. Diese schneidet das Dreieck in der Schnittlinie mn. Der Schnittpunkt von mn und der Geraden g ist der gesuchte Punkt S.

Wir erhalten daher die zweite Projektion der Schnittlinie mn mit dem Dreieck dadurch, daß wir die Punkte m′ und n′ von 1′2′ und 2′3′ hinaufloten. Der Schnittpunkt S_2 von g_2 mit m″n″ ist der Aufriß des gesuchten Durchstoßpunktes. Seine erste Projektion S_1 ergibt sich durch Herunterloten auf g_1.

Sichtbarkeit. Die Dreiecksfläche denken wir uns undurchsichtig. Um nun festzustellen, welches Stück der Geraden g durch das Dreieck z. B. im Grundriß, also für ein senkrecht über der Grundrißebene befindliches Auge, verdeckt erscheint, beachten wir, daß n′ (o′) die erste Projektion sowohl des auf der Dreiecksseite gelegenen Punktes n, als auch des auf der Geraden g gelegenen Punktes o ist. Da o″ unter n″ liegt, geht die Seite 2 3 über g hinweg. Mithin ist die Strecke S_1n′ von oben nicht sichtbar.

Aufgabe 5. Die Schnittlinie zweier sich schneidender Dreiecke (Vierecke), deren Projektionen gegeben sind, zu bestimmen (Fig. 56). Lösung nach Aufg. 4.

§ 15. Darstellung von Körpern in einfacher Stellung. Abwicklung.

Aufgabe 1. Einen auf der Grundebene ruhenden Würfel (Kantenlänge a = 5 cm), von dem zwei Seitenflächen der Aufrißebene parallel sind, in senkrechter Projektion zu zeichnen (Fig. 57).

Grundriß und Aufriß sind je ein Quadrat mit der Seite a.

Aufgabe 2. Der in Fig. 57 gezeichnete Würfel soll um die Kante 2 6 um den Winkel $\alpha = 30°$ gedreht und in der neuen Lage dargestellt werden (s. Fig. 58).

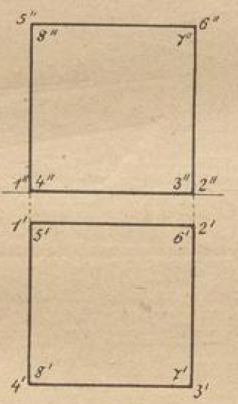


Fig. 57.

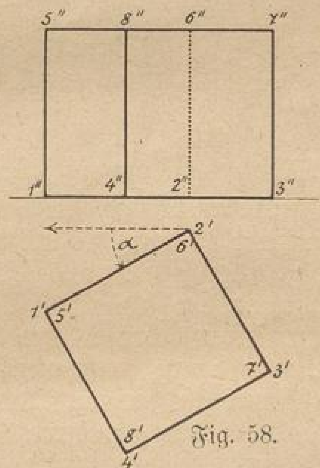


Fig. 58.

Aufgabe 3. Eine regelmäßig-achtseitige Säule, die auf einem quadratischen Sockel steht, darzustellen (Maßstab 1 : 10). Grundkante des Sockels a = 50 cm, der Säule b = 15 cm, Höhe entsprechend h = 15 cm und l = 80 cm.

Aufgabe 4. Eine regelmäßig-fünfseitige Pyramide, die mit der Grundfläche auf der Grundebene steht und deren Grundkante a und Höhe h gegeben sind, darzustellen. Ferner soll der im Abstande x von der Spitze zur Grundfläche parallele Schnitt und die Abwicklung des Körpers gezeichnet werden.

Der Grundriß des Körpers (Fig. 59) ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seite a. Die Verbindungsstrecken seiner Ecken mit dem Mittelpunkte S_1, der ersten Projektion der Spitze S, sind die Grundrisse der Seitenkanten. Zur Gewinnung des Aufrisses fälle man von S_1 auf die Achse das Lot und verlängere es um h bis S_2, der zweiten Projektion der Spitze, und verbinde S_2 mit den zweiten Projektionen der Ecken der Grundfläche. Denkt man sich die Ober-

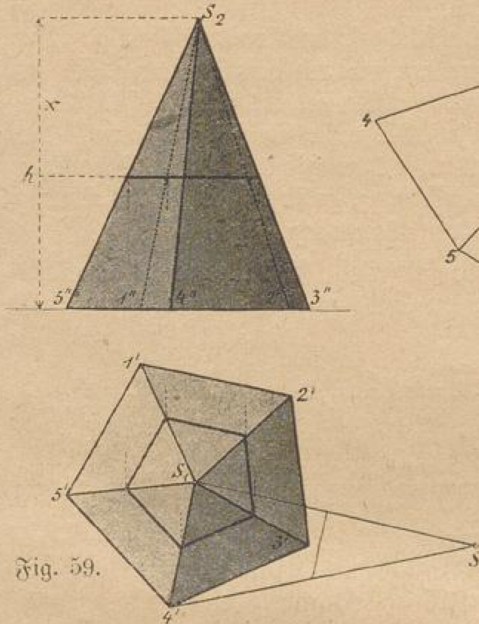


Fig. 59.

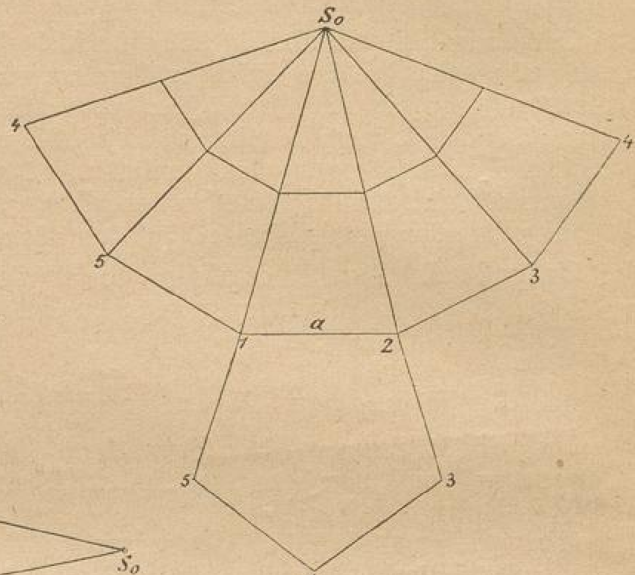


Fig. 60.

fläche des Körpers abgelöst und längs einer Seitenkante und der Grundkanten bis auf 1 2 aufgeschnitten, so erhält man durch Ausbreiten in eine Ebene das Netz des Körpers (Fig. 60), das im vorliegenden Falle aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit einem anhängenden Fünfeck besteht. Die Konstruktion des Netzes erfordert die Ermittlung der Länge der Seitenkante. Diese ergibt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ($4'S_1S_0$), dessen eine Kathete gleich dem großen Radius des Fünfecks ($4'S_1$) und dessen andere Kathete die gegebene Höhe ist. Das auf der Grundebene senkrecht stehende Dreieck wird zur bequemen Konstruktion um $4'S_1$ in die Grundebene umgelegt (Fig. 59). Mit Hilfe des Netzes ist ein Modell des Körpers anzufertigen.

Aufgabe 5. Die Normalbilder eines auf der Grundebene stehenden a) geraden Zylinders mit Achsenschnitt und Querschnitt, b) geraden Kegels mit Achsenschnitt und Querschnitt, c) einer auf der Grundebene ruhenden Kugel zu zeichnen.

a) Der Grundriß (Fig. 61) ist ein mit der Grundfläche des Zylinders zusammenfallender Kreis. Der Aufriß ist ein zur Achse senkrechtes Rechteck, dessen eine Seite gleich dem Durchmesser des Grundkreises und dessen andere gleich der Höhe des Körpers ist. Welche Projektionen hat der Achsenschnitt 1 2 3 4 und der zur Grundfläche parallele Schnitt Q im Grund- und Aufriß? Eine Mantellinie, z. B.

1 4, erscheint in der ersten Projektion als Punkt, in der zweiten als Lot zur Achse.

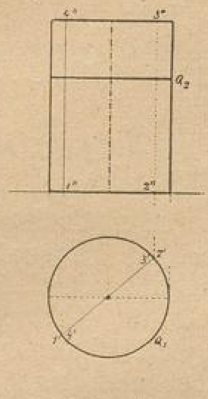


Fig. 61.

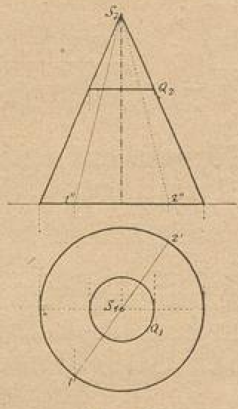


Fig. 62.

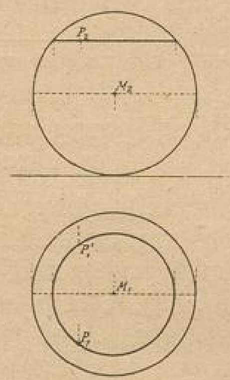


Fig. 63.

b) Welche Projektionen ergibt der Kegel? (Fig. 62). Welche der Achsenschnitt 1 2 S und der Parallelschnitt Q? Jeder Radius des Grundkreises, z. B. $1'S_1$, ist zugleich Projektion einer zugehörigen Seitenlinie (1 S).

c) Die Projektionsstrahlen (Fig. 63), die die Kugelfläche berühren, bilden eine die Kugel berührende Zylinderfläche. Die beiden Projektionen sind größte Kreise mit dem Radius der Kugel, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf einem Lot zur Achse liegen; sie sind gleichzeitig die Projektionen der zu den Bildebenen parallelen größten Kreise. Wie stellt sich ein zur Grundebene paralleler Schnittkreis dar? Wie findet man zum Aufriß P_2 des auf dem Schnittkreis gelegenen Punktes P den Grundriß P_1?

Aufgabe 6. Den Mantel des in Fig. 61 dargestellten Zylinders abzuwickeln.

Anleitung. Um die Länge eines Kurvenstücks als gerade Strecke annähernd darzustellen (zu rektifizieren), gibt man dem Stechzirkel eine so kleine Öffnung, daß das zwischen den Spitzen liegende Kurvenstück als geradlinig angenommen werden kann, trägt diese Strecke so oft auf einer Geraden ab, wie sie in dem vorliegenden Kurvenstück enthalten ist, und fügt das übrigbleibende Stück hinzu.

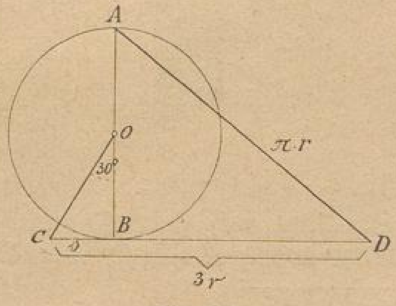


Fig. 64.

Von besonderer Wichtigkeit ist die **Rektifikation**[1]) **der Kreislinie.** Will man den halben Umfang des Kreises in Fig. 64 sehr angenähert haben, so

[1]) Zusammensetzung des lat. rectus (gerade) und facere (machen).

zeichne man den Durchmesser AB, trage im Mittelpunkte O einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel die in B gezeichnete Tangente in C trifft, und verlängere CB = s bis D, so daß CD = 3r wird. Alsdann ist der halbe Umfang sehr angenähert gleich

$$AD = \sqrt{4r^2 + (3r - s)^2} = r\sqrt{13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}141533\ldots r.$$ [1]

§ 16. Überführung von Körpern aus einfacher Anfangsstellung in eine allgemeinere Stellung.

Die Normalprojektionen von Körpern in einfacher Stellung geben zumeist wenig anschauliche Bilder, weil dabei im allgemeinen die Projektionen mehrerer Kanten und Flächen zusammenfallen (vgl. z. B. Fig. 57). Jedoch kann der Körper leicht durch mehrfache Verschiebung parallel zu den Bildebenen (Tafeln) und mehrfache Drehungen um Achsen, die zu einer Bildebene senkrecht sind, sog. Tafellote, in eine allgemeinere Stellung übergeführt werden, in der wir sehr anschauliche Bilder von dem Körper erhalten.

Aufgabe 1. Ein Würfel soll aus einer einfachen Anfangsstellung durch Parallelverschiebung zu den Tafeln und durch Drehung um Tafellote in eine allgemeinere Stellung übergeführt und seine Projektion gezeichnet werden (Fig. 65).

I. Wir gehen von der in Fig. 65a gekennzeichneten einfachen

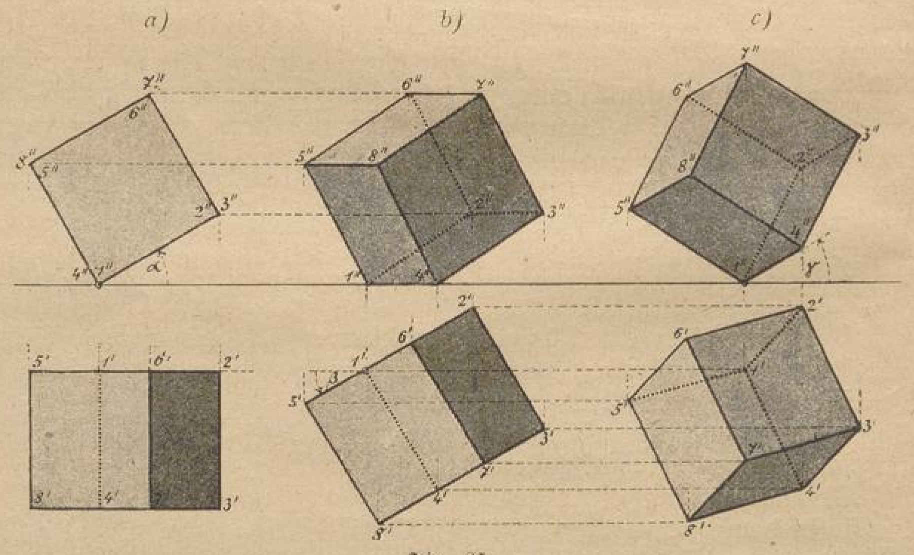


Fig. 65.

Stellung des Würfels aus, die sich aus der Frontstellung ergibt, wenn wir den Körper parallel zur zweiten Tafel verschieben und ihn

[1]) Statt 3,1415927 ... r. Der Fehler ist also kleiner als $\frac{6}{100000} = \frac{3}{50000}$ des Durchmessers. $s = r\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{r\sqrt{3}}{3}$.

dann um die Kante 14, die ein Lot zur zweiten Tafel ist, als Achse um den Winkel α drehen. Der Aufriß verändert dabei nicht seine Gestalt, bleibt also ein Quadrat, das gegen die Achse um den Winkel α gedreht ist. Die Grundrißpunkte verschieben sich dabei parallel zur Achse; sie liegen senkrecht unter den zugehörigen Aufrißpunkten.

II. Nach vorausgegangener Parallelverschiebung zu der ersten Tafel drehen wir den Würfel um das durch die Ecke 1 gehende erste Tafellot um den Winkel β (Fig. 65 b). Der Grundriß erfährt dadurch keine Änderung in seiner Gestalt, er wird um den Punkt 1′ um Winkel β gedreht. Die Eckpunkte bewegen sich bei der vorgenommenen Drehung parallel zur Grundebene. Ihre Aufrisse liegen demnach auf den durch die Aufrißpunkte in der Stellung a) gezogenen Parallelen zur Achse. Sie ergeben sich durch Hinaufloten aus dem Grundriß.

III. Nach vorausgegangener Parallelverschiebung zur zweiten Tafel drehen wir endlich den Würfel um das durch Eckpunkt 1 gehende zweite Tafellot um den Winkel γ (Fig. 65 c). Der Aufriß erleidet dadurch nur eine Drehung um γ um den Punkt 1″; seine Gestalt bleibt erhalten. Da sich die Eckpunkte des Würfels bei der Drehung parallel zur zweiten Tafel bewegen, so bleiben ihre zweiten Abstände erhalten. Ihre Grundrisse verschieben sich mithin nur parallel zur Achse, liegen also auf Parallelen zur Achse. Die Grundrisse der Ecken finden wir schließlich aus ihren Aufrissen durch Herunterloten.

Aufgabe 2. a) Ein regelmäßig-sechsseitiges Prisma (einen geraden Zylinder), b) eine regelmäßig-$n$seitige Pyramide (Kegel) aus einer einfachen Anfangsstellung in eine allgemeinere Stellung überzuführen und darzustellen.

Anmerkung. Ein einfacheres Verfahren zur Darstellung eines Körpers in allgemeiner Lage lehrt § 22.

§ 17. Darstellung der Ebene durch Spuren. Gerade und Punkte in der Ebene. Tafelneigung einer Ebene.

1) Eine unbegrenzte Ebene E (Fig. 66) kann nicht wie Punkt und Gerade durch Projektion auf die Bildebenen dargestellt werden. Denn man bekäme im allgemeinen als ihre Projektion wieder die Bildebene. Man pflegt deshalb eine solche Ebene, da sie durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt ist, durch ihre **Spuren** e_1 und e_2 auf den Projektionsebenen, das sind ihre Schnittgeraden mit den Projektionsebenen, darzustellen (Fig. 67). Die Schnittgerade e_1

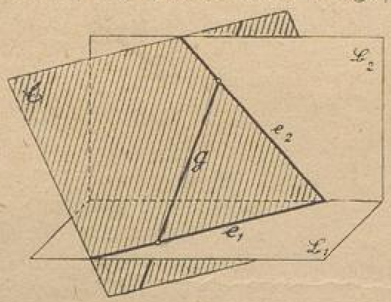


Fig. 66.

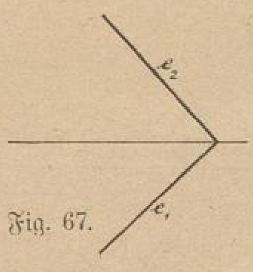


Fig. 67.

heißt die **erste**, e_2 die **zweite Spur.** Die beiden Spuren treffen sich in einem Punkte auf der Achse (Grund?).

Übungen. Stelle eine Ebene E im Schrägbilde dar und zeichne daneben ihre Spuren in senkrechter Projektion, wenn E

a) zur ersten Bildebene senkrecht steht und schief zur zweiten ist;
b) zur zweiten Bildebene senkrecht steht und schief zur ersten ist;
c) zu einer Bildebene, etwa B_2, parallel ist;
d) zur Achse parallel ist;
e) zur Achse senkrecht ist.

Wie verlaufen die Spuren paralleler Ebenen? (Schrägbild!)

2) Gerade in der Ebene.

Liegt eine Gerade g (Fig. 66) in einer Ebene (e_1, e_2), so kann sie die Bildebenen nur in den Spuren der Ebene E durchstoßen, und die Durchstoßpunkte sind zugleich die Spurpunkte der Geraden. Daraus ergibt sich:

Eine Gerade liegt dann und nur dann in einer Ebene, wenn ihre Spurpunkte in den gleichnamigen Spuren der Ebene liegen. Umgekehrt geht eine Ebene durch eine Gerade, wenn ihre Spuren durch die gleichnamigen Spurpunkte der Geraden hindurchgehen (Fig. 66).

Aufgabe 1. Von einer in der Ebene $E = (e_1 e_2)$ liegenden Geraden g ist die erste Projektion g_1 gegeben. Die zweite Projektion g_2 zu bestimmen.

Zur Lösung s. Fig. 72.

g_1 schneidet e_1 in G und die Achse in A_x. Der zweite Spurpunkt liegt senkrecht über A_x auf e_2. Zeichnung!

Aufgabe 2. Die Spuren der Ebene zu zeichnen, die durch zwei sich schneidende Gerade $g = (g_1, g_2)$ und $h = (h_1, h_2)$ bestimmt ist.

Die erste Spur e_1 (Fig. 68) der gesuchten Ebene muß durch die ersten Spurpunkte G_1 und H_1 von g und h gehen, ebenso e_2 durch G_2 und H_2. Die gefundenen Spuren e_1 und e_2 müssen sich auf der Achse treffen.

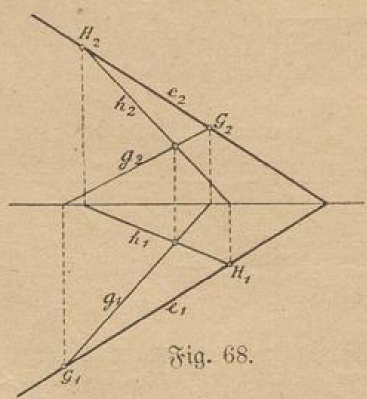


Fig. 68.

Aufgabe 2a. Löse Aufg. 2 für den Fall, daß die gegebenen Geraden parallel sind.

Anmerkung. Liegt ein Spurpunkt einer Geraden nicht auf der Zeichenfläche, so benutzt man eine Hilfsgerade, die die beiden gegebenen Geraden schneidet.

Aufgabe 3. Die Schnittlinie zweier durch ihre Spuren (e_1, e_2) und (f_1, f_2) gegebenen Ebenen E und F zu bestimmen.

Aus dem Schrägbilde (Fig. 69) erkennt

man, daß die Schnittpunkte G_1 und G_2 der gleichnamigen Spurgeraden zugleich die Spurpunkte der gesuchten Schnittgeraden g sind. Lösung s. Fig. 70 (vgl. § 12, Aufg. 2).

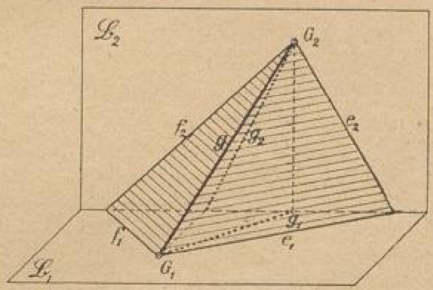


Fig. 69.

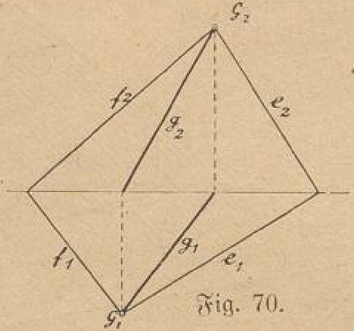


Fig. 70.

Stehen die beiden Ebenen E und F senkrecht zur ersten Bildebene, so ist auch die Schnittgerade g senkrecht (L. I. § 72, 3b) zu ihr (Fig. 71).

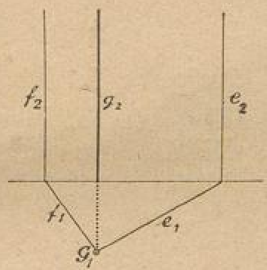


Fig. 71.

3) Punkte in der Ebene.

Als Bindeglied zwischen Punkt und Ebene benutzt man die Gerade. **Ein Punkt liegt dann und nur dann in einer Ebene, wenn er auf einer in ihr beliebig gezogenen Geraden liegt und umgekehrt.**

Aufgabe 4. Von einem auf der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gelegenen Punkte P ist die erste Projektion P_1 gegeben. Die zweite Projektion zu bestimmen (Fig. 72).

Durch P_1 zieht man die Gerade g_1, die man als erste Projektion einer durch P in E gezogenen Geraden betrachtet, bestimmt nach Aufg. 1 ihren Aufriß g_2 und erhält durch Hinaufloten den Aufriß P_2.

Wie kann man also feststellen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt oder nicht?

In der Regel benutzt man zur Vereinfachung der Konstruktion nicht eine beliebige Gerade der Ebene, sondern eine **Tafelparallele,** d. h. eine Gerade, die entweder der ersten Tafel $\mathfrak{B}_1$ **(erste Tafelparallele)** oder der zweiten Tafel $\mathfrak{B}_2$ **(zweite Tafelparallele)** parallel ist.

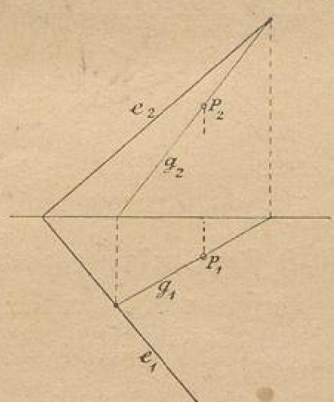


Fig. 72.

In Fig. 74 ist die Aufg. 4 mit Hilfe der ersten Tafelparallelen gelöst. Die durch P gehende erste Tafelparallele t (s. das Schrägbild Fig. 73) hat als erste Projektion t_1 eine Parallele zu e_1 (L. I. § 71, 1), als zweite t_2 eine Parallele zur Achse. Wo liegt ihre erste Spur? Löse die Aufgabe auch mit Hilfe der zweiten Tafelparallelen.

Welche Sätze gelten für die Projektionen der Tafelparallelen einer Ebene?

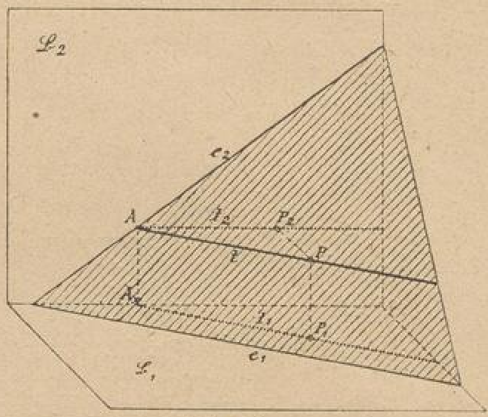


Fig. 73.

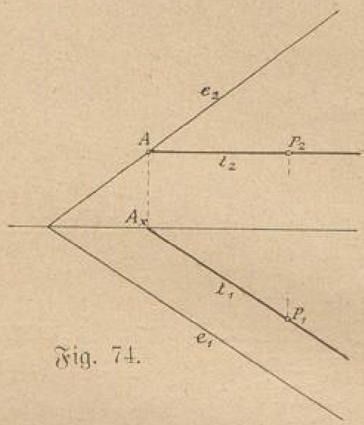


Fig. 74.

Aufgabe 5. Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch eine Gerade (g_1, g_2) und einen Punkt (P_1, P_2) hindurchgeht (Fig. 75).

Die Aufgabe wird auf Aufg. 2 zurückgeführt, indem man durch Punkt P eine Gerade legt, die die gegebene Gerade in einem Punkte $Q = (Q_1, Q_2)$ schneidet. Am bequemsten benutzt man eine Tafelparallele, z. B. die Parallele zur zweiten Bildebene t_1, t_2 (zweite Spurparallele).

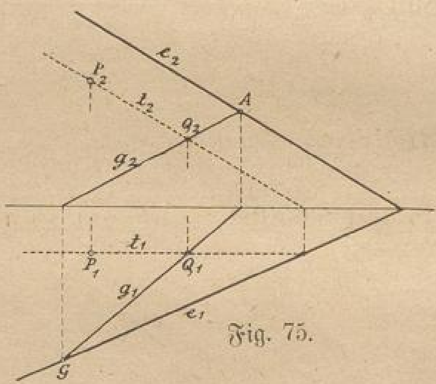


Fig. 75.

Aufgabe 6. Die Spuren einer beliebigen Ebene zu zeichnen, die durch einen gegebenen Punkt (P_1, P_2) geht.

Aufgabe 7. Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch einen gegebenen Punkt (P_1. P_2) geht und einer gegebenen Ebene (e_1, e_2) parallel ist.

4) Tafelneigung einer Ebene.

Aufgabe 8. Den Neigungswinkel einer Ebene $E = (e_1, e_2)$ mit der ersten Tafel (die erste Tafelneigung) zu bestimmen (Fig. 76 und 77).

Um die erste Tafelneigung α_1 zu erhalten, schneide man die Ebene E durch eine zur ersten Spur e_1 senkrechte Hilfsebene H. Aus dieser wird durch die Ebene E und die beiden Bildebenen das rechtwinklige Dreieck BA_xA, das sog. **Neigungsdreieck,** herausgeschnitten. Dieses denke man sich um A_xA als Achse gedreht, bis es in die zweite Tafel fällt (B_0A_xA). Dann ist $\sphericalangle A_xB_0A = \alpha_1$ die gesuchte Tafelneigung.

Lösung. Man fälle (Fig. 77) von dem beliebigen Punkte A der Spur e_2 auf die Achse das Lot AA_x, ebenso von A_x auf die erste Spur e_1 das Lot A_xB und beschreibe um A_x mit A_xB als Radius

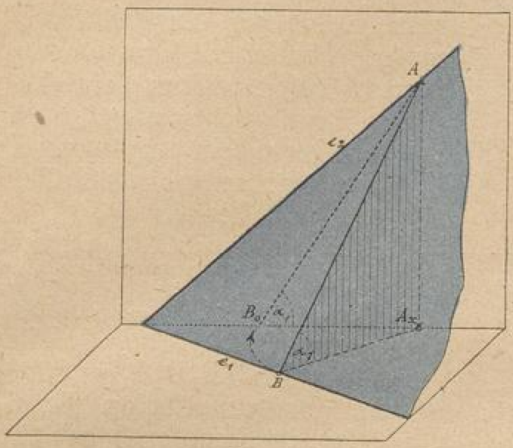


Fig. 76.

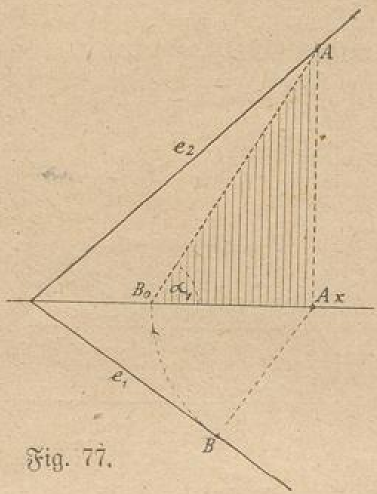


Fig. 77.

den Kreis, der die Achse in B_0 trifft. Dann ist $\sphericalangle AB_0A_x = \alpha_1$. Bestimme entsprechend die zweite Tafelneigung α_2.

Aufgabe 9 (Umkehrung von 8). Von einer Ebene $\mathfrak{E}$ ist die erste Spur e_1 und ihre erste Tafelneigung α_1 gegeben. Die zweite Spur der Ebene zu bestimmen.

§ 18. Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene.

1) Aufgabe 1. Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit einer Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ zu bestimmen (Fig. 78).

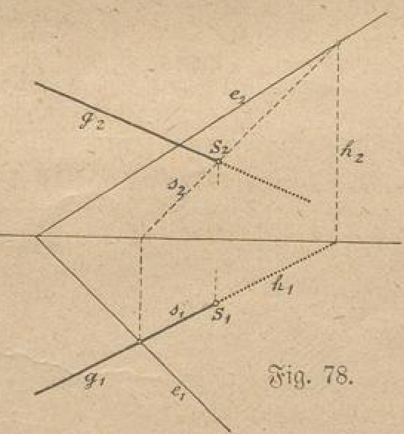


Fig. 78.

Die Lösung für die wichtige Aufgabe findet man am besten an der Hand eines Schrägbildes. Durch g lege man eine zur ersten Bildebene senkrechte Hilfsebene $\mathfrak{H}$. Ihre erste Spur h_1 fällt mit g_1 zusammen, ihre zweite h_2 steht senkrecht zur Achse. Da die Hilfsebene $\mathfrak{H}$ die Gerade g enthält, so liegt der Schnittpunkt S von g mit der gegebenen Ebene $\mathfrak{E}$ auch auf der Schnittgeraden s der Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Der Aufriß S_2 von S ergibt sich daher als Schnittpunkt von g_2 mit s_2. Den Grundriß S_1 des Durchdringungspunktes erhält man endlich durch Herunterloten auf $g_1 = s_1$. Zeichnung!

Aufgabe 2. Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit der Ebene eines Parallelogramms ABCD zu bestimmen.

Als Hilfsebene benutze man wieder die durch g gehende erste Lotebene (vgl. § 14 Aufg. 4).

2) Gerade in senkrechter Lage zu einer Ebene.

Projiziert man (Fig. 79) eine Gerade g, die auf einer Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht steht, senkrecht auf eine Ebene $\mathfrak{B}$, so bildet die Projektion g_1 der Geraden mit der Spur e der Ebene $\mathfrak{E}$ einen rechten Winkel.

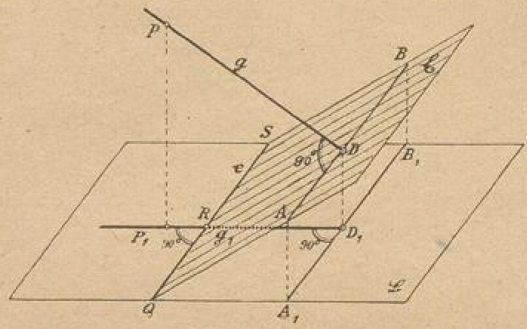


Fig. 79.

Denn zieht man durch den Durchdringungspunkt D der Geraden g die Parallele AB zur Bildebene, so ist, da $A_1D_1 \parallel AD$ und AD senkrecht zur Ebene DD_1P_1P ist, auch A_1D_1 senkrecht zu dieser Ebene (L. I. § 65, 2), folglich zunächst $\sphericalangle\, P_1D_1A_1 = 90°$.[1]) Als Gegenwinkel an Parallelen ist dann auch der von g_1 und der Spur e gebildete Winkel $P_1RQ = 90°$. Daraus folgt:

Die Projektionen einer Geraden, die zu einer Ebene senkrecht steht, schneiden die gleichnamigen Spuren der Ebene unter rechten Winkeln.

Aufgabe 3. Von einem gegebenen Punkte $P = (P_1, P_2)$ auf eine Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ das Lot zu fällen und den Abstand des Punktes von der Ebene zu bestimmen (Fig. 80). (Schrägbild!)

Von P_1 und P_2 hat man die Senkrechten zu den gleichnamigen Spuren der Ebene zu zeichnen, um die erste und zweite Projektion des gesuchten Lotes zu erhalten. Die Projektionen des Fußpunkts D des Lotes ergeben sich nach Aufg. 1.

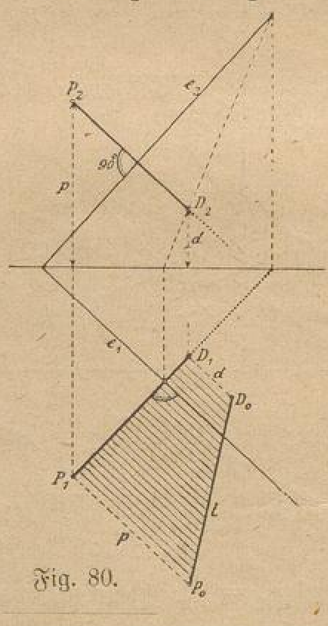


Fig. 80.

Die wahre Länge P_0D_0 des Abstandes $PD = l$ erhalten wir nach § 13, 2 aus dem zur ersten Bildebene senkrechten Trapez P_1D_1DP, das wir in diese Ebene um P_1D_1 als Achse umlegen.

Aufgabe 4. Den A b s t a n d z w e i e r w i n d s c h i e f e r G e r a d e n $g = (g_1, g_2)$ und $l = (l_1, l_2)$ zu bestimmen. Anleitung s. L. I. § 69 Aufg. 2.

§ 19. Einführung einer dritten Bildebene.

1) Eine ebene Figur, die in einer zur Bildachse senkrechten Ebene liegt, ist durch ihre beiden Projektionen n i c h t bestimmt. Ein in

[1]) Das Normalbild eines rechten Winkels, von dem ein Schenkel der Bildebene parallel ist, ist also wieder ein rechter!

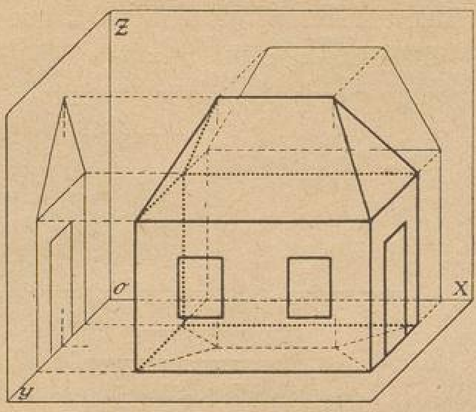


Fig. 81.

solcher Lage befindlicher Kreis z. B. projiziert sich auf beide Bildebenen als eine seinem Durchmesser gleiche Strecke, die keinen sicheren Rückschluß auf das ursprüngliche Gebilde ermöglicht. Welche Projektionen hat ein gerader Zylinder, dessen Achse der Bildachse parallel ist? Um aber auch in solchen Fällen Gebilde, bei denen Flächen in normaler Lage zur Achse vorkommen, nach ihrer Gestalt festlegen zu können, nehmen wir eine dritte Bildebene, die **Seitenrißebene** B_3, zu Hilfe, die wir senkrecht zu B_1 und B_2, also senkrecht zur Bildachse annehmen. Die Projektion auf diese dritte Ebene heißt **dritte Projektion** oder **Seitenriß** (Profil), da sie eine seitliche Ansicht des Körpers wiedergibt. Vgl. Fig. 81, wo ein einfaches Haus mit Walmdach[1]) mit seinen drei Projektionen in schiefer Parallelprojektion gezeichnet ist. Um die drei Projektionen in derselben Zeichenebene darstellen zu können, denken wir uns nach Vereinigung der ersten mit der zweiten Bildebene die Seitenrißebene um OZ gedreht, bis sie in die Aufrißebene fällt. Wir erhalten dann die in Fig. 82 gegebene Darstellung.

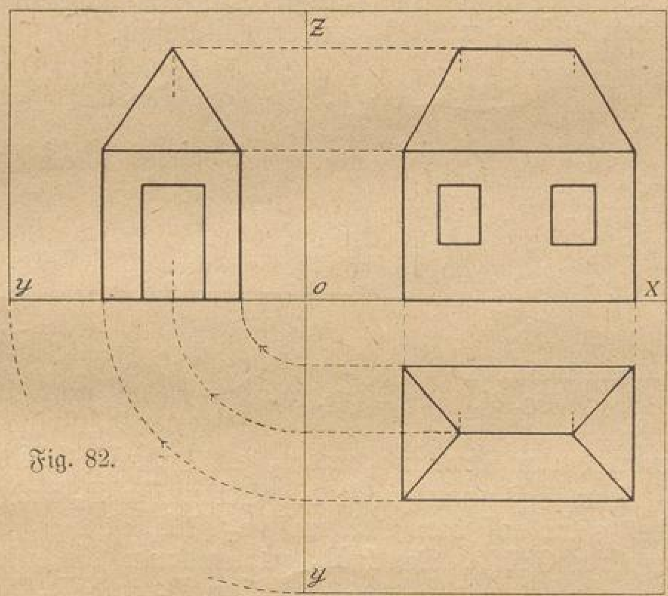


Fig. 82.

Durch das Hinzutreten von B_3 ergeben sich zwei neue Bildachsen (OY und OZ), die wir als y- oder Tiefenachse und z- oder Höhenachse unterscheiden (s. § 6, 1).

2) Aufgabe 1. Aus den beiden Projektionen P_1 und P_2 eines Punktes P die dritte P_3 zu bestimmen (Fig. 83 und 84).

[1]) Ein Walm- oder holländisches Dach entsteht aus einem einfachen zweiseitigen Dach dadurch, daß an Stelle der Giebel Dachflächen gesetzt werden, so daß die 4 Traufkanten auf gleicher Höhe liegen. Walm = schräg zurücktretender Dachgiebel.

Man fälle auf die Achse OZ das Lot P_2P_z und trage auf der Verlängerung $P_zP_3 = P_1P_x$ ab. Andere Lösung s. Fig.

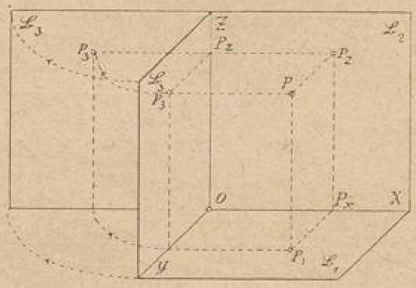


Fig. 83.

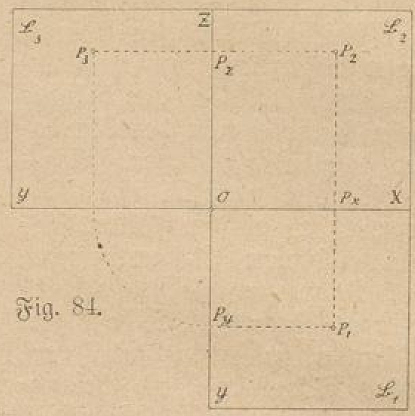


Fig. 84.

Aufgabe 2. Aus den beiden ersten Projektionen g_1 und g_2 einer Geraden die dritte g_3 zu bestimmen.

Man bestimme die dritten Projektionen der Spurpunkte der Geraden auf $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ und verbinde sie.

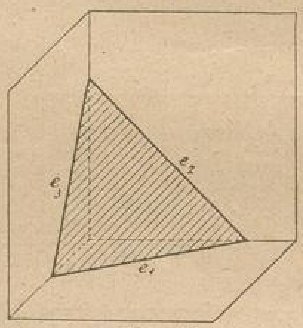


Fig. 85.

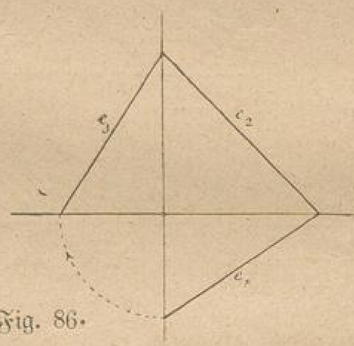


Fig. 86.

Aufgabe 3. Die dritte Spur e_3 einer Ebene (e_1, e_2) zu zeichnen.

Lösung s. Fig. 86, Darstellung in schiefer Parallelprojektion s. Fig. 85.

3) **Aufgabe 4.** Den Abstand eines Punktes P von einer Ebene $\mathfrak{E}$ zu bestimmen, deren Spuren e_1 und e_2 zur Bildachse OX parallel sind (Fig. 87).

Man bestimme zuerst die Seitenrisse P_3 und e_3. Das Lot P_3D_3, das man auf den Seitenriß e_3 fällt, ist der gesuchte Abstand in wahrer Größe. Durch D_3 gewinnt man die erste und zweite Projektion D_1 und D_2 des Lotfußpunktes.

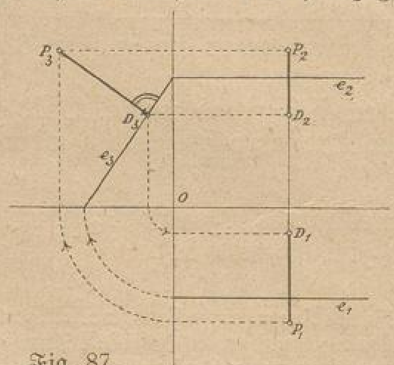


Fig. 87.

4) Die Lösung vieler Aufgaben erfährt durch die Einführung einer in jedem einzelnen Falle besonders zu wählenden beliebigen seitlichen Ebene, die zu einer Bildebene senkrecht ist, eine wesentliche Vereinfachung (vgl. auch § 21, Aufg. 4). Die Benutzung einer eigentlichen Seitenrißebene wäre dabei zwecklos.

Aufgabe. Von zwei Quadern I und

II, deren Kantenlängen gegeben sind, liegt der eine (I) mit einer Seitenfläche, der andere (II) nur mit der Kante $\overline{12}$ in der Grundebene und stützt sich mit einer Fläche auf die Kante $3\,4$ des ersten. Man soll die Projektionen des zweiten Quaders zeichnen (Fig. 88).

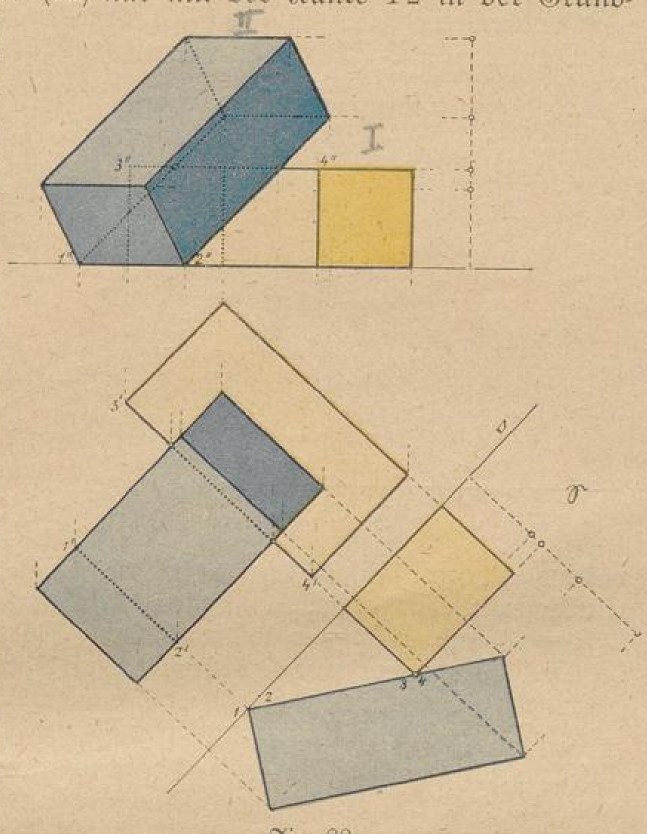


Fig. 88.

Wir wählen eine zu den Kanten $\overline{12}$ und $\overline{34}$ senkrechte **dritte Bildebene** S, die die Grundrißebene in der Spur s schneidet, und legen S, um die Zeichnung in derselben Zeichenebene ausführen zu können, um ihre Spur s in die Grundebene um. Da die Kantenlängen beider Körper gegeben sind, so können wir mit Hilfe des Grundrisses von I und aus der Lage der Kante $\overline{12}$ von II die Projektion der beiden Quader auf S leicht zeichnen. Wie kann daraus der Grundriß und Aufriß von II gefunden werden?

§ 20. Umlegung ebener Figuren und Bestimmung ihrer wahren Gestalt. Affinität.

1 a) Um die wahre Gestalt einer durch ihre Projektionen gegebenen ebenen Figur zu erhalten, denken wir uns die Ebene, in der die Figur liegt, um eine Spur (z. B. e_1) als Achse in die zugehörige Bildebene (B_1) umgelegt und bestimmen dann in der sich ergebenden Lage die ebene Figur.

Die Lösung dieser Aufgabe beruht, da eine ebene Figur durch die Lage ihrer Eckpunkte bestimmt ist, auf der Lösung der folgenden

Grundaufgabe: Einen in der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gegebenen Punkt $P = (P_1, P_2)$ in die Grundebene umzulegen, d. h. man soll die Lage P_0 bestimmen, die P erhält, wenn die Ebene E um e_1 als Achse in die erste Bildebene umgeklappt wird.

Denken wir uns an der Hand des Schrägbildes (Fig. 89) die Ebene

$\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ um e_1 gedreht, dann beschreibt der in $\mathfrak{E}$ gelegene Punkt P einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht zu e_1 ist. Mithin fällt P nach vollendeter Umlegung auf die Verlängerung des von P_1 auf e_1 gefällten Lotes P_1B. Die Entfernung $P_0B = PB$, der **Drehungs-**

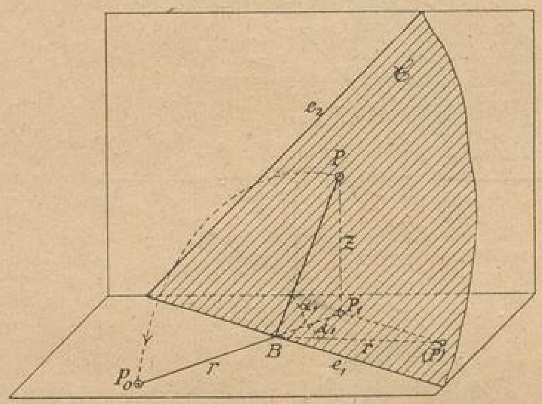


Fig. 89.

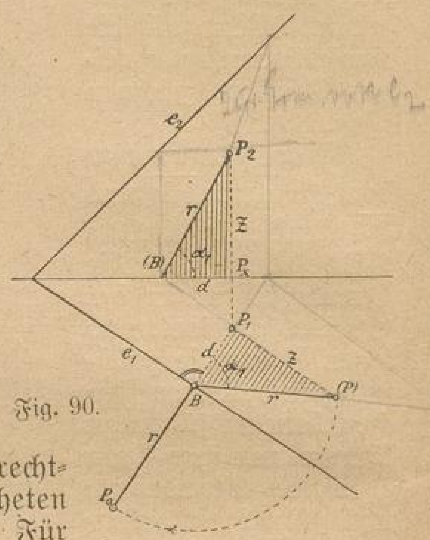


Fig. 90.

radius r, ergibt sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks PP_1B, dessen Katheten $P_1B = d$ und $PP_1 = z$ bekannt sind. Für die Ermittlung von r wird das Dreieck um BP_1 in die erste Bildebene umgeklappt, so daß man das schraffierte Dreieck $P_1(P)B$ erhält. $\sphericalangle\, P_1B(P) = \alpha_1$ ist die erste Tafelneigung der Ebene $\mathfrak{E}$.

Für die Konstruktion des Drehungsradius r merken wir uns den Satz: Der Drehungsradius eines in die erste Bildebene umgelegten Punktes P ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich dem Abstande der ersten Projektion des Punktes P von der Umdrehungsachse und dessen andere Kathete gleich seinem ersten Tafelabstand ist.

Zur Lösung (Fig. 90) fälle man von P_1 auf e_1 das Lot P_1B und beschreibe mit dem Drehungsradius r um B den Kreis, der das über B verlängerte Lot P_1B in P_0 trifft.[1]) Der Drehungsradius r kann auch aus dem Dreieck $P_2(B)P_x$, wo $(B)P_x = BP_1$ ist, bestimmt werden, was bei vielen Anwendungen bequemer ist.

Für die Lösung der Aufg. ist die Angabe der zweiten Spur e_2 nicht erforderlich. Wie kann diese bestimmt werden, wenn e_1, P_1 und P_2 gegeben ist? (Spurparallele!)

Aufgabe 1. Die wahre Größe des Winkels zweier sich schneidender Geraden g und h, deren Projektionen (g_1, g_2) und (h_2, h_2) gegeben sind, zu ermitteln.

---

[1]) Daß die Punkte P_1BP_0 scheinbar nicht auf einer Geraden liegen, beruht auf einer lehrreichen optischen Täuschung.

Zeichne die erste Spur der durch g und h bestimmten Ebene und lege um sie den Scheitel des Winkels in die erste Bildebene um.

Aufgabe 2. Von einem in Grund- und Aufriß gegebenen Walmdach die wahren Größen der Dachflächen und ihre Neigungswinkel mit der Grundebene zu bestimmen (Fig. 91).

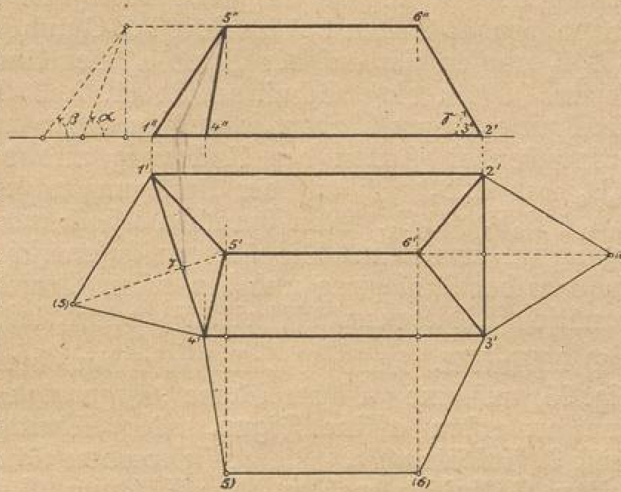


Fig. 91.

Das Trapez 1′2′3′4′ bildet die erste Projektion der vier Traufkanten. Die Firstlinie $\overline{56}$ verläuft parallel und symmetrisch zu den Traufkanten $\overline{12}$ und $\overline{43}$. Die wahre Größe des Dachdreiecks 145 erhält man durch Umlegung um die Traufkante $\overline{14}$ in die Grundebene, wobei nur die Umlegung des Punktes 5 zu ermitteln ist. Der Winkel $5\,7\,5' = \alpha$ ist der Neigungswinkel der Dachfläche. Wie findet man die gesuchten Größen für die übrigen Dachflächen?

b) **Aufgabe 3.** Die wahre Gestalt $A_0B_0C_0$ eines durch seine Projektionen gegebenen Dreiecks ABC durch Umlegung in die Grundebene zu bestimmen (Fig. 92).

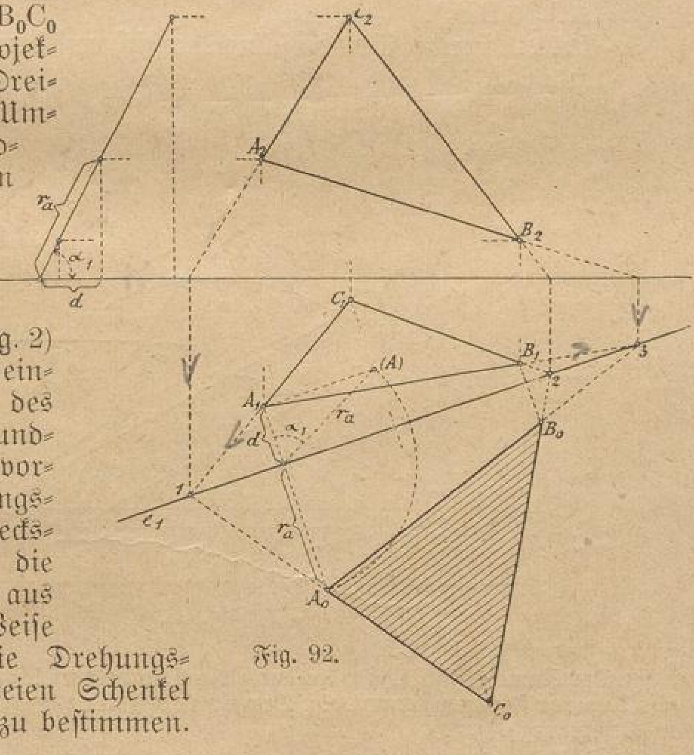


Fig. 92.

Man ermittle zunächst die Grundrißspur e_1 der Dreiecksebene (§ 17, Aufg. 2) und lege dann die einzelnen Eckpunkte des Dreiecks nach der Grundaufgabe um. Es ist vorteilhaft, den Neigungswinkel α_1 der Dreiecksebene gegen $\mathfrak{B}_1$ an die Bildachse in der aus Fig. 92 ersichtlichen Weise anzutragen und die Drehungsradien auf dem freien Schenkel von α_1 gleichzeitig zu bestimmen.

Zwischen der Umlegung $A_0B_0C_0$ des Dreiecks ABC und seiner ersten Projektion $A_1B_1C_1$ besteht eine einfache geometrische Beziehung (Verwandtschaft), die eine genauere und wesentlich bequemere Lösung aller ähnlichen Aufgaben ermöglicht. Die Verlängerungen entsprechender Seiten des Dreiecks ABC und seiner ersten Projektion $A_1B_1C_1$ müssen sich auf der Spur e_1, der Umlegungsachse schneiden (Grund?). Da diese Schnittpunkte (1, 2, 3) bei der Umlegung um die Spur e_1 liegen bleiben, so müssen daher auch die Verlängerungen entsprechender Seiten der Umlegung und des Grundrisses (z. B. A_0B_0 und A_1B_1) sich auf der Umlegungsachse schneiden. Ferner ist $A_0A_1 \parallel B_0B_1 \parallel C_0C_1$. Man braucht deshalb nur einen Punkt der Umlegung zu ermitteln. Die übrigen lassen sich dann auf Grund der zwischen der Umlegung und der ersten Projektion bestehenden Verwandtschaft, die man Affinität[1]) nennt, leicht finden.

2) Affinität. Durch Parallelprojektion einer ebenen Figur (ABC, Fig. 93) auf eine zu ihrer Ebene (E) geneigte Ebene (B) ergibt sich eine zur ersten **affine Figur.** Die Schnittgerade beider Ebenen heißt **Affinitätsachse.** Die projizierenden Strahlen (AA_1, BB_1, CC_1) heißen **Affinitätsstrahlen,** ihre Richtung (AA_1) **Affinitätsrichtung.** Zwischen zwei affinen Figuren, z. B. ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 93), bestehen folgende Beziehungen:

1. Jedem Punkte der einen Figur entspricht ein Punkt der andern (A_1 und A).
2. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel ($AA_1 \parallel BB_1$).
3. Entsprechende Gerade schneiden sich auf der Affinitätsachse (CA und C_1A_1).

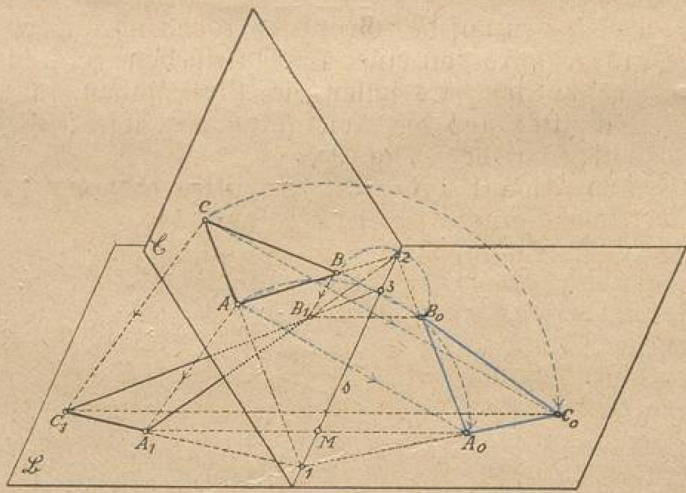


Fig. 93.

[1]) Der Name Affinität für die durch die Parallelprojektion herstellbare Verwandtschaft ebener Figuren stammt von Leonhard Euler (geb. 1707 in Basel, gest. 1783 in Petersburg).

Diese Eigenschaften bleiben auch erhalten, wenn die Ebene $\mathfrak{E}$ um die Spur s in die Ebene $\mathfrak{B}$ umgelegt wird, so daß $\triangle$ ABC die Lage $A_0B_0C_0$ annimmt (Beweis!). $\triangle A_0B_0C_0$ kann auch als Parallelprojektion von ABC aufgefaßt werden (Beweis!). Damit haben wir den Satz:

Die Umlegung einer ebenen Figur und ihre erste Projektion sind affine Gebilde mit ihrer ersten Spur als Affinitätsachse.

Eine Affinität ist bestimmt durch die Achse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P'.

Aufgabe. Zu dem Dreieck ABC (Fig. 94) in seiner Ebene das affine Dreieck zu zeichnen, wenn die Affinitätsachse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P' gegeben sind.

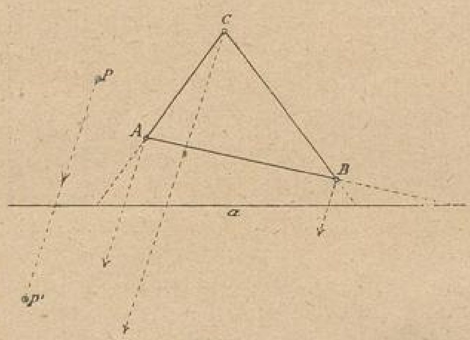


Fig. 94.

Bemerkung. Betrachten wir $A_1B_1C_1$ in Fig. 93 als Grundfigur eines Prismas, dessen Seitenkanten die Affinitätsstrahlen sind, so können wir ABC als schiefen Schnitt durch den Körper und $A_0B_0C_0$ als die Umlegung des Schnittes ansehen. Denken wir uns nun noch den Schnitt senkrecht auf die Bildebene $\mathfrak{B}$ projiziert, so ist die Grundfigur nicht nur mit der senkrechten Projektion des Schnittes, sondern auch mit dessen Umlegung für die Spur der Schnittebene als Affinitätsachse affin.

§ 21. Darstellung ebener Körperschnitte. Abwicklung.

1) Aufgabe 1. Ein auf der Grundebene stehendes gerades vierseitiges Prisma wird von einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ geschnitten. Es sollen die Projektionen und die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwicklung des schief abgeschnittenen Prismas ermittelt werden (Fig. 95).

Die erste Projektion $1'2'3'4'$ des Schnittes fällt mit dem Grundriß des Körpers zusammen, während die zweite $1''2''3''4''$ in die zweite Spur der Schnittebene fällt (Grund?). Die wahre Gestalt des Schnittes 1 2 3 4 finden wir durch Umlegung sämtlicher Eckpunkte in die Grundrißebene. Die Umlegung (1) von 1 liegt auf der von $1'$ zur Umlegungsachse e_1 gezogenen Senkrechten, und zwar im Abstande des zugehörigen Drehungsradius r von e_1. Dieser kann, da der von e_2 und der x-Achse gebildete Winkel α_1 gleich der ersten Tafelneigung der Schnittebene ist, unmittelbar aus dem Aufriß entnommen werden, $r = \overline{X1''}$.

Um (1) zu erhalten, beschreiben wir um X mit $\overline{X1''} = r$ als Radius den Kreis, der die Bildachse in (1'') trifft und loten diesen Punkt auf die von $1'$ zu e_1 gezogene Senkrechte herunter. Entsprechend können wir die Umlegungen der anderen Punkte gewinnen. Einfacher und schneller kommen wir jedoch zum Ziele durch Benutzung der zwischen den Figuren (1) (2) (3) (4) und 1′2′3′4′ bestehenden Affinität (s. Bem. § 20).

Um die Abwicklung des Mantels des schief abgeschnittenen Prismas zu erhalten, tragen wir auf einer Geraden die Seiten der Grundfigur nacheinander auf, errichten in den Endpunkten die Lote und tragen auf ihnen die Längen der zugehörigen Seitenkanten ab, die sich unmittelbar aus dem Aufriß ergeben, und verbinden die aufeinander folgenden Endpunkte.

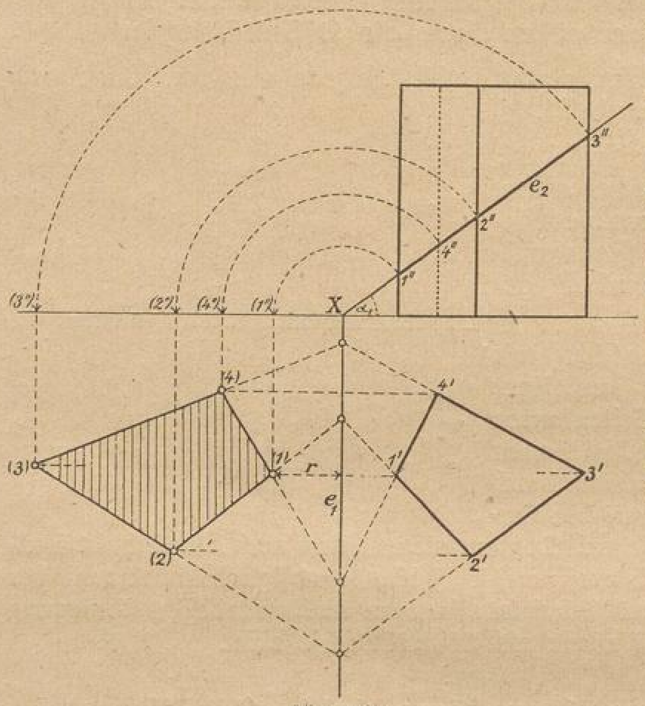


Fig. 95a.

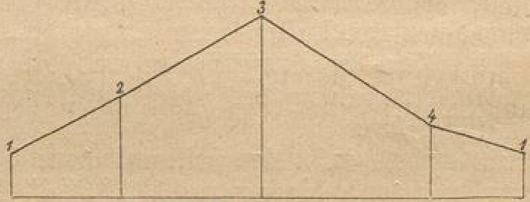


Fig. 95 b.

Aufgabe 2. Den Schnitt eines regelmäßig-sechsseitigen Prismas, das auf der Grundebene steht,

a) mit einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene E,

b) mit einer beliebigen schiefen Ebene E zu bestimmen,

ferner die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwicklung des Mantels samt der Schnittlinie zu zeichnen.

Bemerkung zu b). Die zweiten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur werden recht bequem mit Hilfe von ersten Spurparallelen (s. § 17, 3) bestimmt. Die Lösung kann durch Benutzung einer zu e_1 senkrechten Seitenebene sehr vereinfacht werden (vgl. Aufg. 4).

Aufgabe 3. Den Schnitt eines geraden Kreiszylinders, dessen Grundkreis in der ersten Bildebene liegt, mit einer zu B_2 senkrechten Ebene $E = (e_1, e_2)$ zu bestimmen und den Zylindermantel samt der Schnittlinie in die Ebene auszubreiten (Fig. 96).

Wir führen die Aufgabe auf die entsprechende für das Prisma (s. Aufg. 1) zurück, indem wir den Grundkreis in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, z. B. 12, teilen und die zugehörigen Mantellinien zeichnen. Die Schnittfigur ist eine Ellipse (§ 8 Anm. 2), deren erste Projektion in den Grundkreis und deren zweite in die Spur e_2 fällt. Die Gestalt der Ellipse in wahrer Größe ergibt sich wie beim Prisma durch Umlegung (Affinität!).

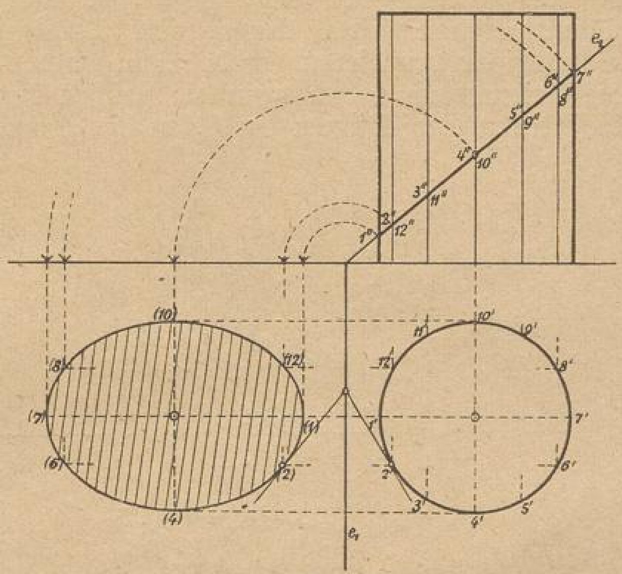


Fig. 96.

Denken wir uns den Zylinder längs einer Mantellinie (z. B. der durch 1 gehenden) aufgeschnitten und in die Zeichenebene ausgebreitet, so ergibt sich ein Rechteck, dessen Grundseite gleich dem Umfang des Grundkreises[1]) und dessen Höhe gleich der Zylinderhöhe ist. Um die Schnittkurve in der Abwicklung zu erhalten, teilen wir die Grundseite wieder in 12 gleiche Teile, tragen auf den zu den Teilpunkten gehörigen Mantellinien die zugehörigen Höhen der Ellipsenpunkte ab und verbinden die Endpunkte durch einen freien Kurvenzug.

2) Aufgabe 4. Den Schnitt einer auf B_1 stehenden regelmäßig-sechsseitigen Pyramide mit einer Ebene $E = (e_1, e_2)$ und seine wahre Gestalt zu bestimmen, ferner den Mantel der Pyramide samt Schnittlinie in die Zeichenebene auszubreiten.

I. Lösung. Man bestimmt zunächst nach § 18 Aufg. 1 die zweiten Projektionen der Schnittpunkte, der Seitenkanten mit E und findet durch Herunterloten die zugehörigen ersten Projektionen. Dadurch erhalten wir die Projektionen der Schnittfigur. Ihre wahre Gestalt finden wir durch Umlegung, wobei mit Vorteil die affine Verwandtschaft zwischen Grundriß und Umlegung verwertet werden kann. Wie ergibt sich die Abwicklung des Mantels der Pyramide?

Die Umlegung ebener Figuren geht (ohne Benutzung affiner Beziehungen!) am einfachsten vonstatten, wenn ihre Ebene wie bei Aufg. 1 auf einer Bildebene senkrecht steht. Auf diesen einfachen Fall läßt sich der allgemeine mit beliebiger Ebene leicht zurückführen. Zugleich gestaltet sich dadurch die Bestimmung der Schnittfigur erheblich bequemer.

II. Lösung (Fig. 97). Wir nehmen eine zur ersten Spur e_1 senkrechte dritte Bildebene (Seitenebene) S zu Hilfe. Ihre erste

[1]) S. Rektifikation des Kreises § 15.

Spur s_1 ist dann zu e_1, ihre zweite s_2 zur Bildachse senkrecht. Projizieren wir die Pyramide auf die Seitenebene $\mathfrak{S}$, so müssen die Projektionen der Schnittfigur, da auch $\mathfrak{S} \perp \mathfrak{E}$ ist, auf ihrer Schnittgeraden mit $\mathfrak{E}$ liegen. Die Drehungsradien der Ecken der Schnittfigur projizieren sich dabei in wahrer Größe. Legen wir nun die Seitenebene $\mathfrak{S}$ um s_1 in die Zeichenebene um, so bewegen sich die dritten Projektionen der Ecken der Schnittfigur in Kreisbahnen,

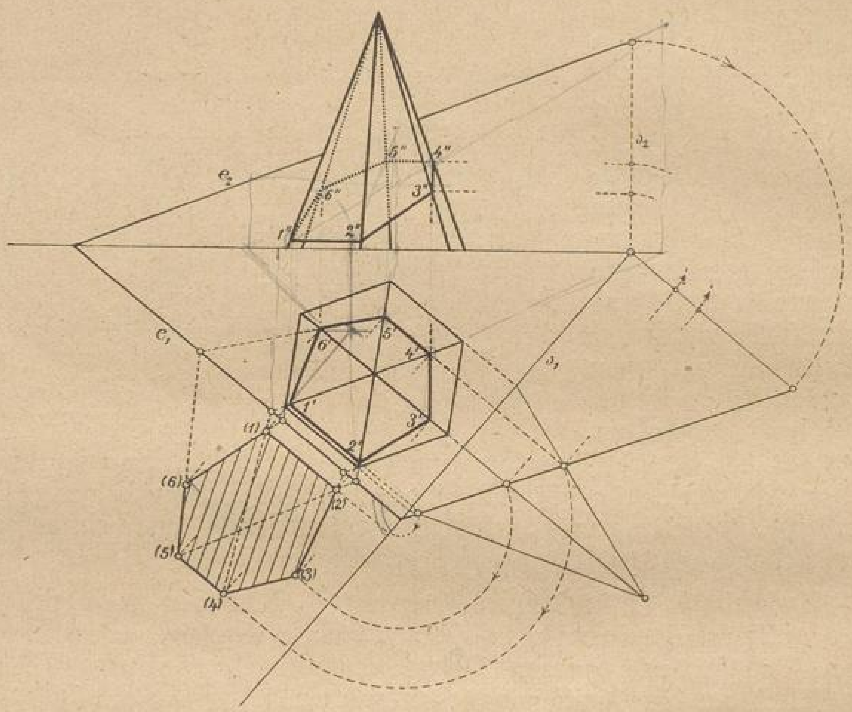


Fig. 97.

die zu s_1 senkrecht sind, liegen also nach der Umklappung mit ihren entsprechenden ersten Projektionen auf je einer Senkrechten zu s_1. Danach gestaltet sich die Lösung der Aufgabe kurz folgendermaßen:

Aus den dritten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur gewinnt man genau wie aus dem Aufriß ($\mathfrak{S}$ als Aufrißebene betrachten!) ihre ersten Projektionen, aus diesen durch Hinaufloten ihre zweiten Projektionen. Die Bestimmung der wahren Größe der Schnittfigur erfolgt entsprechend wie bei Aufg. 1.

3a) **Aufgabe 5.** Den Schnitt eines geraden Kreiskegels, dessen Grundkreis in $\mathfrak{B}_1$ liegt, mit einer zu $\mathfrak{B}_2$ senkrechten Ebene $\mathfrak{E}$ zu bestimmen. Ferner soll die Schnittfigur in wahrer Größe und die Abwicklung des Mantels nebst Schnittkurve gezeichnet werden.

1. Geht $\mathfrak{E}$ durch die Spitze S des Kegels, so ist der Schnitt ein Dreieck.

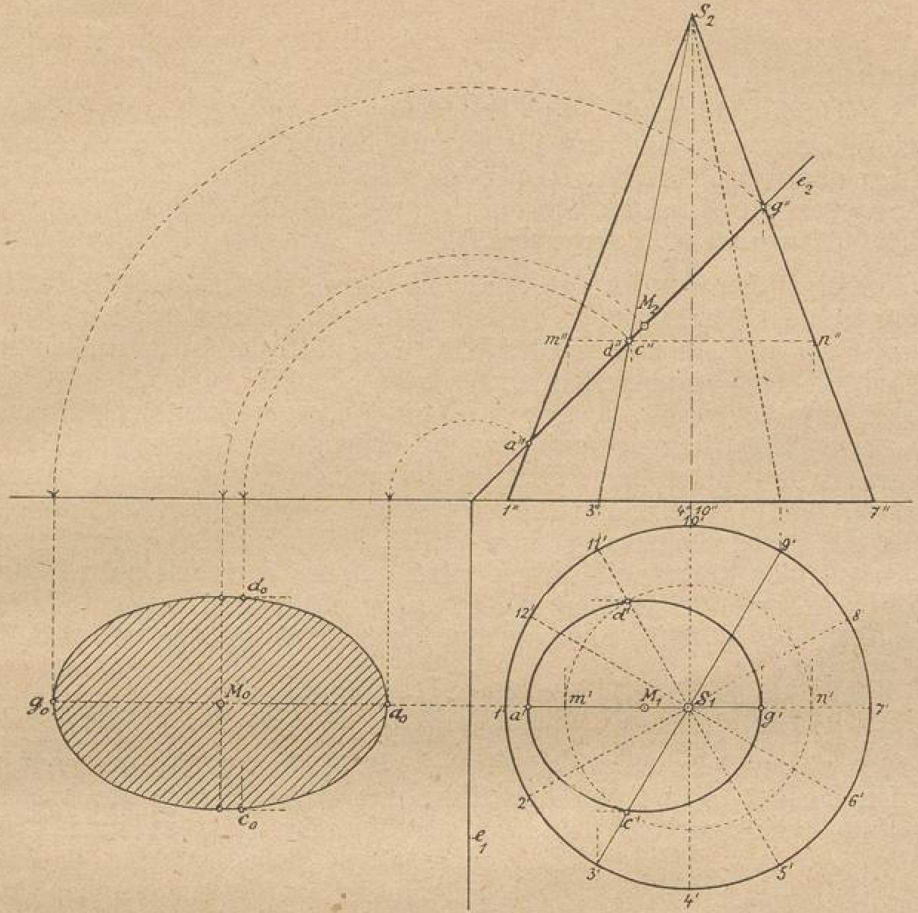


Fig. 98a.

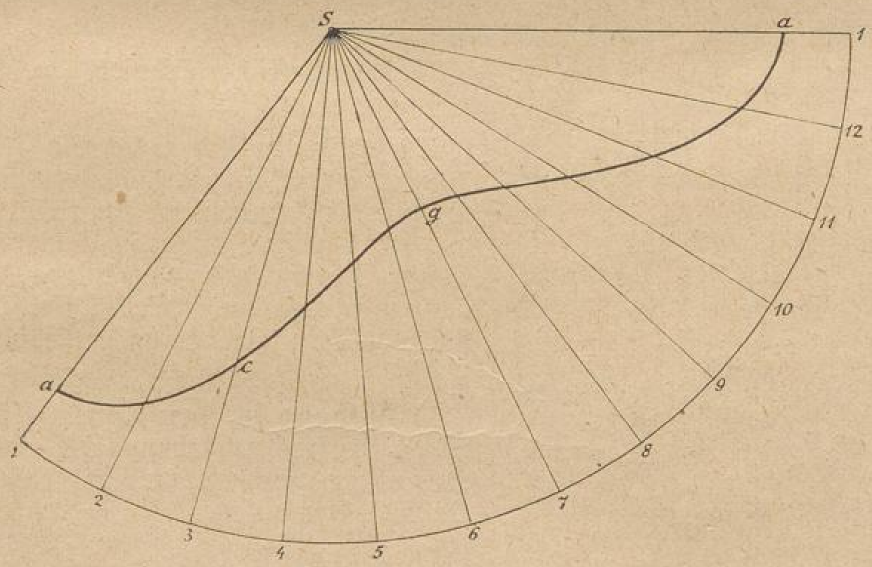


Fig. 98b.

2. Ist E parallel zur Grundebene, so ist der Schnitt ein Kreis[1]) (Darstellung!).

3. Geht E nicht durch S und ist schief zu B_1, so sind drei Fälle zu unterscheiden. Je nachdem die Schnittebene E keiner Seitenlinie, einer oder zwei Seitenlinien parallel ist (also alle schneidet, eine oder zwei nicht schneidet), ergibt sich als Schnittkurve eine **Ellipse, Parabel** oder **Hyperbel.**[1])

I. **Elliptischer Schnitt** (Fig. 98a). Die zweite Projektion der Schnittfigur ist die auf e_2 liegende Strecke a″g″. Zur Bestimmung der ersten Projektion und der wahren Größe der Schnittkurve durch Umlegung teilen wir den Grundkreis in eine beliebige Anzahl, z. B. 12, gleicher Teile und ziehen die zu den Teilpunkten gehörigen Mantellinien. Die erste Projektion des auf einer beliebigen Mantellinie, z. B. S3, liegenden Punktes c der Schnittkurve können wir in doppelter Weise finden. Entweder zeichnen wir die beiden Projektionen der Mantellinie S3, deren zweite a″g″ in c″ trifft, und loten diesen Punkt auf $S_1 3$ herunter, oder wir ziehen durch c″ die Parallele m″n″ zur Achse, die den Aufriß des durch c gehenden zur Grundebene parallelen Schnittkreises darstellt, und zeichnen diesen im Grundriß, wo er $S_1 3'$ in c′ trifft.

Die wahre Größe der Ellipse finden wir durch Umlegung wie in Aufg. 1. Wie erhält man ihren Mittelpunkt M?

Der abgewickelte Kegelmantel (Fig. 98b) ist ein Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Mantellinie und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist. Um die Schnittkurve in der Abwicklung zu erhalten, ziehen wir die zu den Endpunkten der übertragenen Bogenstücke gehörigen Radien und ermitteln auf ihnen den Punkt der Schnittkurve, z. B. $Sc = S_2 m''$.

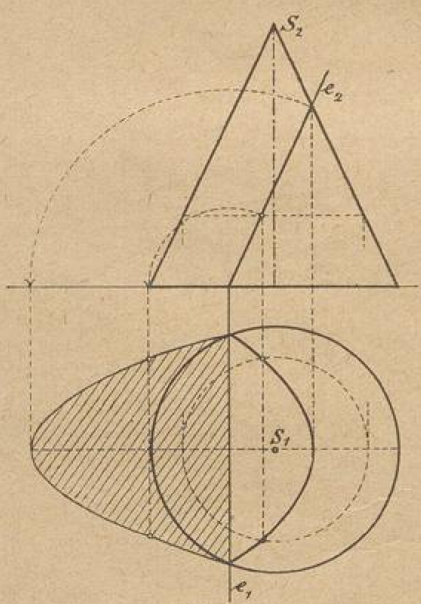


Fig. 99.

II. **Parabolischer Schnitt** (Fig. 99). Lösung wie im Fall I.

III. **Hyperbolischer Schnitt** (Fig. 100). Der Einfachheit halber nehmen wir hier die Schnittebene E parallel B_2 an. E schneidet auch die über die Spitze S erweiterte Kegelfläche, so daß wir eine aus zwei Ästen bestehende Schnittkurve erhalten. Lösung s. Fig.

b) Aufgabe 6. Den Schnitt einer zu B_2 senkrechten Ebene mit einer Kugel zu zeichnen und in wahrer Größe darzustellen.

[1]) Vgl. L. I. § 2; II. § 51—53.

Aufgabe 7. Die Erdkugel samt Gradnetz abzubilden, wenn ihre Achse zu B_1 senkrecht steht.

Die erste Projektion, das Bild der oberen Halbkugel, heißt die orthographische Polarprojektion, die zweite, das Bild der vorderen Halbkugel, die orthographische Äquatorialprojektion der Erdkugel. Wie bilden sich bei den beiden Projektionen die Breiten- und Längenkreise ab? Welche Teile erleiden die stärkste Verzerrung?

§ 22.

Zurückdrehung ebener Gebilde (Umkehrung der Aufgabe der Umlegung).

1) Unter „Zurückdrehen" (Zurückschlagen) eines ebenen Gebildes oder Punktes versteht man die Umkehrung der Aufgabe der Umlegung.

Grundaufgabe. Von einem in der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gelegenen Punkte P ist seine Umlegung P_0 und die erste Spur gegeben. Es sind seine Projektionen zu bestimmen.

Die Lösung (s. Fig. 90) nimmt den umgekehrten Verlauf wie die der Grundaufgabe § 20.

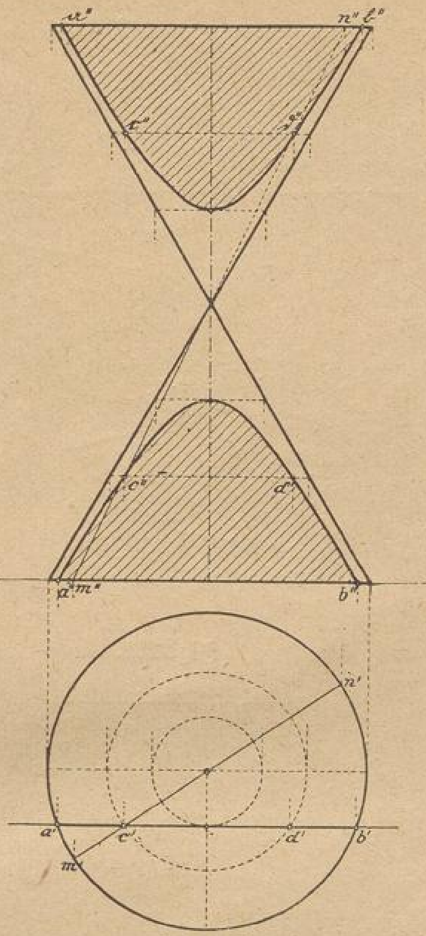


Fig. 100.

Aufgabe 1. Von einem in der Ebene E gelegenen Quadrat, deren erste Spur e_1 und erste Tafelneigung α_1 gegeben sind, (Vieleck) ist die Umlegung in die Grundebene gegeben. Die Projektionen der Figur zu zeichnen.

Aufgabe 2. In einer zu B_2 senkrechten und zu B_1 schiefen Ebene $E = (e_1, e_2)$ liegt ein Kreis, von dem die Umlegung seines Mittelpunktes M und der Radius r gegeben sind. Seine Projektionen zu zeichnen.

Die erste Projektion ist eine Ellipse. Wie liegen ihre große und kleine Achse?

2) Aufgabe 3. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide liegt mit einer Seitenfläche 1 2 S, die gegeben ist, in der Grundebene. Die Projektionen des Körpers zu zeichnen (Fig. 101).

Das gegebene Seitendreieck 1 2 S fällt mit seinem Grundriß $1'2'S_1$ zusammen. Um die erste Projektion der Grundfläche zu ermitteln, zeichnen wir diese in wahrer Größe an die Grundseite $1'2'$, be-

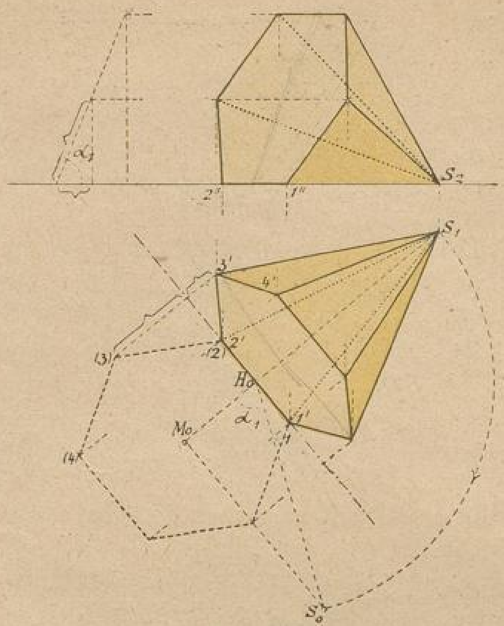


Fig. 101.

stimmen den Neigungswinkel α_1 der Seitenfläche mit der Grundfläche und drehen diese um $1'2'$ als Achse für den Winkel α_1 als ihre erste Tafelneigung zurück. Wie ergeben sich die Aufrisse der nicht in der Grundebene gelegenen Punkte des Körpers?

Aufgabe 4. Ein auf der Grundebene ruhendes regelmäßiges Dodekaeder darzustellen (Fig. 102).

An die Seiten des in der Grundebene liegenden Fünfecks $1'\,2'\,3'\,4'\,5'$ zeichnen wir die angrenzenden Seitenflächen, z. B. I, II, des Körpers in wahrer Größe und suchen ihre ersten Projektionen dadurch zu bestimmen, daß wir die Fünfecke hochklappen, bis je zwei zu einem Eckpunkt des Fünfecks gehörende Kanten, z. B. $2'b_0$ und $2'b_0$, in b zusammenfallen. Dabei bewegen sich die drei freien Eckpunkte der hochgeklappten Fünfecke (a_0, f_0, b_0 von I; b_0, g_0, c_0 von II) in Kreisbögen, deren Ebenen senkrecht zu den zugehörigen festliegenden Seiten und deren Projektionen daher senkrechte Strecken zu diesen sind. Bezeichnen wir mit a′, f′ und b′ die ersten Projektionen der Punkte a, f und b, so sind demnach a_0a', f_0f', b_0b' senkrecht zur Seite $1'\,2'$ oder ihrer Verlängerung, ebenso b_0b', g_0g', c_0c' senkrecht zur Seite $2'\,3'$ oder ihrer Verlängerung. Die erste Projektion b′ des Punktes b ist also der Schnittpunkt der von b_0 auf $1'\,2'$ und von b_0 auf $2'\,3'$ gefällten Lote. Die entsprechenden Punkte a, c′, d′, e′, liegen auf dem um den Mittelpunkt m′ des Fünfecks $1'\,2'\,3'\,4'\,5'$ mit dem

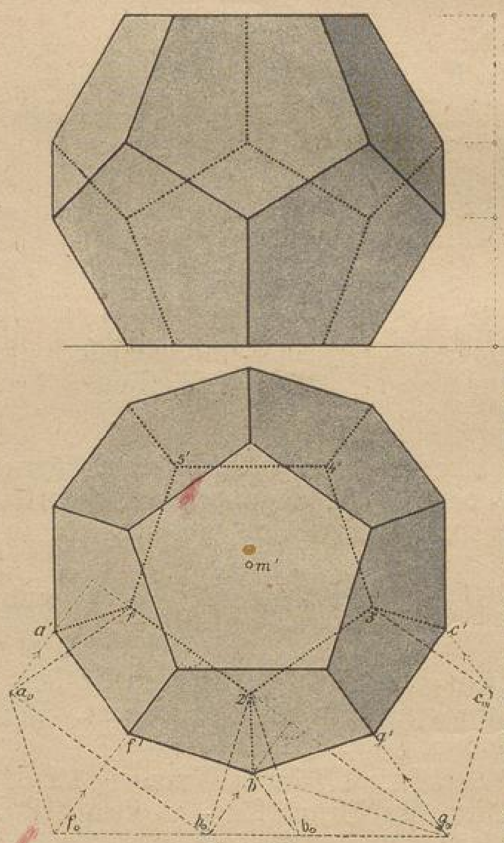


Fig. 102.

Radius m'b' beschriebenen Kreise, ferner auf den durch die Eckpunkte des Fünfecks gehenden Radien.

Zur Ermittlung der ersten Projektionen f', g', h', i', k' der äußersten Ecken f_0, g_0, h_0, i_0, k_0 genügt es ebenfalls, einen Bildpunkt, z. B. f', zu bestimmen (Grund?). Wir finden ihn leicht auf Grund der zwischen Umlegung und Projektion bestehenden Affinität. Die Seiten f_0b_0 und b_0g_0 bilden eine Gerade (Beweis!), von der beim Hochklappen des Fünfecks I der Punkt g_0 liegen bleibt. Weil b' schon gefunden ist, haben wir nur die Verlängerung von g_0b' mit dem von f_0 auf 1' 2' gefällten Lote zum Schnitt zu bringen.

Damit ist die erste Projektion der unteren Hälfte der Oberfläche des Dodekaeders gefunden. Die Projektion der oberen Hälfte der Oberfläche kann nun leicht hinzugefügt werden. Welche Ecken bestimmen die Seiten zweier regelmäßiger Zehnecke?

Für den Aufriß des Körpers hat man nur die ersten Tafelabstände der Ecken zu bestimmen, s. Fig. Genauigkeitsproben!

Setze das in Fig. 102 dargestellte regelmäßige Dodekaeder in schiefe Parallelprojektion für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30°$.

§ 23. Durchdringung zweier Körper, insbesondere ebenflächiger Körper.

1 a) Wenn zwei Körper einander durchschneiden („durchdringen"), so sind zwei Fälle möglich:

I. Der eine durchbohrt den andern (Fig. 109). Man spricht dann von einer Durchbohrung oder vollständigen Durchdringung. Die Schnittfigur der beiderseitigen Oberflächen der Körper, die Durchdringungsfigur, besteht aus zwei getrennten geschlossenen Figuren, bei zwei ebenflächigen Körpern oder Vielflachen aus zwei Raumvielecken.

II. Der eine Körper dringt in den andern ein oder er schneidet aus ihm ein seitliches Stück heraus (Fig. 106). In diesem Falle hat man es mit einer Eindringung oder einer unvollständigen Durchdringung zu tun. Die Durchdringungsfigur wird nur von einer geschlossenen Figur, bei Vielflachen von einem räumlichen Vieleck gebildet.

b) Die Seiten der **Durchdringungsfigur zweier Vielflache** sind die Schnittlinien, in denen sich die begrenzenden Flächen der Körper schneiden, ihre Ecken die Schnittpunkte, in denen die unverlängerten Kanten eines jeden der beiden Körper die Flächen des andern treffen. Dementsprechend kann die Durchdringungsfigur entweder durch Ermittlung der Seiten (Flächenverfahren) oder der Ecken (Kantenverfahren) gefunden werden. Das **Kantenverfahren** ist im allgemeinen das einfachere und wird deshalb in der Regel angewandt. Es besteht darin, daß man die beiderseitigen Schnittpunkte der unverlängerten Kanten eines Vielflachs mit den Flächen des andern bestimmt und die so erhaltenen Eckpunkte der Durchdringungsfigur in richtiger Reihenfolge verbindet. Dabei ist, da jede Seite der Durchschnittfigur der Schnitt zweier Ebenen ist, die wichtige Regel zu beachten, daß je zwei Eckpunkte dann und nur dann zu verbinden sind, wenn sie in einer und derselben Fläche sowohl des ersten als auch des zweiten Körpers liegen.

Die Bestimmung der Durchdringungsfigur von zwei Vielflachen kommt also bei der Anwendung des Kantenverfahrens auf die wiederholte Anwendung der schon früher behandelten Aufgabe (§ 14, Aufg. 4) hinaus, den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene, die durch ein in ihr liegendes Vieleck gegeben ist, zu finden.

Eine Seite der Durchschnittfigur ist nur dann sichtbar, wenn die beiden Körperflächen, deren Schnitt sie ist, sichtbar sind.

Die Durchdringungsaufgaben spielen eine wichtige Rolle in den praktischen Anwendungen der darstellenden Geometrie, namentlich im Hoch- und Maschinenbau.

2) Der Anschaulichkeit halber beginnen wir mit einigen einfachen Beispielen, von denen die beiden ersten Durchdringungen darstellen, wie sie bei zusammengesetzten Dächern vorkommen.

Aufgabe 1. Die Durchdringung zweier gerader dreiseitiger Prismen, die mit je einer Seitenfläche auf der Grundebene ruhen, zu bestimmen (Fig. 103).

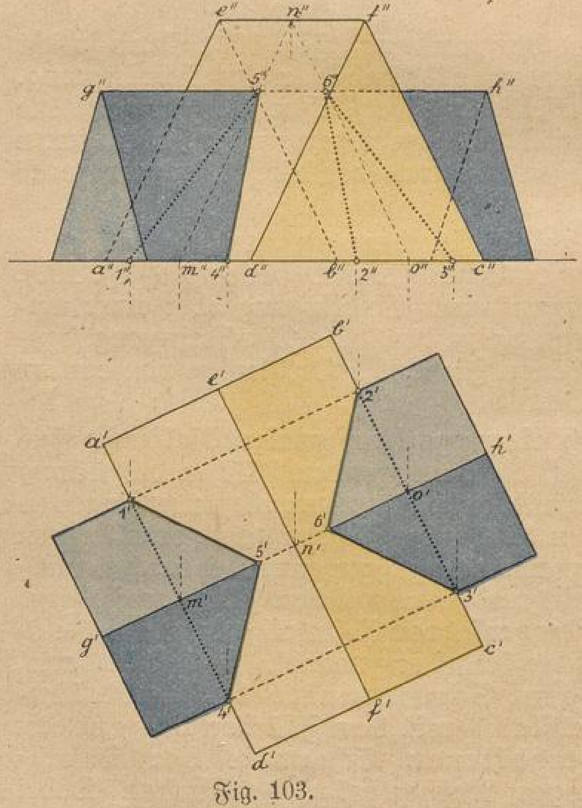


Fig. 103.

Die Punkte 1′2′3′4′ sind die Grundrisse der Einstoßpunkte der beiderseitigen in der Grundebene liegenden Kanten des einen Prismas in die Seitenflächen des anderen. Ihre Aufrisse liegen auf der Achse. Da die zur Grundebene nicht parallelen Kanten jedes der beiden Körper außerhalb der Projektionen der Flächen des anderen liegen, so brauchen nur noch die oberen Kanten (Firstkanten) untersucht zu werden. Wie der Aufriß zeigt, trifft die Firstkante ef des Prismas II keine Fläche des ersten. Dagegen trifft die Firstkante gh des Prismas I die Seitenflächen adfe und bcfe von II. Um die Einstoßpunkte zu finden, legen wir durch gh die Lotebene zu B_1, die den Aufriß der Seitenfläche adfe in m″ n″ und den der Seitenfläche bcfe in o″ n″ schneidet. Die Schnittpunkte 5″ und 6″ von g″ h″ mit m″ n″ und o″ n″ sind die gesuchten Einstoßpunkte im Aufriß. Ihre Grundrisse erhalten wir durch Herunterloten. Welches sind die beiden Vielecke der Durchdringungsfigur?

Aufgabe 2. Die Durchdringung eines dreiseitigen schiefabgeschnittenen Prismas (I), dessen obere Flächen die Form eines Walmdaches besitzen, mit einem halben regelmäßig-achtseitigen Prisma (II) zu finden. Fig. 104.

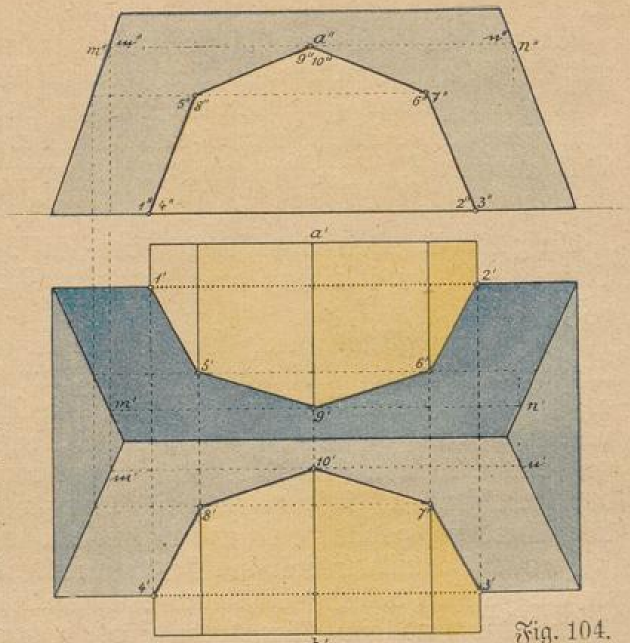


Fig. 104.

Die beiden Prismen ruhen je mit einer Seitenfläche auf der Grundebene. Die Seitenkanten des ersten sind parallel, die des zweiten senkrecht zur Aufrißebene. Die Aufrisse der Seitenkanten des zweiten Prismas schrumpfen daher im Aufriß in Punkte zusammen, z. B. ist a″ der Aufriß der Firstkante a′ b′. Um ihre Einstoßpunkte in die Seitenflächen von I zu finden, legen wir durch ab am einfachsten eine B_1 parallele Hilfsebene (zweite Lotebene), die die vordere und hintere Seitenfläche von I im Aufriß in den zur Achse parallelen Strecken m″ n″ und m″ n″, die zusammenfallen, schneidet. Wie findet man daraus die Schnittlinien im Grundriß und daraus die Grundrisse der Einstoßpunkte 9 und 10?

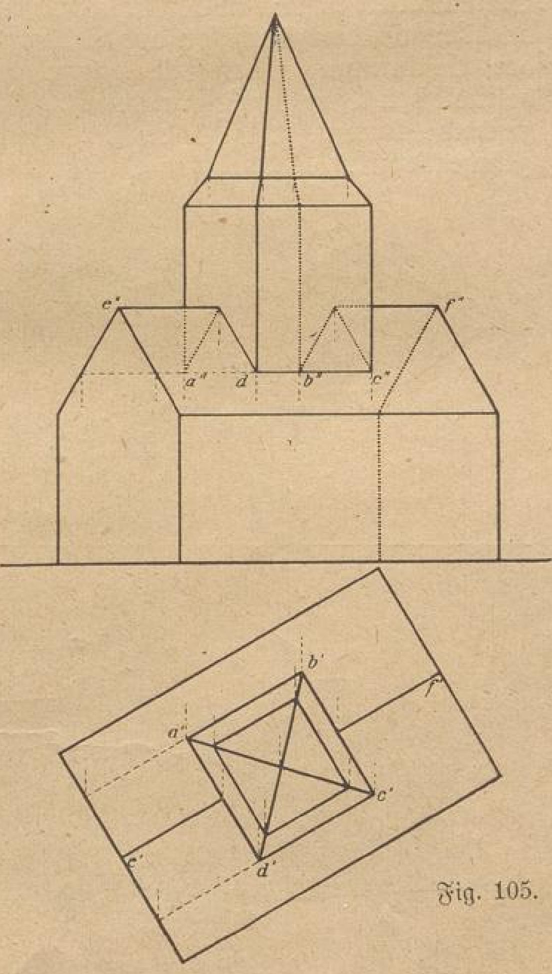


Fig. 105.

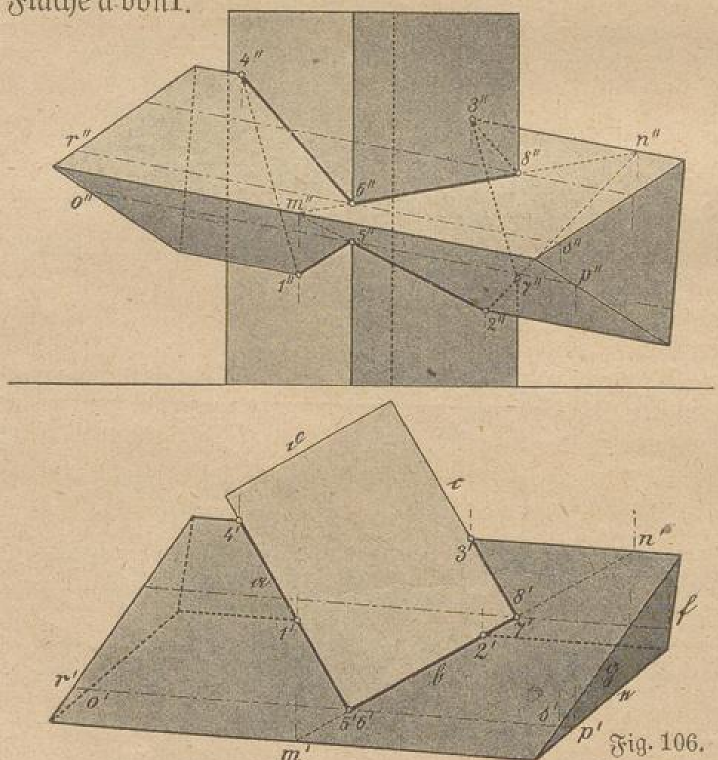
Aufgabe 3. Den Durchschnitt einer prismatischen Dachfläche mit einem quadratischen Turme zu finden (Fig. 105).

Wir benutzen als Hilfsebenen die ersten Lotebenen durch die Grundkanten ab und cd des Turmes und durch die Firstkante ef des Daches. Das Weitere s. Fig. Aus was für Körpern ist der Turmhelm entstanden?

Aufgabe 4. Den Durchschnitt eines auf der Grundebene stehenden Quaders (I) mit einem dreiseitigen Prisma (II) zu bestimmen (Fig. 106).

Um mit möglichst wenig Bezeichnungen auszukommen, hauptsächlich aber um nach Bestimmung der Ecken der Durchdringungsfigur rasch und sicher feststellen zu können, welche Ecken miteinander zu verbinden sind, bezeichnen wir jede Seitenfläche der beiden Körper mit einem kleinen deutschen Buchstaben, den wir an die Grundkante der betreffenden Fläche setzen. Die von zwei Flächen, z. B. a und b des Quaders, gebildete Kante bezeichnen wir dann mit (ab).

Zunächst ermitteln wir die Einstoßpunkte der Kanten des Prismas in die Flächen des Quaders und erhalten die Punkte 1, 2, 3, 4. Ihre Grundrisse sind die Schnittpunkte der Grundkanten von I mit den Seitenkanten von II in der Grundebene; ihre Aufrisse liegen senkrecht darüber auf den Aufrissen der Seitenkanten von II. Gleichzeitig mit der Bestimmung jeder Ecke tragen wir in einem neben der Figur befindlichen Verzeichnis ein, durch welche Kante und Fläche jede Ecke zustande kommt, z. B. 1 durch Schnitt der Kante (ef) von II mit Fläche a von I.



	I	II
1	a	ef
2	b	ef
3	c	fg
4	a	fg
5	ab	e
6	ab	g
7	bc	f
8	bc	g

Fig. 106.

Die Schnittpunkte der Kanten von I, von denen nur die Kanten (ab) und (bc) in Betracht kommen, mit den Flächen von II können auf verschiedene Weise gewonnen werden. Entweder legen wir durch die Grundkante der Fläche b die Lotebene zu B_1, die II in dem Dreieck mn2 schneidet. Die Schnittpunkte der Seiten dieses Dreiecks im Aufriß mit den Aufrissen der Seitenkanten von I sind die zweiten Projektionen ihrer Einstoßpunkte in II. Oder wir legen durch (ab) und (bc) als Hilfsebenen erste Lotebenen, die zu den Seitenkanten von II parallel sind und daher die Seitenflächen von II in je zwei Seitenlinien schneiden. Die durch die Kante (ab) von I gelegte erste Lotebene schneidet z. B. die Seitenflächen von I in den Seitenlinien op und rs, deren Schnittpunkte mit der Kante (ab) ihre Einstoßpunkte 5 und 6 in das Prisma ergeben.

Die Reihenfolge, in der die konstruierten Ecken der Durchdringungsfigur zu verbinden sind, ist bei der einfachen Lage der gegebenen Körper leicht zu übersehen. Sichere Auskunft gibt in allen Fällen die in dem Verzeichnis gegebene Übersicht über die Entstehung der einzelnen Ecken. Aus ihr geht hervor, daß nach der unter 1b) angegebenen Regel die Reihenfolge der zu verbindenden Punkte, wenn man von 1 ausgeht, 1 4 6 8 3 7 2 5 lautet. Da bei dem in der Regel angegebenen Verfahren kein Punkt übriggeblieben ist, folgt ohne weiteres, daß nur eine Schnittfigur vorhanden ist.

3) Bei Durchdringungen von **Prismen und Pyramiden,** die mit einer Grundfläche in der ersten Bildebene liegen, kann die Ermittlung der Schnittfigur dadurch bedeutend vereinfacht werden, daß man statt der Lotebenen eine Reihe von Hilfsebenen benutzt, deren Schnittlinien mit den Flächen der Körper möglichst einfache sind. Das sind

1. bei zwei Pyramiden Ebenen, die durch beide Spitzen gehen;
2. bei Pyramide und Prisma Ebenen, die durch die Spitze der Pyramide parallel zu Seitenkanten des Prismas gelegt sind;
3. bei zwei Prismen Ebenen, die parallel den beiden Seitenkanten sind.

Diese Hilfsebenen, die durch die Seitenkanten jedes Körpers gelegt werden, schneiden die Flächen des anderen in Erzeugenden[1]) (Seitenlinien), deren Schnittpunkte mit den zugehörigen Kanten Punkte der Durchdringungsfigur sind.

Zum leichteren Verständnis dieser praktisch sehr wichtigen Durchdringungsaufgaben lösen wir erst die folgenden beiden vorbereitenden Aufgaben.

Aufgabe 5. Den Schnitt einer Geraden g mit einer auf der Grundebene stehenden Pyramide zu bestimmen (Fig. 107a und b).

Der Anschaulichkeit halber gehen wir von dem Schrägbilde Fig. 107a aus. Die durch die Spitze S und die Gerade g gelegte Hilfsebene H

[1]) Das sind Linien, durch die wir uns die Mantelfläche erzeugt denken können!

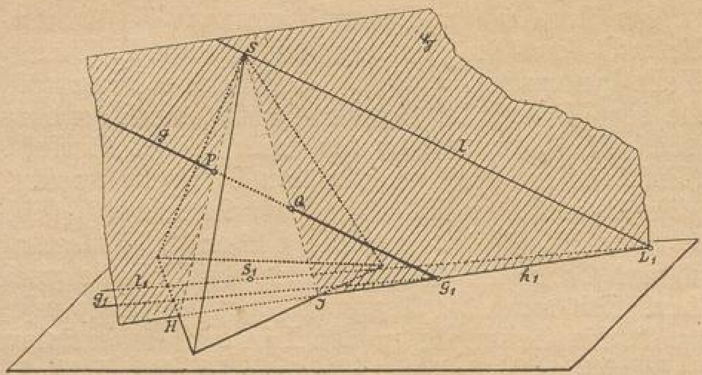


Fig. 107 a.

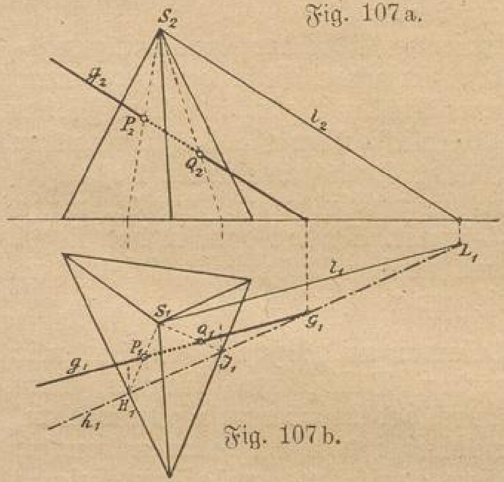


Fig. 107 b.

schneidet die Pyramide in den Seitenlinien SH und SI, deren Schnittpunkte mit g, P und Q die gesuchten Einstoßpunkte von g in den Körper sind. Die Punkte H und I sind die Schnittpunkte der ersten Spur h_1 von $\mathfrak{H}$ mit den Grundkanten der Pyramide, so daß unsere Aufgabe nur darauf hinausläuft, die erste Spur h_1 von $\mathfrak{H}$ zu finden. Zunächst muß h_1 durch den ersten Spurpunkt G_1 von g hindurchgehen. Ziehen wir durch S zu g die Parallele l, so liegt l in $\mathfrak{H}$ und daher auch der erste Spurpunkt L_1 von l auf h_1. Die durch L_1G_1 gezogene Gerade ist die gesuchte erste Spur von $\mathfrak{H}$.

Löse danach die Aufgabe in gerader Parallelprojektion (Fig. 107 b).

Aufgabe 6. Den Schnitt einer Geraden g mit einem Prisma zu bestimmen.

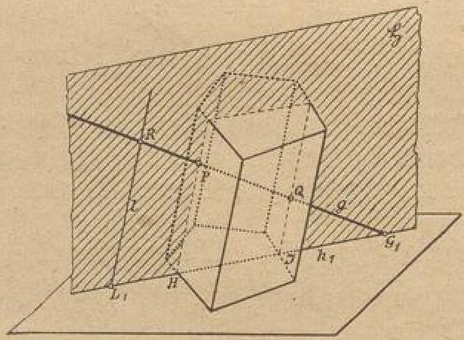


Fig. 108.

Wir legen (s. Schrägbild Fig. 108) durch g die Hilfsebene $\mathfrak{H}$ parallel den Seitenkanten des Prismas. Ihre erste Spur h_1, deren wir nur zur Zeichnung bedürfen, finden wir dadurch, daß wir durch einen beliebigen Punkt R von g die Parallele l zu den Seitenkanten des Prismas ziehen, deren erster Spurpunkt L_1 ist. Die durch L_1 und G_1 bestimmte Gerade ist h_1. Wie erhalten wir nun die Einstoßpunkte P und Q?

Lösung der Aufgabe in gerader Parallelprojektion!

Aufgabe 7. Die Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma zu finden (Fig. 109).

Die Körper stehen mit einer Grundfläche auf der ersten Bildebene. Lösung im Anschluß an die Aufg. 5 und 6.

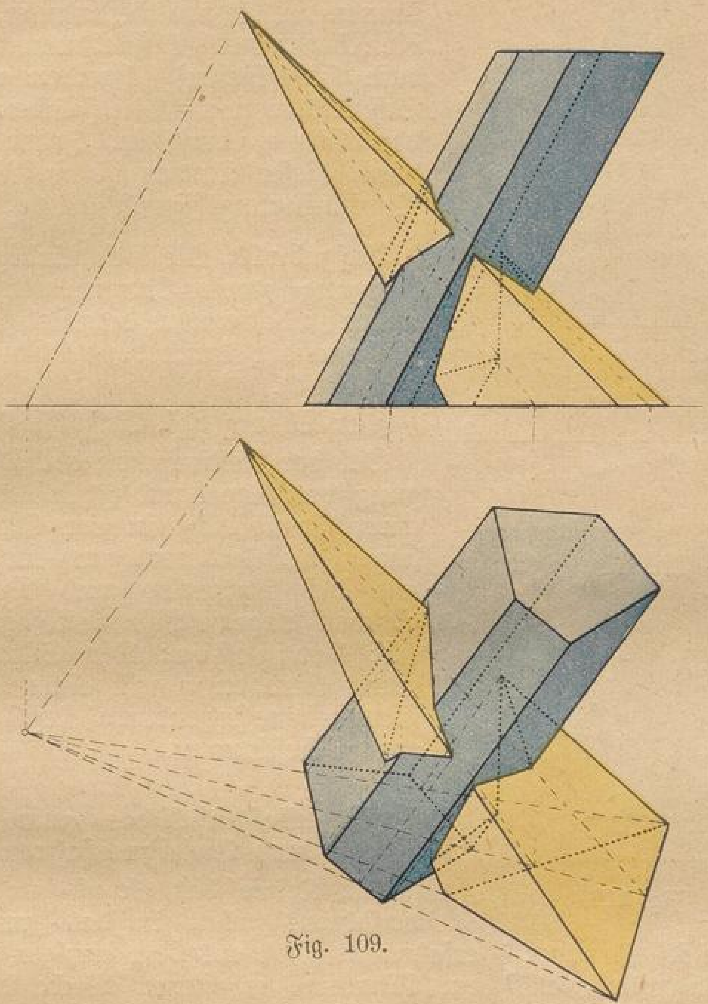


Fig. 109.

Aufgabe 8. Die Durchdringung zweier Prismen, die eine Grundfläche in der ersten Bildebene haben, zu bestimmen.

Die Hilfsebenen haben parallele Spuren! Lösung im Anschluß an Aufg. 6.

Aufgabe 9. Die Durchdringung zweier Pyramiden zu finden.

Wir lösen die Aufgabe für eine quadratische und eine regelmäßige achtseitige Pyramide, deren Achsen zusammenfallen und die sich so durchdringen, daß ihre Seitenflächen die Dachflächen eines gotischen Turmhelms bilden. Ihre Grundflächen sind parallel B_1. Lösung s. Fig. 110. Was ist in der Zeichnung noch hinzugefügt? Zu welchem Zwecke?

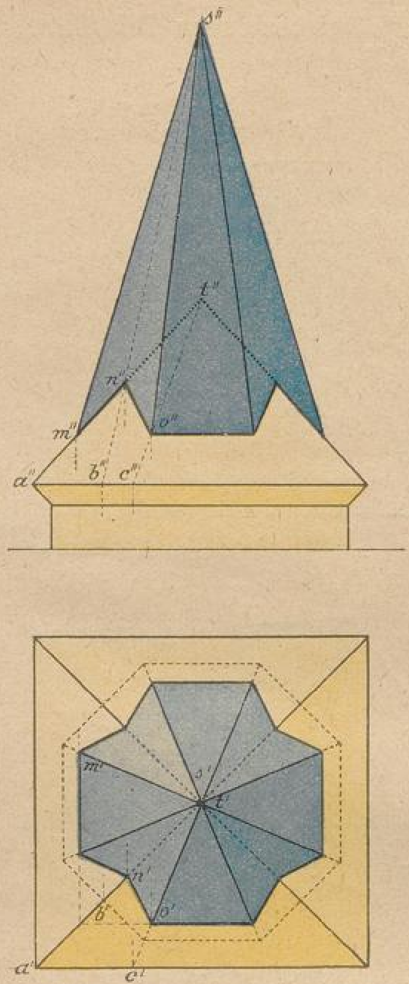


Fig. 110.

4) Die **Durchdringungsfigur zweier krummflächiger Körper** besteht aus einer oder mehreren Kurven. Einzelne Punkte können wir dadurch bestimmen, daß wir die Körper durch Hilfsebenen (oder andere Hilfsflächen) schneiden und ihre Schnittkurven mit den Flächen der beiden Körper ermitteln. Jeder Schnittpunkt dieser Kurven ist ein Punkt der Durchdringungsfigur.

Aufgabe 10. Die rechtwinklige Durchdringung zweier kongruenter Halbzylinder zu bestimmen, die mit der Schnittfläche auf der Grundebene ruhen (Kreuzgewölbe).

Zur Lösung vgl. Aufgabe 2.

Bei der Bestimmung der Durchdringung von Kegel und Zylinder, die mit einer Grundfläche in der Grundebene liegen, verfährt man ganz entsprechend wie bei Pyramide und Prisma in gleicher Lage. Löse erst die beiden Hilfsaufgaben: Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einem auf der Grundebene stehenden a) Kegel, b) Prisma zu bestimmen.

§ 24. Geschichtliches zum Grund- und Aufrißverfahren.

Die Keime des Grund- und Aufrißverfahrens gehen in das graue Altertum zurück. Genaueres erfahren wir erst aus dem einzigen uns über diesen Gegenstand aus dem Altertume erhaltenen Buche des römischen Baumeisters Vitruvius Pollio, „De architectura“, das dem Kaiser Augustus gewidmet ist. In diesem z. T. nach griechischen Quellen bearbeiteten Werke spricht er von Grund- und Aufriß unter dem Namen „Ichnographie und Orthographie“.[1])

Die einfachen Regeln dieser Kunst wurden in der Praxis von Geschlecht zu Geschlecht vererbt und gelangten in den Bauhütten des Mittelalters, besonders in Anwendung auf den Steinschnitt, zu hoher Blüte. Kein Geringerer als Albrecht Dürer hat in seinem klassischen Büchlein „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt“ (Nürnberg, 1525 und 1538) die Regeln der mittelalterlichen Rißkunst zusammengestellt.

Auch später bildete noch das wichtigste Anwendungsgebiet der „Rißkunst“

[1]) Der erste Teil des Wortes stammt von ichnos (griech.) Spur, Fußtritt. Vgl. das deutsche Wort „Riß“!

der Steinschnitt[1].) Aufgaben über ihn behandelten Desargues, 1593—1662 (Coupe des pierres, 1640) und Frézier, 1682—1772 (La théorie et la practique de la coupe des pierres et des bois, Straßburg 1738/39). Dieser benutzt Grund- und Aufriß und behandelt besonders Durchdringungen und Abwicklungen.

Dennoch blieb die wissenschaftliche Begründung und Entwicklung des Verfahrens dem großen französischen Geometer G. Monge (Géométrie descriptive, Paris 1798) vorbehalten. Dadurch, daß er die Schnittgerade der beiden Bildtafeln als Achse benutzte und um sie die eine in die andere umlegte, setzte er Grund- und Aufriß in eine feste Beziehung. Punkte, Gerade und Ebenen, ferner gekrümmte Linien und Flächen stellte er durch ihre Projektionen oder Spuren dar und hat durch die Behandlung von Aufgaben die Hauptverfahren der darstellenden Geometrie begründet und vollständig entwickelt. Vgl. § 1.

Anmerkung. In dem oben erwähnten Büchlein von Dürer findet man z. B. die Kegelschnitte, Schraubenlinien, Körper wie Dodekaeder, Ikosaeder in Grund- und Aufriß nebst Abwicklung so dargestellt, wie man sie nicht anders in einem guten neueren Buch erwarten kann. Um das überaus lehrreiche Buch weiteren Kreisen zugänglich zu machen, hat der Maler Hans Thoma eine Neuherausgabe im Verlage der süddeutschen Monatshefte veranlaßt und sie mit einem Vorwort versehen unter dem Titel „Albrecht Dürers Unterweisung der Messung um einiges gekürzt und dem neueren Sprachgebrauch angepaßt", herausgeg. von Alfred Peltzer.

Dritter Abschnitt.

Schattenbestimmung der Parallelprojektion.

§ 25. Allgemeines. Hauptsätze über Schatten von Strecken bei Parallelbeleuchtung.

1 a) Von einer Zeichnung fordern wir mit Recht, daß sie eine deutliche Vorstellung von dem abgebildeten Gegenstande bei dem Beschauer hervorrufe. Durch die bisherigen Darstellungen, die bloße Linearzeichnungen (Name!) sind, wird das nicht immer erreicht. Dagegen lassen sich Lage und Gestalt eines Körpers aus seiner Darstellung leichter erkennen und der gezeichnete Körper besser anschaulich auffassen, wenn wir ihn uns beleuchtet denken und die Schatten, die er auf die Bildebene oder auf einen anderen Körper wirft, in die Zeichnung mit aufnehmen.

[1]) Die Kunst des Steinschnitts ist uralt. 1. Kön. 6, 7 heißt es vom Tempelbau Salomos: „Und da das Haus gesetzet ward, waren die Steine zuvor ganz zugerichtet, daß man keinen Hammer, noch Beil, noch irgend ein eisern Werkzeug im Bauen hörte."

b) Um die Schattenbestimmung möglichst einfach zu gestalten, nehmen wir die Lichtquelle als punktförmig an.

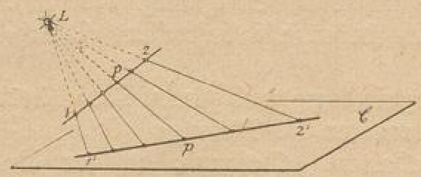


Fig. 111.

Ist Fig. 111 L eine solche Lichtquelle und P ein materieller **Punkt**, so wird durch ihn die Wirkung des Lichtstrahles LP in seiner Verlängerung aufgehoben, so daß hinter ihm ein geradliniger Schattenraum entsteht, den wir als den vom Punkte P geworfenen **Schattenstrahl** bezeichnen. Trifft dieser eine hinter P befindliche Auffangfläche, z. B. die Ebene E, im Punkte p, so ist an dieser Stelle kein Licht vorhanden. Der Punkt p heißt der **Schlagschatten** des Punktes P.

Man findet also den Schlagschatten eines Punktes P auf eine Fläche E, indem man den durch P gehenden Lichtstrahl mit E zum Schnitt bringt.

Eine **Gerade** 1 2 (Fig. 111), die wir uns materiell denken müssen (dünner Stab, Draht), wirft hinter sich einen ebenenförmigen Schatten, die **Schattenebene.** Der Schlagschatten, 1′2′, den die Gerade auf die Ebene E wirft, ist daher im allgemeinen eine Gerade. In welchem Falle ist er nur ein Punkt?

Bei einem undurchsichtigen **Körper** (Fig. 112) erscheint der der Lichtquelle zugewandte Teil (1234) der Oberfläche erleuchtet. Der dem Lichte abgewandte Teil befindet sich im Schatten, er liegt, wie man sagt, im **Selbst- oder Eigenschatten.** Die Grenze zwischen dem beleuchteten Teil und dem Eigenschatten heißt die **Schattengrenze** (1234). Diese kann man sich dadurch erhalten denken, daß man einen Lichtstrahl an dem Körper entlanggleiten läßt, so daß er die Oberfläche dauernd streift. Dabei beschreibt der Lichtstrahl eine Pyramidenfläche oder, wenn es sich um einen krummflächigen Körper handelt, eine Kegelfläche. Innerhalb des von diesen Flächen begrenzten Raumes liegen sämtliche Strahlen, die den Körper beleuchten. Eine hinter dem Körper befindliche Ebene E wird von diesen Strahlen nicht getroffen. Das unbeleuchtete Stück (1′2′3′4′) der Ebene E ist der **Schlagschatten des Körpers.**

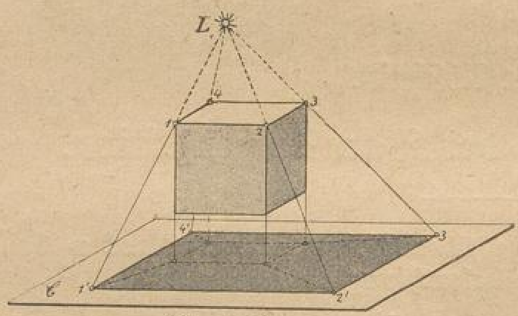


Fig. 112.

Der Umriß des Schlagschattens eines Körpers ergibt sich demnach als der Schlagschatten seiner Schattengrenze.

c) Denken wir uns die Lichtstrahlen parallel (Parallelbeleuchtung), so geht die den Körper streifende Strahlenpyramide (Strahlenkegel) in ein Strahlenprisma (Strahlenzylinder) über. Der Umriß des Schlagschattens eines Körpers auf eine Ebene E ist dann nichts anderes als die Parallelprojektion seiner Schattengrenze auf E.

2) Im folgenden werden wir uns nur mit **Parallelbeleuchtung** beschäftigen, indem wir als Lichtquelle die Sonne betrachten, deren Strahlen wir wegen ihrer gewaltigen Entfernung von der Erde als parallel ansehen können. Dabei sind die Schlagschatten einfache Parallelprojektionen,[1]) wobei die Projektionsstrahlen der Lichtrichtung parallel sind. Die Schattenbestimmung gründet sich auf die folgenden **Hauptsätze:**

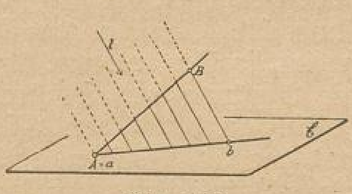


Fig. 113.

I. **Der Schlagschatten einer Geraden auf eine Ebene geht durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene** (Fig. 113).

II. **Der Schlagschatten einer Strecke auf eine zu ihr parallele Ebene ist zur Strecke parallel und hat die gleiche Länge** (Beweis!).

III. **Der Schlagschatten einer lotrechten Strecke auf eine wagerechte Ebene ist parallel der senkrechten Projektion der Lichtrichtung auf die Ebene.**

Bezeichnet l (Fig. 114) die Richtung der Lichtstrahlen, so erhalten wir den Schlagschatten A_1a der zu E lotrechten Strecke A_1A, indem wir durch A zu l die Parallele ziehen, die E in a trifft, und a mit A_1 verbinden. A_1a ist die senkrechte Projektion der Strecke Aa. Um die senkrechte Projektion P_1p der Richtungslinie l der Lichtstrahlen zu bestimmen, fällen wir von einem beliebigen Punkte P von l auf E das Lot PP_1, verlängern l bis zum Schnittpunkte p mit E und ziehen P_1p. Da $AA_1 \parallel PP_1$ und $Aa \parallel Pp$ ist, so sind die Ebenen der beiden Dreiecke AA_1a und PP_1p parallel (L. I. § 69, 2). Daher ist $A_1a \parallel P_1p$ (§ 70, 1).

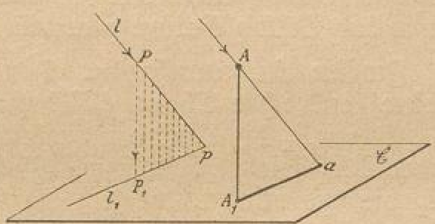


Fig. 114.

Daraus ergibt sich weiter, daß die Schlagschatten aller Lotstrecken der Auffangebene auf diese untereinander parallel sind. Das gilt auch allgemein für parallele Strecken von beliebiger Lage zur Auffangebene.

IV. **Parallele Strecken werfen auf eine Ebene parallele Schatten und bilden mit ihren Schattenlängen das gleiche Verhältnis** (Beweis!).

[1]) Die früher für die Parallelprojektion abgeleiteten Sätze (s. § 3) gelten in entsprechender Abänderung daher auch für unsere Schattenkonstruktionen.

I.

§ 26. Schattenbestimmung der schiefen Parallelprojektion.

1) Die *Richtung der Lichtstrahlen* nimmt man im allgemeinen so an, daß die Strahlen von links oben und vorn nach rechts unten und hinten verlaufen. Welche Richtung haben dagegen die projizierenden Sehstrahlen? Da zur Grundebene senkrechte Strecken parallele Schatten von gleichen Verhältnissen haben, so könnten wir, ähnlich wie bei der schiefen Parallelprojektion die Richtung der Sehstrahlen, die *Richtung der Lichtstrahlen festlegen* durch den Winkel, den die Schatten lotrechter Strecken mit der Achse bilden, und durch das Verhältnis der Schattenlänge einer Lotrechten zu dieser.

Wir ziehen es jedoch vor, die *Lichtrichtung* einfach dadurch *festzulegen*, daß wir im Schrägbilde (Fig. 114) einen *Lichtstrahl* l und *seinen Grundriß* l_1 zeichnen. Denn durch die Schrägprojektion der *Lichtrichtungslinie* ist die Richtung der Lichtstrahlen noch nicht völlig bestimmt. (Warum nicht?) Das wird sofort erreicht, sobald man das Schrägbild l_1 des Grundrisses der Lichtrichtung hinzufügt, das man innerhalb der durch die angenommene Lichtrichtung bedingten Grenzen beliebig annehmen kann.

2) Erste Grundaufgabe: Den Schlagschatten eines Punktes P auf die Grundebene G zu bestimmen (Fig. 114).

Bedeutet l das Schrägbild der Richtungslinie der Lichtstrahlen und l_1 das seiner senkrechten Projektion auf die Grundrißebene, so finden wir den Schlagschatten p von P auf G unmittelbar nach Hauptsatz III.

Zweite Grundaufgabe. Den Schlagschatten eines Punktes P auf eine senkrechte Ebene (Bildebene) zu bestimmen (Fig. 115).

Es sei P_1 die Grundrißprojektion des schattenwerfenden Punktes P und PP_1 seine Höhenlinie. Ziehen wir durch P zu l und durch P_1 zu l_1 die Parallelen, die sich im Punkte p_1 schneiden, so wäre p_1 der Schlagschatten auf G. Doch dieser Schatten kommt nicht zustande. Nur das Stück P_1k des Schattens der Höhenlinie liegt auf der Grundebene G. Im Punkte k hat die Schattenlinie einen sog. *„Knickpunkt"*, sie läuft jetzt in der Bildebene weiter. Der auf die Bildebene entfallende Teil ist die Spur der durch die Höhenlinie PP_1 gehenden Lichtebene, ist daher *senkrecht auf der Achse* (Hauptsatz II). Um den Schlagschatten p_2 auf B zu erhalten, haben wir also im „Knickpunkte" k die Senkrechte zur Achse zu ziehen, die die durch P zu l gezogene Parallele in p_2 trifft.

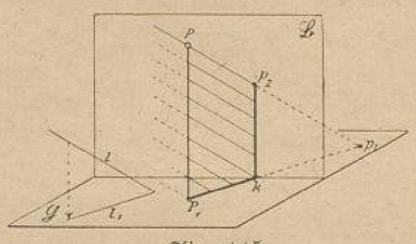


Fig. 115.

Bemerkung. Beispiele zur Bestätigung des Gesagten bietet uns die Natur in Fülle. Man beachte nur den Verlauf der Schatten von Baumstämmen oder senkrechten Stangen, die in der Nähe von senkrechten Mauerwänden stehen, so daß ihre Schatten zum Teil auch auf diese fallen. Versuche mit dem Bleistift!

3) Aufgabe 1. Den Schlagschatten eines Würfels auf die Grundebene zu zeichnen, sowie seinen Eigenschatten zu bestimmen (Fig. 116).

Der Würfel ruhe mit zwei Seitenflächen parallel zu B so auf der Grundebene, daß diese den ganzen Schatten aufnehmen kann. Die Lichtstrahlen sollen parallel der Diagonale 53 einfallen. Dadurch ist auch die Schattenrichtung der zu G senkrechten Strecken festgelegt. Der Schatten der Ecke 5 ist 3 und daher der Schatten der Kante 15, der in Wirklichkeit nicht zustande kommt, 1 3. Die Schatten der anderen Seitenkanten sind parallel 1 3.

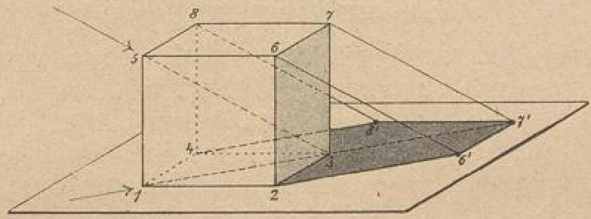


Fig. 116.

Welche Flächen des Würfels befinden sich im Eigenschatten? Schattengrenze?

Die Darstellung des Würfels gewinnt durch Hinzufügung des Schattens, wie die Figur deutlich zeigt, bedeutend an Anschaulichkeit, weil der Körper dadurch scharf aus der Grundebene hervorgehoben wird.

Die im Selbstschatten liegenden Flächen sollten eigentlich dunkel sein, da sie von der Lichtquelle selbst kein Licht empfangen. Das trifft tatsächlich nicht zu. Denn die in der Nähe liegenden beleuchteten Körper werfen einen Teil des empfangenen Lichtes zurück auf die im Selbstschatten liegenden Flächen (Reflexlicht) und bewirken dort einen gewissen Grad von Helligkeit. Wir bringen das in den Darstellungen dadurch zum Ausdruck, daß wir die betreffenden Flächen weniger dunkel als den Schlagschatten anlegen.

Aufgabe 2. Den Schlagschatten und Eigenschatten einer fünfseitigen Pyramide zu bestimmen, die so auf der Grundebene steht, daß der Schatten zum Teil auf die Bildebene fällt (Fig. 117).

Man bestimme zunächst den Schlagschatten der Spitze S auf die Bild- und Grundebene und ziehe von dem erhaltenen „ideellen" Schattenpunkt s_1 auf G die Streifgeraden an die Grundfläche s_1A und s_1C.

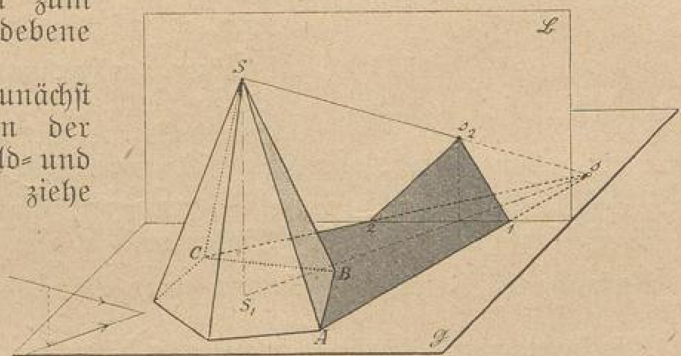


Fig. 117.

ABCs_1 stellt dann den Schlagschatten auf die Grundebene dar, der aber nur bis zur Achse auf G zur Wirkung kommt. Den auf B entfallenden Teil des Schattens erhält man, wenn man den Schatten s_2 der Spitze S auf B mit den „Knickpunkten" 1 und 2 der Schatten der Seitenkanten SA und SC verbindet. Schattengrenze?

II.

§ 27. Schattenbestimmung der geraden Parallelprojektion.

1) Bei den Darstellungen in gerader Parallelprojektion pflegt man eine ganz bestimmte Lichtstrahlenrichtung zu wählen, die erfahrungsgemäß eine sehr günstig wirkende Beleuchtung gibt. Und zwar nimmt man die Richtung der Lichtstrahlen so an, daß sie von links oben und vorn nach rechts unten parallel der Richtung der Diagonale eines Würfels verlaufen, von dem drei Kanten mit den Bildachsen zusammenfallen (s. Fig. 116). **Die Projektionen l_1 und l_2** (Fig. 118) **der Lichtstrahlenrichtung l bilden dann mit der x-Achse je einen Winkel von 45°.**

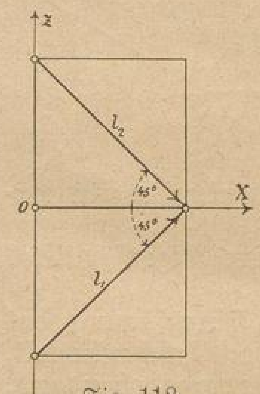


Fig. 118.

Grundaufgabe. Den Schlagschatten zu bestimmen, den ein durch seine Projektionen gegebener Punkt P auf die Bildebene wirft (Fig. 119).

Der Schlagschatten ist der erste oder zweite Spurpunkt des durch den Punkt P gehenden Lichtstrahles, dessen Projektionen mit der x-Achse je einen Winkel von 45° einschließen. Der erste Spurpunkt p_1 kommt als Schattenpunkt nicht in Betracht, da der Schattenstrahl zuerst die zweite Projektionsebene (die wir als undurchsichtig annehmen) trifft.

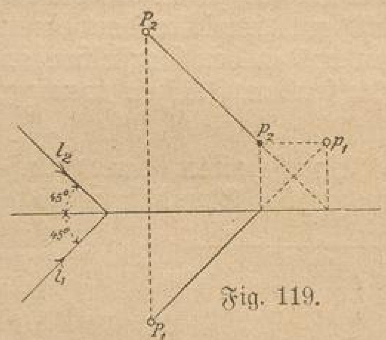


Fig. 119.

Wann fällt der Schlagschatten eines Punktes a) auf die Achse, b) auf die erste, c) auf die zweite Bildebene?

Übungsaufgaben: Bestimme den Schlagschatten eines Punktes P a) auf eine beliebige Ebene $E = (e_1, e_2)$, b) auf eine ebene Figur, c) auf eine Pyramide (Kegelfläche), d) auf ein Prisma (eine Zylinderfläche). Vgl. § 23, Aufg. 5 u. 6.

2) Schlagschatten gerader Linien und ebener Figuren.

Aufgabe 1. Den Schlagschatten einer Strecke AB zu bestimmen (Fig. 120).

Wir bestimmen die Schlagschatten a_1b_1 und a_2b_2 der Strecke AB auf die erste und zweite Bildebene. Die Schattenstrecken schneiden sich im Punkte k auf der x-Achse. Von ihnen kommen als wirkliche Schatten nur die in B_1 gelegene Strecke b_1k und die in B_2 gelegene ka_2 zur Geltung. Die gebrochene Linie b_1ka_2 ist der gesuchte Schlagschatten mit dem „Knickpunkte" k.

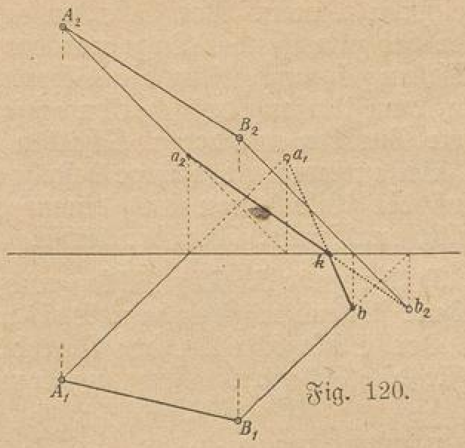


Fig. 120.

Die Schatten müssen sich auf der Achse schneiden, da sie die Spuren der Lichtebene durch AB sind. Bestimme den Punkt der Strecke AB, dessen Schattenbild der Knickpunkt ist!

Aufgabe 2. Den Schlagschatten a) eines durch seine Projektionen gegebenen Rechtecks ABCD, das parallel B_1 ist, b) eines durchbrochenen Rechtecks (vgl. Türrahmen), das B_2 parallel ist, zu zeichnen.

Lösung zu b) s. Fig. 121.

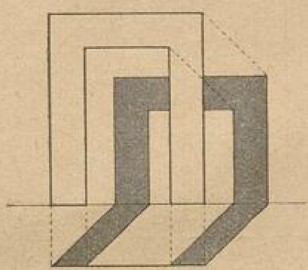


Fig. 121.

Aufgabe 3. Den Schlagschatten eines durch seine Projektionen gegebenen Dreiecks ABC zu bestimmen (Fig. 122).

Wir ermitteln die Schlagschatten der Dreiecksseiten nach Aufg. 1 und gewinnen dadurch die Begrenzungslinien des gesuchten Schlagschattens des Dreiecks ABC. $\triangle a_1b_1c_1$ ist der Schlagschatten auf B_1, $\triangle a_2b_2c_2$ der auf B_2. Von dem ersten kommt nur der vor der Achse, von dem letzten nur der über der Achse gelegene Teil als Schatten zur Geltung.

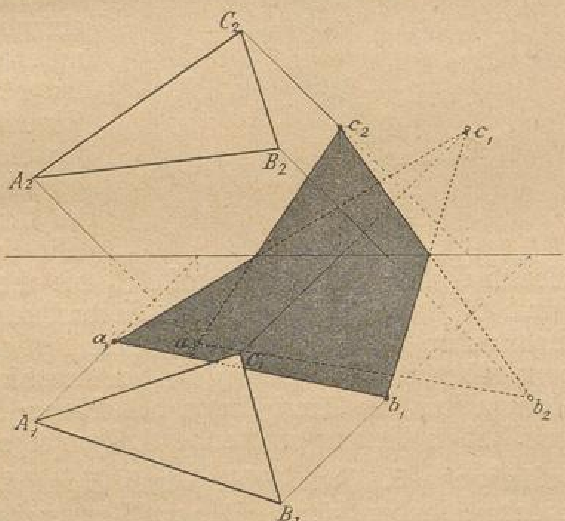


Fig. 122.

Den **Schlagschatten einer Kurve** finden wir, indem wir die Schatten einer hinreichend großen Zahl ihrer Punkte bestimmen und diese durch einen stetigen Kurvenzug verbinden.

Aufgabe 4. Den Schlagschatten einer B_1 parallelen Kreisfläche mit dem Mittelpunkte M zu zeichnen.

Der Schatten auf B_1 ist ein dem gegebenen Kreis kongruenter Kreis, den wir nach Ermittlung des Schlagschattens von M sofort zeichnen können. Der Schatten auf $\mathfrak{B}_2$ dagegen ist eine Ellipse, von der bei zutreffender Lage nur der über der Achse gelegene Teil zur Wirkung kommt. Um die Schattenellipse zu erhalten, nehmen wir auf dem Umfang des schattenwerfenden Kreises eine beliebige Anzahl von Punkten an, deren Schatten auf $\mathfrak{B}_2$ wir bestimmen.

Bei entsprechender Lage besteht also der Schlagschatten des Kreises auf die Bildebenen aus einem Kreisabschnitt unter und einem Ellipsenabschnitt über der Achse.

3) **Aufgabe 5.** Den Schlag- und Selbstschatten eines auf der Grundebene stehenden geraden Prismas zu bestimmen (Fig. 123).

Der Schlagschatten der Grundfläche fällt mit dieser zusammen. Für die Schattenbestimmung kommen daher nur die Seitenkanten und die Deckfläche in Betracht, wobei jedoch der in voller Beleuchtung liegende Eckpunkt 6 samt den von ihm ausgehenden Kanten nicht verwendet zu werden braucht. Die Grenze zwischen dem beleuchteten und dem im Eigenschatten liegenden Teile der Oberfläche, die sog. Schattengrenze, bilden die Kanten, längs derer eine zur Lichtstrahlenrichtung parallel bewegte Gerade den Körper bloß streift, ohne in ihn einzudringen (Schrägbild!). Bei unserem Prisma besteht die Schattengrenze aus dem geschlossenen Linienzuge 1 2 7 8 9 10 5 1. Wichtig für die Ermittlung der Schattengrenze ist hier die Bestimmung der zu ihr gehörenden Seitenkanten.

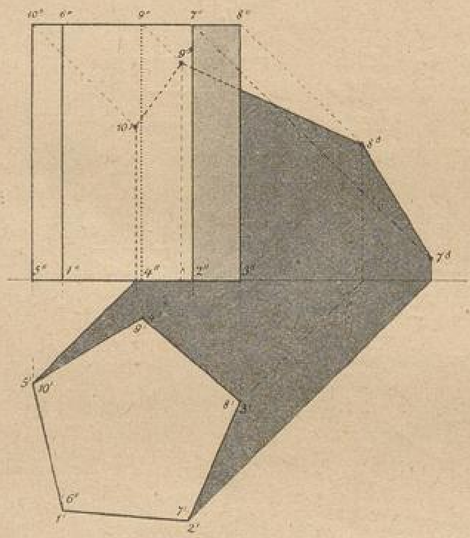


Fig. 123.

Wir finden sie, indem wir an den Grundriß des Prismas parallel l_1 die Streifstrahlen ziehen, die hier durch 2′ und 5′ gehen. Die Seitenkanten 2 7 und 5 10 samt den Deckkanten 7 8, 8 9, 9 10 gehören deshalb zur Schattengrenze auf dem Körper. Die Schlagschatten der die Schattengrenze bildenden Kanten sind die Umrißlinien des Körperschattens auf den Bildebenen und haben die entsprechende Reihenfolge.

Aufgabe 6. Den Schlag- und Eigenschatten einer auf der Grundebene stehenden fünfseitigen Pyramide zu bestimmen (vgl. § 26, Aufg. 2).

Aufgabe 7. Den Schlag- und Eigenschatten eines geraden Kreiskegels, dessen Grundfläche in $\mathfrak{B}_1$ liegt, zu zeichnen (Fig. 124).

Wir ermitteln zunächst die Schlagschatten s_1 und s_2 der Kegelspitze S auf $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Die von s_1 an den Grundkreis gezogenen Tangenten s_1A_1 und s_1B_1 bilden die seitlichen Grenzen des Schattens auf $\mathfrak{B}_1$, von dem nur der vor der Achse liegende Teil zur Geltung kommt.

Der auf $\mathfrak{B}_2$ entfallende Teil des Schlagschattens besteht aus dem Dreieck s_2mn. Die Grenzlinien A_1m und B_1n sind die Grundrißspuren der von den streifenden Lichtstrahlen gebildeten Lichtebene, die den Kegel in den Mantellinien AS und BS berühren. AS und BS bilden die Schattengrenze auf dem Kegelmantel.

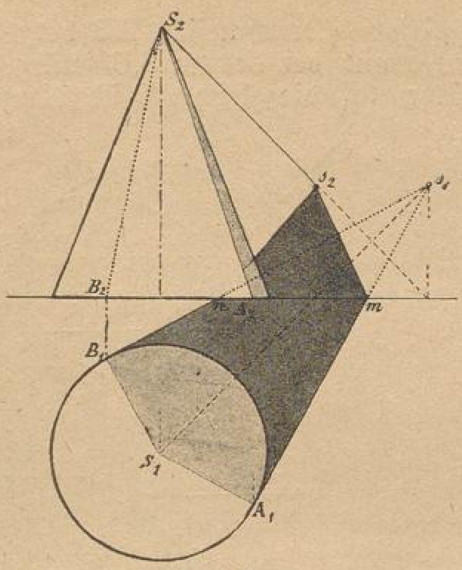


Fig. 124.

Aufgabe 8. Den Schlag- und Eigenschatten eines auf der Grundrißebene stehenden Kreiszylinders zu zeichnen.

Aufgabe 9. Den Schlag- und Eigenschatten einer auf der Grundebene ruhenden Kugel zu bestimmen (Fig. 125).

Um die Aufgabe einfach und anschaulich zu lösen, nehmen wir eine zu $\mathfrak{B}_1$ senkrechte, den Lichtstrahlen parallele dritte Bildebene zu Hilfe. Auf diese Hilfsebene projizieren wir die gegebene Kugel K und legen sie dann um ihre erste Spur e_1 in die erste Bildebene um. Der durch den Mittelpunkt K gehende Lichtstrahl l trifft $\mathfrak{B}_1$ in dem Spurpunkte k_1 (Konstruktion!), der zugleich als Schlagschatten von K zu betrachten ist. Der Winkel $K k_1 K_1 = \alpha$ ist dann der Neigungswinkel, unter dem die Lichtstrahlen $\mathfrak{B}_1$ treffen. Seine wahre Größe ergibt sich unmittelbar aus der dritten Projektion des rechtwinkligen Dreiecks $K k_1 K_1$.

Sämtliche die Kugel berührenden Lichtstrahlen bilden eine Zylinderfläche, die die Kugel in einem Hauptkreise berührt. Die Ebene dieses Kreises, der die Schattengrenze auf dem Körper darstellt, ist senkrecht zu den Lichtstrahlen und projiziert sich daher auf die Hilfsebene als Durchmesser A_3B_3, der zu der dritten Projektion l_3 des durch K gehenden Lichtstrahls l senkrecht ist. Aus der dritten Projektion A_3B_3 des Grenzkreises gewinnen wir genau wie sonst aus dem Aufriß die Ellipse $A_1C_1B_1D_1$ mit den Hauptachsen A_1B_1 und C_1D_1 als seine erste Projektion. Die beiden zueinander senkrechten Kreisdurchmesser AB und CD erscheinen auch im Grundriß in senkrechter Lage (Grund? §18, 2. S.). Die zweite Projektion der Schattengrenze erhalten wir durch Hinaufloten beliebig vieler Punkte des Grundrisses, wobei zu beachten ist, daß der zweite Bildabstand eines Punktes (z. B. von A) unmittelbar aus der Hilfsebene entnommen werden kann ($A_2A_x = A_3A_e$).

Die Schlagschatten des Grenzkreises sind in beiden Bildebenen Ellipsen, von denen in $\mathfrak{B}_1$ nur der vor und in $\mathfrak{B}_2$ der über der Achse gelegene Abschnitt zur Geltung kommt. Der Mittelpunkt der Grundrißellipse ist der schon zuvor bestimmte Punkt k_1. Der Schlagschatten

$(a_1 b_1)$ des Durchmessers AB des Grenzkreises bildet für sie die Hauptachse und der des zu AB senkrechten Durchmessers CD die Nebenachse $c_1 d_1$, die gleich CD ist (Grund?). Wie können die Achsen sofort

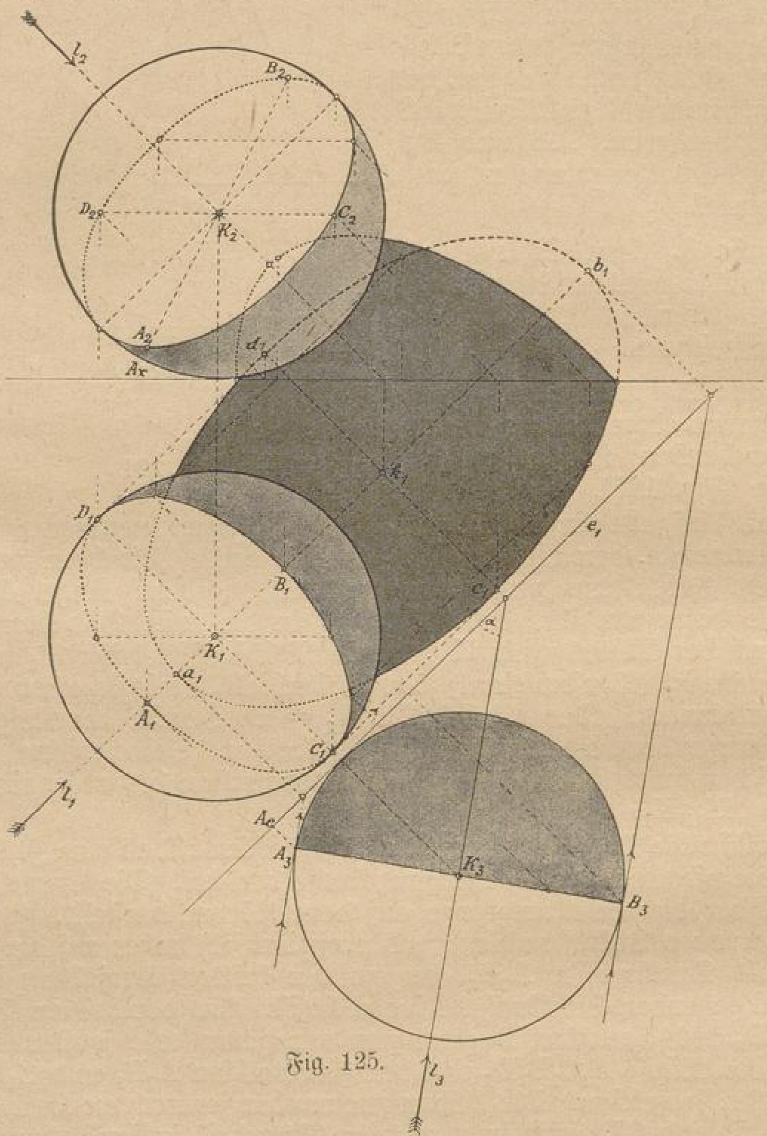


Fig. 125.

mit Hilfe der dritten Projektion der durch AB und K gelegten Lichtstrahlen bestimmt werden? Den Schlagschatten auf $\mathfrak{B}_2$ ermitteln wir endlich dadurch, daß wir die Schlagschatten einer Anzahl von Punkten des Grenzkreises auf $\mathfrak{B}_2$ bestimmen. Von der Schattenellipse auf $\mathfrak{B}_2$ ist in der Figur nur der zur Geltung kommende Abschnitt gezeichnet.

Zweiter Teil.

Perspektive (Zentralprojektion).

§ 28. Entstehung des perspektivischen Bildes. Allgemeines.

1) Die Perspektive lehrt, räumliche Gebilde annähernd so darzustellen, wie sie dem Beschauer beim Sehen mit **einem** starr gehaltenen Auge von einem festen Standorte aus erscheinen.

Um zunächst auf rein mechanischem Wege das perspektivische Bild eines Gegenstandes (Fig. 126) zu gewinnen, bringen wir zwischen ihn und den Ort A des Auges, den **Augpunkt,** eine lotrecht stehende Glasscheibe, deren vordere Fläche wir als **Bildebene** B bezeichnen. Ein in A befindliches Auge sieht dann z. B. den Punkt 1 an der Stelle 1′ auf der Glasscheibe, den Punkt 2 an der Stelle 2′ und die Kante $\overline{1\,2}$ an der Stelle $\overline{1'\,2'}$. Die Linie kann der Beschauer mit Hilfe eines Stiftes oder eines feinen farbgetränkten Pinsels nachzeichnen. Ge-

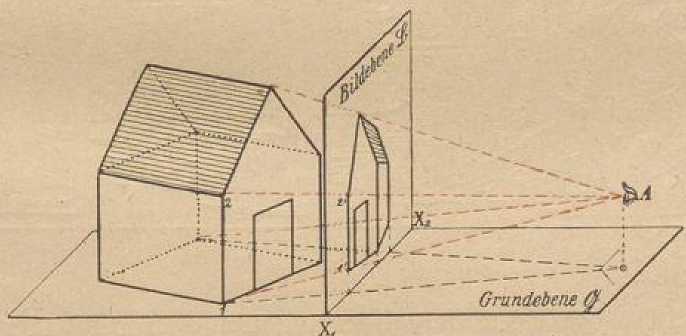


Fig. 126.

schieht dies in gleicher Weise mit sämtlichen sichtbaren Umrißlinien des Körpers, so erhalten wir auf der Glasscheibe das **perspektivische Bild** oder die **Perspektive**[1]) des Gegenstandes. Solche Bilder können wir uns auf einer Fensterscheibe von einem gegenüberliegenden Hause oder Platze leicht anfertigen und gleichzeitig wichtige Ge-

---

[1]) Es ist zu beachten, daß das Wort Perspektive im doppeltem Sinne gebraucht wird.

setze über die Abbildung von geraden Linien ableiten. Wie bilden sich z. B. a) lotrechte, b) zur Bildebene parallele wagerechte Strecken ab? Schon A. Dürer gibt in seinem klassischen Buche: „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt usw.", dem ersten deutschen Werke über Perspektive, eine Reihe von Hilfsmitteln an, um das perspektivische Bild beliebiger Gegenstände auf mechanischem Wege zu gewinnen, und erläutert sie durch eine Anzahl lehrreicher Holzschnitte, von denen einer, „die Perspektive des Mannes",

Abb. 1.

hier (Abb. 1) abgebildet ist. Der Zeichner betrachtet den abzubildenden Gegenstand, den links auf dem Lehnstuhl sitzenden Mann, durch ein Guckloch, eine kleine Öffnung einer undurchsichtigen Platte, die an einem Stativ angebracht ist.

Um das perspektivische Bild rein geometrisch zu gewinnen, denken wir uns in Fig. 126 an Stelle der Glastafel ein Zeichenblatt, auf das die Linien des Gegenstandes vom **Augpunkt** A aus projiziert werden. Jeder Punkt des Gegenstandes (z. B. 1) liegt dann mit seinem Bilde (1') auf einem Sehstrahl (A 1). Das perspektivische Bild eines Gegenstandes ist also nichts anderes als eine **Zentralprojektion** auf eine zwischen ihm und dem Augpunkt A als Projektionsmittelpunkt befindliche Bildebene B. Der Name „Perspektive“ rührt daher, daß ein Auge in A gewissermaßen durch die Bildebene hindurch den Gegenstand sieht.

Als Bildfläche dient (Fig. 126) eine lotrechte Ebene, die **Bildebene** B. Diese denkt man sich durch eine wagerechte Ebene geschnitten, auf welcher der Beschauer steht und welche daher die **Boden-** oder **Grundebene** G heißt. Die Schnittlinie beider Ebenen wird die **Grundlinie** oder **Bildachse** ($X_1 X_2$) genannt.

2 a) Wie die senkrechte Projektion aus den praktischen Bedürfnissen der Baukunst hervorgegangen ist, so verdankt die Perspektive ihre **Entstehung** und **Entwicklung** der Malerei, für die sie die geometrische Grundlage darstellt. Ihre Lehren sind von den großen Künstlern der Renaissancezeit, von denen einige wie Leonardo da Vinci auch bedeutende Mathematiker und Ingenieure waren, begründet und zu hoher Blüte entwickelt worden. Sie beruhen

1. auf dem Satze von der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes,
2. auf vereinfachenden Annahmen über den Sehvorgang (als ob die Entstehung des Bildes auf der Netzhaut genau der Entstehung des Bildes auf einer photographischen Platte entspräche) und
3. darauf, daß man sich mit Darstellungen begnügt, die der Betrachtung durch ein Auge entsprechen, wodurch die Mitwirkung des zweiten für die körperliche Wahrnehmung des Bildes ausgeschaltet ist.

Das ist alles wohl zu beachten bei der Beurteilung der Stellung der Perspektive zur Malerei.

Da die Perspektive von unseren Darstellungsarten am meisten dem Sehvorgange entspricht, so gewähren perspektivische Zeichnungen den höchsten Grad der Anschaulichkeit. Darauf gründet sich ihre Bedeutung für die Malerei und die zeichnenden Künste.

b) Die **Linearperspektive** beschränkt sich auf die Darstellung der den Gegenstand begrenzenden Linien. Dagegen werden in der malerischen Darstellung auch Farbe und Beleuchtung berücksichtigt (Farben- oder Luftperspektive).

Bei der Linearperspektive, die wir im folgenden schlechthin als Perspektive bezeichnen, unterscheidet man zwei Hauptverfahren der perspektivischen Darstellung,

1. das **Schnittverfahren** (gebundene Perspektive),
2. das **Fluchtpunktverfahren** oder die **freie Perspektive** (Malerperspektive).

Das erste Verfahren, bei dem Grund- und Aufriß gegeben sein müssen, wird vielfach von Baumeistern angewandt, um ihre in Grund- und Aufriß ausgeführten Entwürfe in Perspektive zu setzen und dadurch ein „Schaubild“ zu erhalten, das den Eindruck des Gebäudes von einem bestimmten Standpunkte aus wiedergibt. Für die freie Perspektive sind Grund- und Aufriß nicht erforderlich. Doch fügt man sie oft hinzu, teils um die wahren Maße zu entnehmen, teils des leichteren Verständnisses wegen.

Erster Abschnitt.

Das Schnittverfahren.

§ 29. Perspektivische Abbildung von Körpern nach dem Schnittverfahren.

1) Aufgabe. Die Perspektive eines durch Grund- und Aufriß gegebenen Würfels W a) in Frontstellung, b) in schräger Ansicht zu zeichnen.

Zu a) A_1 (Fig. 127) sei der Grundriß, A_2 der Aufriß des Augpunktes A. Als Bildebene benutzen wir die lotrecht gedachte Aufrißebene. Zur Erleichterung der Übersicht denken wir uns die Grundebene samt dem Grundriß W_1 des abzubildenden Würfels W und dem Punkt A_1 genügend weit nach vorn verschoben, so daß die Achse OX etwa die Lage (O)(X) einnimmt und A_1 auf (A_1) fällt. Alsdann verbinden wir A_1 mit sämtlichen Eckpunkten von W_1, ebenso A_2 mit denen von W_2. Damit erhalten wir die Grund- und Aufrisse der Sehstrahlen nach den Ecken des Würfels. Um nun den Durchstoßpunkt z. B. des Sehstrahls A 1 mit der Bildebene zu erhalten, hat man den Schnittpunkt a seines Grundrisses $(A_1)\,1'$ mit (O)(X) auf

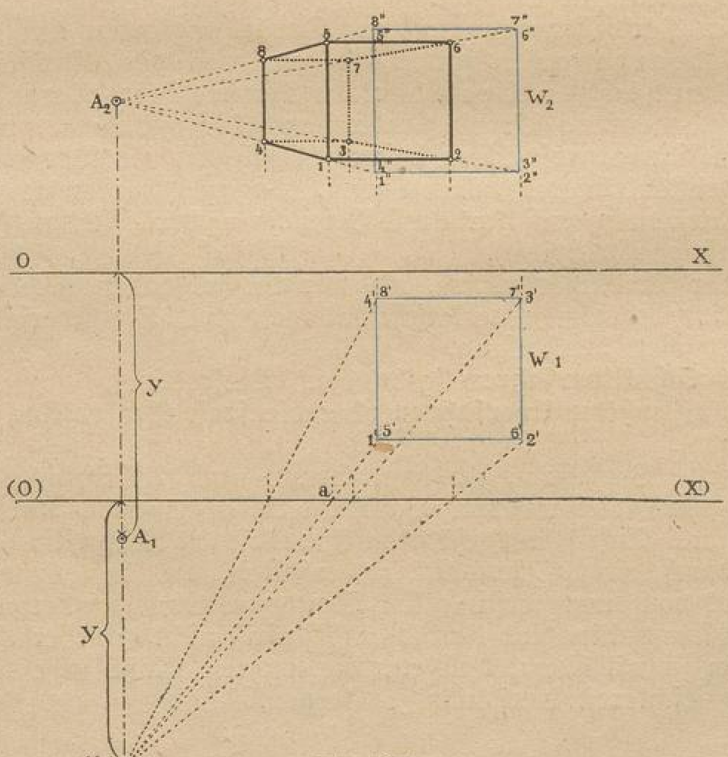


Fig. 127

seinen Aufriß $A_2 1''$ hinaufzuloten und findet damit den Bildpunkt 1. Wie ergeben sich die weiteren Bilder der Ecken des Würfels?

Zur Erleichterung der Übersicht zeichne man die gegebenen Risse und die der Sehstrahlen in verschiedenen Farben.

Aufgabe 2. Die Perspektive eines durch Grund- und Aufriß gegebenen Würfels in schräger Ansicht zu zeichnen.

Übungsaufgaben. Zeichne ebenso das perspektivische Bild 1) eines Quaders in schräger Ansicht, 2) eines regelmäßig-sechsseitigen Prismas, 3) eines auf einem quaderförmigen Sockel stehenden Kreuzes, 4) einer aus vier Stufen bestehenden einfachen Treppe, 5) eines Kreiszylinders, der auf einer zylindrischen Platte steht, wenn Grund- und Aufriß gegeben sind.

2) Das in 1) angegebene Schnittverfahren zur Bestimmung des perspektivischen Bildes ist eine einfache Anwendung der von der senkrechten Projektion her bekannten Lehren. Da es jedoch lediglich darin besteht, durch Ermittlung der erforderlichen Sehstrahlen mit der Bildfläche gewissermaßen mechanisch das Bild zusammenzusetzen, so vermag es keinen Einblick in die Eigentümlichkeiten der perspektivischen Gesetze zu geben, deren Kenntnis aber für die einfache und schnelle Herstellung perspektivischer Bilder und die Beurteilung ihrer Richtigkeit unbedingt erforderlich ist.

Zweiter Abschnitt.

Das Fluchtpunktverfahren (Freie Perspektive).

§ 30. Hauptsätze der Perspektive.

1) Von den zur Bildfläche parallelen Geraden, die wir als **frontale Linien** oder **Frontlinien** bezeichnen, sind zwei Arten besonders wichtig, die **Breitenlinien,** die parallel der Grundlinie X_1X_2 verlaufen, und die **Höhenlinien,** die zur Grundebene senkrecht sind. Für diese gilt der wichtige Satz:

I. **Breiten- und Höhenlinien erscheinen auch im Bilde als Breiten- und Höhenlinien. Abschnitte auf einer solchen Linie werden im gleichen Verhältnis verkürzt.** (Fig. 128.)

Denn werden vom Augpunkt A z. B. nach sämtlichen Punkten der Höhenlinie 𝔏𝔐 die Sehstrahlen gezogen, so ist die Schnittlinie LM der von ihnen gebildeten Sehstrahlenebene mit der Bildfläche das Bild von 𝔏𝔐 und nach L. I. § 71, 1 parallel 𝔏𝔐. Da 𝔏𝔐 senkrecht zur

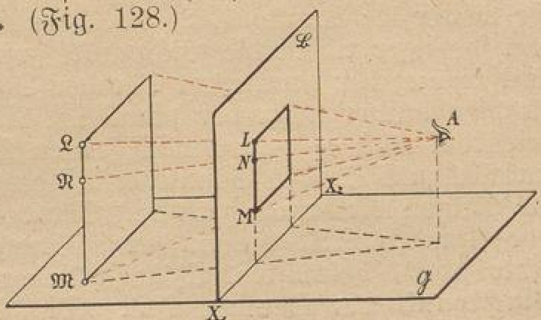


Fig. 128.

Grundebene G ist, so muß auch LM senkrecht zu G und damit auch senkrecht zur Achse sein.

Die Abschnitte LN und NM auf LM verkürzen sich in gleichem Maße. Denn es ist LN : LN = NM : NM.

So bilden sich die wag- und lotrechten Linien eines Hauses (die wag- und lotrechten Stangen eines Zaunes) auf eine zu seiner Front parallele Fensterscheibe oder photographische Platte wieder als solche ab.

Satz I ist ein besonderer Fall des folgenden, der für beliebige Frontlinien gilt.

II. **Frontale Linien bilden sich parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung und damit auch untereinander parallel ab. Abschnitte auf einer Frontlinie erfahren im Bilde die gleiche Verkürzung.** Beweis!

III. **Eine frontale ebene Figur hat ein ihr ähnliches Bild.** Beweis! (Vgl. Fig. 128.)

Ein frontales Quadrat oder ein frontaler Kreis erscheint auch im Bilde wieder als Quadrat oder Kreis.

2a) Es sei ST (Fig. 129) eine beliebige Gerade, von der wir nur den hinter B gelegenen Teil betrachten. Das Bild S ihres Schnittpunktes S mit der Bildfläche, den wir als den **Spurpunkt** der Geraden bezeichnen, fällt mit diesem zusammen. Nehmen wir auf ST eine Anzahl von Punkten, 1, 2, 3 . . . in gleichen Abständen an und ziehen die zugehörigen Sehstrahlen, so liegen ihre Bildpunkte auf einer Geraden, der Schnittlinie der Sehstrahlenebene mit B.

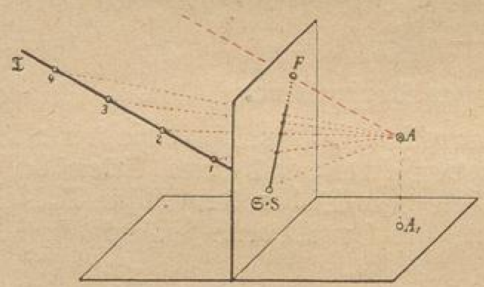


Fig. 129.

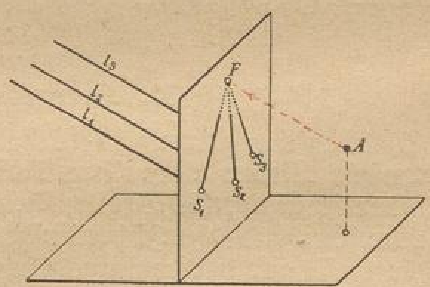


Fig. 130.

Je weiter die Punkte 1, 2, 3 . . . der Geraden von B entfernt sind, um so enger rücken die Bildpunkte zusammen, und mit wachsender Entfernung der Punkte der Geraden ST von B nähern sich die Sehstrahlen immer mehr der parallelen Richtung von ST. Schließlich wird der nach dem „unendlich fernen Punkte" F gehende Sehstrahl parallel zu ST. Den Schnittpunkt F des zu ST parallelen Sehstrahls AF können wir demnach als das Bild des „unendlich fernen Punktes" der Geraden ST, die in der Richtung ST im Unendlichen verschwindet, betrachten. F heißt daher der **Verschwindungs-** oder **Fluchtpunkt** der Geraden ST. Die Strecke SF ist das Bild des Strahles SF der gegebenen Geraden.

Wir erhalten danach das Bild einer beliebigen Geraden, soweit sie sich hinter der Bildebene erstreckt, indem wir ihren Spurpunkt S mit ihrem Fluchtpunkt F verbinden.

b) Sind (Fig. 130) $l_1, l_2, l_3 \ldots$ eine Anzahl paralleler Geraden, so finden wir ihre Fluchtpunkte dadurch, daß wir die zu ihnen parallelen Sehstrahlen ziehen. Diese fallen aber in denselben Strahl AF (Schnittlinie der sämtlichen Sehstrahlenebenen) zusammen, so daß der Verschwindungspunkt F allen Parallelen gemeinsam ist. Ihre Bilder laufen deshalb in F zusammen, sie „fliehen" nach demselben Punkte F, um dort zu „verschwinden".

Wir erhalten damit den **Fundamentalsatz der Perspektive:**

Parallele Gerade haben denselben Fluchtpunkt.

Um die Bilder einer Schar von Parallelen zu finden, haben wir also nur ihre Spurpunkte mit ihrem gemeinsamen Fluchtpunkte zu verbinden. Wo liegt der Fluchtpunkt frontaler Linien? (s. Fig. 131).

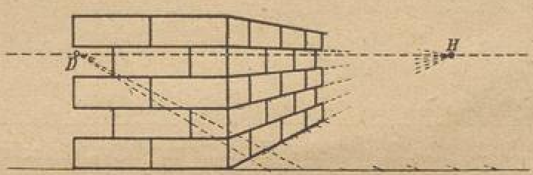


Fig. 131.

Um zu einer vollständig klaren Auffassung der Bedeutung des Fluchtpunktes zu kommen, ist zu beachten, daß es in Wirklichkeit keine unendlich ausgedehnten Strecken gibt und daher der „unendliche ferne" Punkt nur ein gedachter Punkt ist, daß ferner auch unsere Sehweite nicht in unendliche Fernen reicht. Der Fluchtpunkt wird deshalb *niemals* selbst *auf dem Bilde* in Erscheinung kommen.[1])

Der Fluchtpunkt ist nichts anderes als ein wichtiger Hilfspunkt, dessen sich der Zeichner zur genauen und raschen Darstellung paralleler Linien bedient.

Auch die tägliche Beobachtung lehrt uns, daß parallele Linien, je weiter ihre Punkte von uns entfernt sind, sich immer näherzurücken und in sehr großer Entfernung in einem Punkte zusammenzulaufen scheinen (vgl. Abb. 2). Man denke nur an die Gleise gerader Eisenbahnstrecken, die parallelen Linien langer, gerader Straßen, an Häuser- und Baumreihen, endlich an die parallelen Fugen von Mauern (s. Fig. 131, wo eine aus Quadern bestehende Mauer dargestellt ist).

Dies beruht nach der Lehre vom Auge darauf, daß wir die Größe einer Strecke von dem Sehwinkel, d. h. dem Winkel, den die Sehstrahlen nach den Endpunkten einschließen, beurteilen. Die Sehwinkel für die gleichgroßen Strecken in Fig. 132 werden immer kleiner, je weiter sie vom Auge in A entfernt sind. Daher erscheinen sie auch dem Auge kleiner. Wird der Sehwinkel sehr klein, so entstehen von den Enden des

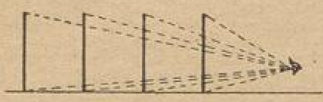


Fig. 132.

[1]) Vgl. *Guido Hauck*, Malerische Perspektive, S. 24.

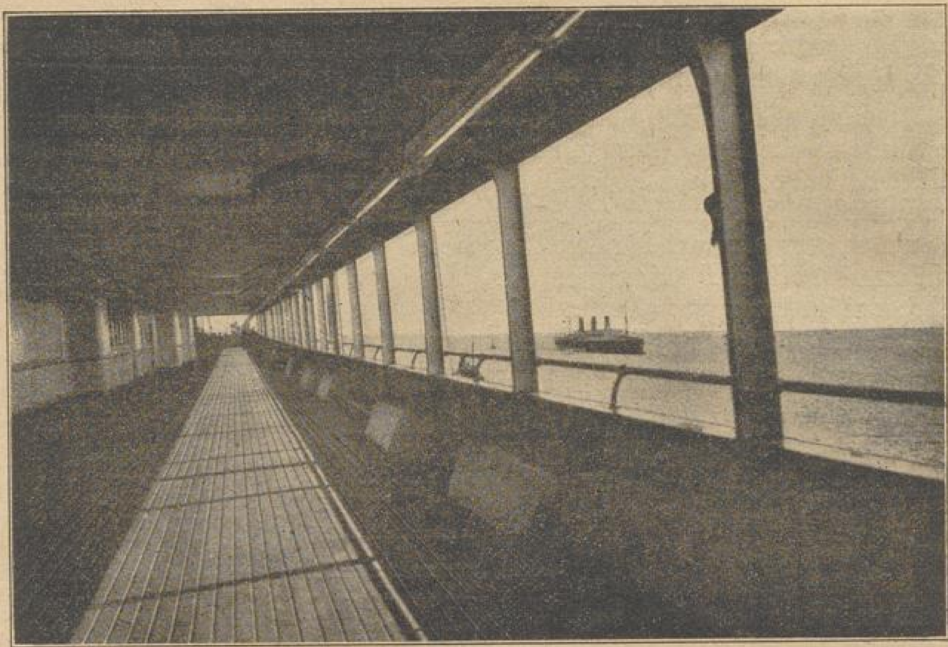


Abb. 2. An Bord des Schnelldampfers „Vaterland“ mit Blick auf den „Imperator“.

Gegenstandes auf der Netzhaut des Auges nicht mehr zwei getrennte Lichteindrücke, die Bilder der Enden decken sich also.

§ 31. Hauptpunkt, Aughöhenlinie (Horizont). Distanzpunkte.

1 a) Der zur Bildebene B senkrechte Sehstrahl, der B im Punkte H trifft, heißt **Hauptstrahl.** Sein Schnittpunkt H mit B wird der **Hauptpunkt** und der Abstand AH des Augpunktes von B die **Augdistanz** oder der **Augabstand** genannt (Fig. 133).

Nach dem Fundamentalsatz der Perspektive ist der Hauptpunkt der Fluchtpunkt aller zu B senkrechten Linien, da ihr Fluchtstrahl mit AH zusammenfällt. Bezeichnen wir die zur Bildebene senkrechten Linien als Tiefenlinien, so haben wir den Satz:

I. **Der Hauptpunkt ist der Fluchtpunkt sämtlicher Tiefenlinien.**

Auch das Zeichnen und Beobachten in der Natur lehrt, daß alle Linien, die parallel zur Sehrichtung sind, nach einem Punkte zusammenzulaufen scheinen, der in Augenhöhe liegt. Vgl. Abb. 2.

b) Die durch den Augpunkt A parallel zur Grundebene gelegte Ebene $\mathfrak{H}$ (Fig. 133), die **Aughöhenebene** oder **Horizontebene,** schneidet die Bildfläche in der Geraden H_1H_2, die durch den Hauptpunkt H geht und der Grundlinie X_1X_2, also der Breitenrichtung, parallel ist. Die Schnittgerade H_1H_2 heißt **Aughöhenlinie** oder **Horizont.**

Ein in Aughöhe über der Grundebene $\mathfrak{G}$ gelegener Punkt $\mathfrak{P}$ liegt in der Aughöhenebene. Da dieser auch der Sehstrahl $A\mathfrak{P}$ angehört, so liegt sein Bild P auf dem Horizont.

Die Fluchtstrahlen sämtlicher in der Grundebene gezogenen Geraden liegen in der Horizontebene. Das gleiche gilt auch für alle zur Grundebene parallelen Geraden, also für alle Wagrechten. Mithin liegen die Fluchtpunkte sämtlicher Wagrechten auf dem Horizont.

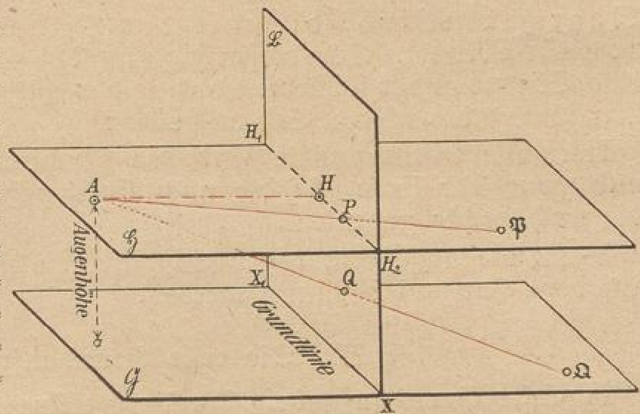


Fig. 133.

Es gilt daher der Satz:

II. **Die Aughöhenlinie ist die durch den Hauptpunkt zur Grundlinie gezogene Parallele, auf der sich alle in Aughöhe gelegenen Punkte abbilden. Sie ist der Ort für die Fluchtpunkte aller Wagrechten.**

Das Bild Q (Fig. 133) eines in der Grundebene gelegenen Punktes 𝔔 liegt stets zwischen Grundlinie und Horizont. Rückt 𝔔 immer weiter von der Bildebene ab, so nähert sich sein Bild Q dem Horizont und fällt schließlich auf diesen, wenn 𝔔 im Unendlichen liegt. Wir können deshalb die Aughöhenlinie oder den Horizont auch als das Bild der „unendlich fernen" Geraden der Grundebene betrachten.

Das Bild des ganzen, unendlich ausgedehnten Teiles der Grundebene hinter B deckt also nur den schmalen Streifen zwischen Grundlinie und Horizont auf der Bildfläche.

Befinden wir uns am Meeresstrande und betrachten die Wasserfläche als Grundebene und die Strandlinie als Grundlinie, so erhalten wir auf unserer Bildfläche (vgl. Abb. 2) die in Aughöhe gezogene Wagrechte als das Bild der begrenzenden Linie unseres Gesichtsfeldes, des sogenannten „Horizontes",[1]) in dem sich Himmel und Erde zu berühren scheinen. Die Linie H_1H_2 trägt daher ihren Namen.

2) Tragen wir (Fig. 134) auf der Aughöhenlinie vom Hauptpunkte H aus die Strecke d gleich der Augdistanz AH nach beiden Seiten bis D_1 und D_2 ab, so heißen die erhaltenen Punkte die **Distanzpunkte.** Die Dreiecke AHD_1 und AHD_2 sind rechtwinklig und, da $AH = HD_1 = HD_2$ ist, auch gleichschenklig. Daher ist $\sphericalangle AD_1H = \sphericalangle AD_2H = 45°$. Daraus folgt, daß AD_1 und AD_2 die Fluchtstrahlen für alle

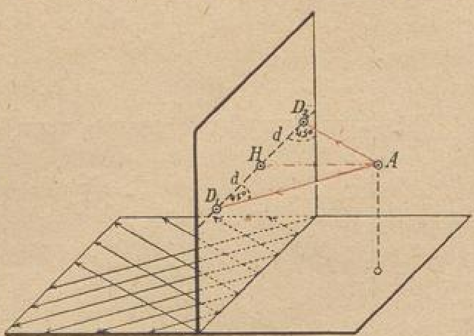


Fig. 134.

[1]) Von horizein (griech.) = begrenzen.

Wagrechten sind, die mit der Bildebene einen Winkel von 45° bilden. Von diesen sogenannten **45°-Linien** verläuft die eine Schar von der Bildebene aus nach rechts, die andere nach links. Wir können danach den Satz aufstellen:

III. **Die Distanzpunkte sind die Fluchtpunkte der 45°-Linien, und zwar der linke für die nach links gehenden, der rechte für die nach rechts gehenden.**

Wenn die Augdistanz gegeben ist, können die Distanzpunkte sofort auf dem Horizont bestimmt werden.

§ 32. Die erste Grundaufgabe.

1) Erste Grundaufgabe. Die Perspektive eines in der Grundebene gelegenen Punktes 𝔓 zu bestimmen.[1])

Der Anschaulichkeit halber lösen wir die Aufgabe zunächst an der Hand des Schrägbildes Fig. 135. Von dem in der Grundebene gegebenen Punkte 𝔓 ziehen wir erstens $\mathfrak{P}P_x$ senkrecht zur Grundlinie, zweitens $\mathfrak{P}Q$ unter einem Winkel von 45° zu ihr. Alsdann können wir das Bild P des Punktes 𝔓 als Schnittpunkt der Bilder der Tiefenlinie $\mathfrak{P}P_x$ und der 45°-Linie $\mathfrak{P}Q$, die beide durch 𝔓 gehen, bestimmen. Nun ist P_x der Spurpunkt und der Hauptpunkt H der Fluchtpunkt der durch 𝔓 gehenden Tiefenlinie. Wir erhalten daher ihr Bild, wenn wir P_x mit H verbinden. Entsprechend ergibt sich die Verbindungsstrecke QD_2 als das Bild der durch 𝔓 gehenden 45°-Linie $\mathfrak{P}Q$. Da das Bild P von 𝔓 sowohl auf P_xH als auch auf QD_2 liegt, so ist der Schnittpunkt der beiden Strecken der gesuchte Bildpunkt. Bemerkenswert ist, daß dabei der Sehstrahl $A\mathfrak{P}$ gar nicht verwendet zu werden braucht.

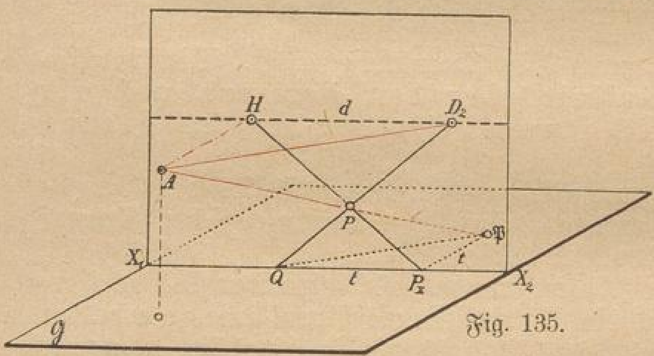


Fig. 135.

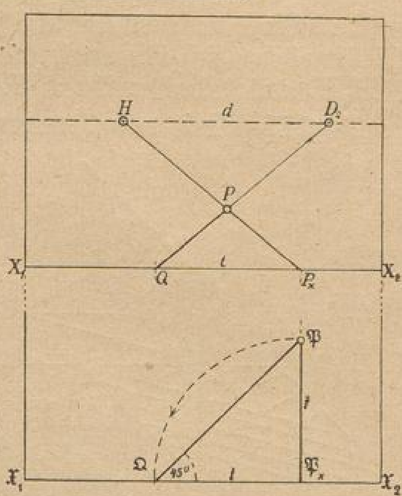


Fig. 136.

Die angegebene Bestimmung des Bildpunktes erscheint auf den ersten Blick gesucht. Deshalb ist eine kurze geometrische Betrachtung nicht

[1]) Der Hauptpunkt H und die Augdistanz $AH = HD_1 = HD_2$ sind hier wie in allen folgenden Aufgaben als bekannt vorausgesetzt.

überflüssig, die uns zugleich deutlich die Wichtigkeit der 45°-Linien für unsere Aufgabe zeigt. Der Sehstrahl A𝔓 (Fig. 135) wird durch P im Verhältnis $AH : P_x P = d : t$, d. h. der Distanz zum Tiefenabstand des Punktes 𝔓 geteilt. Im gleichen Verhältnis wird auch $P_x H$ durch P geteilt, so daß wir P am einfachsten dadurch finden, daß wir auf der Aughöhenlinie $HD_2 = AH = d$ und auf der Grundlinie $P_x Q = P_x P = t$ abtragen und Q mit D_2 verbinden. Der Sehstrahl A𝔓 ist also für die Lösung nicht erforderlich! Von welchen Sehstrahlenebenen sind $P_x H$ und QD_2 die Spuren?

Als Bildfläche benutzen wir im folgenden stets einen Teil der lotrecht gedachten Zeichenebene, der unten (Fig. 135) durch die Grundlinie X_1X_2 begrenzt ist. Um gleichzeitig auch den Grundriß des abzubildenden Gegenstandes vor Augen zu haben, denken wir uns die Grundebene 𝔊 hinreichend weit nach vorn so verschoben, daß jeder Punkt in ihr sich senkrecht zur Bildebene bewegt, und dann um ihre Schnittgerade mit 𝔅 in die Zeichenebene nach unten geklappt (Fig. 136). Dadurch ermöglichen wir das Zeichnen in einer Ebene. Jedoch ist es unbedingt erforderlich, sich dauernd die wahre Lage vor Augen zu halten.

Wird in der angegebenen Weise für unsere Grundaufgabe die Grundebene mit der Bildebene vereinigt, so ergibt sich die Darstellung in Fig. 136. Die Lösung der Grundaufgabe gestaltet sich nunmehr folgendermaßen:

Wir ziehen $𝔓𝔓_x$ senkrecht zu $𝔛_1𝔛_2$ und 𝔓𝔔 unter einem Winkel von 45° zu $𝔛_1𝔛_2$, loten $𝔓_x$ und 𝔔 auf die Grundlinie X_1X_2 hinauf und verbinden P_x mit dem Hauptpunkt H und Q mit dem zugehörigen Distanzpunkt D_2. Der Schnittpunkt der Verbindungsstrecken ist der gesuchte Punkt P.

Weil $𝔔𝔓_x = 𝔓𝔓_x$ ist, so ergibt sich auch 𝔔, wenn auf der Grundachse $𝔛_1𝔛_2$ von $𝔓_x$ $𝔓_x𝔔 = 𝔓_x𝔓$, gleich der Tiefe des gegebenen Punktes, abgetragen wird.

Statt des rechten Distanzpunktes hätte auch der linke benutzt werden dürfen. Welches ist die Abbildung des in der Grundebene gelegenen Dreiecks $𝔔𝔓_x𝔓$?

2) Übungsaufgaben. Die Perspektive a) einer beliebig in der Grundebene liegenden Strecke 𝔏𝔐, b) eines beliebig in der Grundebene gelegenen Dreiecks 𝔏𝔐𝔑 zu zeichnen.

§ 33. Perspektivische Darstellung ebener in der Grundebene gelegener Figuren.

1) Aufgabe 1. Die Perspektive eines in der Grundebene gelegenen Rechtecks 𝔏𝔐𝔑𝔒, dessen Seiten 𝔏𝔐 und 𝔑𝔒 der Grundlinie parallel sind, zu zeichnen[1] (Fig. 137).

[1]) Bei der Anfertigung von Zeichnungen ist es vielleicht zu empfehlen, statt der schwer in Druckform zu gebenden deutschen Buchstaben kleine lateinische zu benutzen.

Wir verlängern die Tiefenstrecken $\mathfrak{L}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ bis zu ihren Schnittpunkten $\mathfrak{L}_x$ und $\mathfrak{M}_x$ mit der Grundachse $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ und loten diese Punkte auf die Bildachse X_1X_2 hinauf. Die Perspektiven der Tiefenstrecken $\mathfrak{L}\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ liegen dann auf den nach dem Hauptpunkt H gehenden Strecken L_xH und M_xH. Die Bilder L und M der Punkte $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ finden wir durch Abbildung der durch diese Punkte gelegten 45°-Linien $\mathfrak{L}\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{Q}$. Weil Breitenlinien im Bilde auch als solche erscheinen, haben wir nur noch durch L und O zur Bildachse die Parallelen zu ziehen, die M_xH in M und N treffen. Das Trapez LMNO ist das Bild des gegebenen Rechtecks.

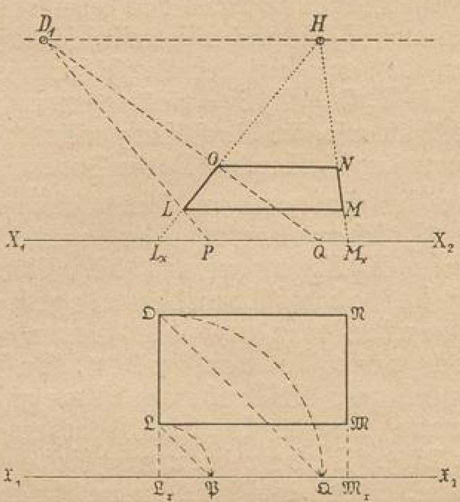
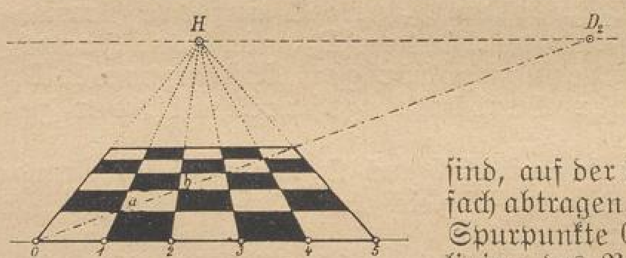


Fig. 137.

Aufgabe 2. Das perspektivische Bild eines in der Grundebene liegenden Quadratnetzes (z. B. eines quadratisch gefelderten Fußbodens) zu zeichnen (Fig. 138).

Die erste Reihe der quadratischen Felder stoße unmittelbar an die Grundlinie. Ihre vorderen Seiten bilden sich deshalb in wahrer Größe ab. Ihre Bilder ergeben sich also, wenn wir die Seite eines quadratischen Feldes, von denen einige an der Grundachse[1]) (Spurlinie) in wahrer Größe gezeichnet sind, auf der Grundlinie X_1X_2 mehrfach abtragen. Damit erhalten wir die Spurpunkte 0, 1, 2, 3 . . . der Tiefenlinien des Netzes, deren Bilder im Hauptpunkt H zusammenlaufen. Die Breitenlinien des Netzes werden auch im Bilde Breitenlinien. Zu ihrer Bestimmung genügt, falls die Gesamtheit aller Quadrate ein großes Quadrat darstellt, die Abbildung einer einzigen Diagonale des großen Quadrates, etwa der von Punkt 0 ausgehenden, deren Fluchtpunkt wegen ihrer Eigenschaft als 45°-Linie der rechte Distanzpunkt ist. Werden jetzt durch die Schnittpunkte (z. B. a und b) von $\overline{0D_2}$ mit den Perspektiven der Tiefenlinien die Breitenlinien gezogen, so ist die Abbildung des Netzes fertig. (Genauigkeitsprobe mit Hilfe des Distanzstrahles $\overline{5D_1}$!)



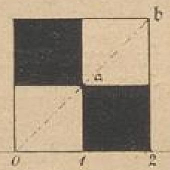


Fig. 138.

[1]) Das ist die im folgenden angewandte Bezeichnung für $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ (s. Fig. 136).

Das Quadratnetz hat zwei Scharen paralleler Diagonalen. Welches sind ihre Fluchtpunkte?

2) Die Perspektive beliebiger in der Grundebene gelegener (oder ihr paralleler) Vielecke kann stets durch mehrfache Anwendung der Grundaufgabe ermittelt werden. Dabei werden nur der Hauptpunkt und die Fluchtpunkte der 45°-Linien, die Distanzpunkte, benutzt. Kommen aber Parallelen von beliebiger Richtung vor, so ist die Verwendung ihres Fluchtpunkts für eine genaue und rasche Zeichnung geradezu geboten.

Aufgabe 3. Das perspektivische Bild einer beliebig in der Grundebene gelegenen Geraden ST zu bestimmen.

Ziehen wir durch den Augpunkt A (s. Schrägbild Fig. 139a) den Parallelstrahl zu ST, der die Bildebene im Punkte F auf der Aughöhenlinie trifft, so ist F der Fluchtpunkt der Geraden ST und die Verbindungsstrecke ihres Spurpunktes S mit F ist ihr Bild.

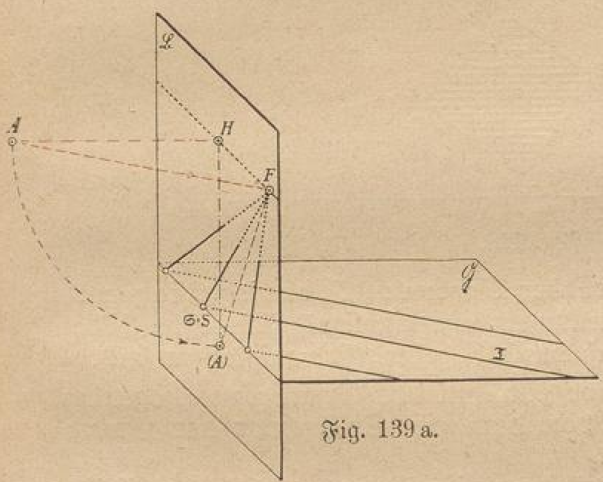


Fig. 139 a.

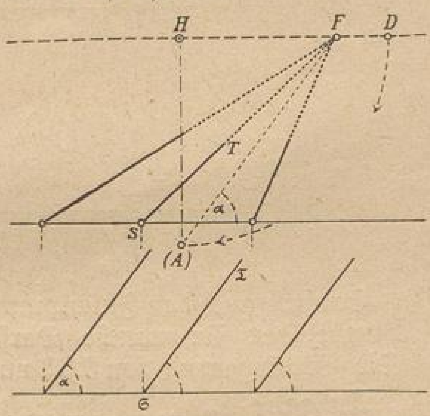


Fig. 139 b.

Um die Zeichnung in einer Ebene ausführen zu können, denken wir uns das rechtwinklige Dreieck AHF in die Bildebene herabgeschlagen, so daß der Augpunkt in die Lage (A) kommt, und die Grundebene in der vorher angegebenen Weise mit der Bildebene vereinigt (Fig. 139b). Dabei bleibt (A) F || ST.

Die Lösung gestaltet sich danach folgendermaßen: Man zeichne H(A) (Fig. 139b) gleich der Distanz HD senkrecht zur Aughöhenlinie, ziehe durch den „herabgeschlagenen Augpunkt" (A) die Parallele zu ST, die die Aughöhenlinie in F trifft, und lote den Spurpunkt S auf die Grundlinie X_1X_2 hinauf. SF ist alsdann das Bild der Geraden ST. Wie findet man die Bilder der zu ST parallelen Geraden in Fig. 139a und b?

Die angegebene Bestimmung des Fluchtpunktes F gilt auch dann, wenn ST nicht in der Grundebene liegt, sondern ihr parallel ist.

Aufgabe 4. Die Perspektive eines in der Grundebene beliebig liegenden Quadrates zu bestimmen (Fig. 140).

Wir schlagen den Hauptstrahl HA, der die als bekannt vorausgesetzte Distanz angibt, in die Bildebene herab und ermitteln nach Aufg. 3 die Fluchtpunkte F_1 und F_2 der durch die parallelen Seiten des Quadrates 𝔏𝔐𝔑𝔒 bestimmten Geraden. Durch Verlängern der parallelen Seiten 𝔏𝔐, 𝔒𝔑 und 𝔏𝔒, 𝔐𝔑 finden wir ihre Spuren (1), (2), (3), (4) auf der Grundachse, die wir durch Hinaufloten auf die Grundlinie übertragen. Das von den vier Fluchtstrahlen $\overline{1 F_2}$, $\overline{2 F_2}$, $\overline{3 F_1}$ und $\overline{4 F_1}$ begrenzte Viereck ist die gesuchte Abbildung.

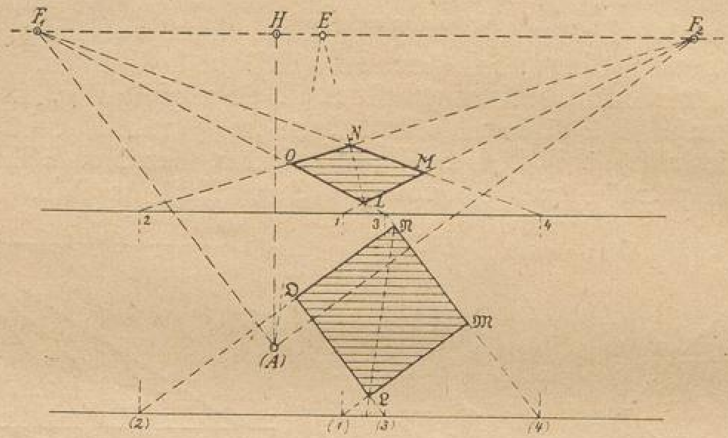


Fig. 140.

Ermittle auch den Fluchtpunkt E der Diagonale 𝔏𝔑, den sog. Diagonalpunkt, der für manche Darstellungen ein wichtiges Hilfsmittel bildet. Die Verlängerung von LN muß durch E gehen (Genauigkeitsprobe!).

Aufgabe 5. Die Perspektive eines in der Grundebene liegenden regelmäßigen Sechsecks, von dem ein Seitenpaar der Grundlinie parallel ist, zu zeichnen.

Mit Einrechnung der Hauptdiagonalen kommen drei Parallelenscharen vor!

Aufgabe 6. Einen Fußboden mit regelmäßigen sechseckigen Feldern in Perspektive zu setzen.

3) Das perspektivische **Bild einer Kurve** ergibt sich dadurch, daß man eine hinreichend große Anzahl von Kurvenpunkten abbildet und die erhaltenen Bildpunkte durch einen zusammenhängenden Kurvenzug verbindet.

Aufgabe 7. Einen in der Grundebene liegenden Kreis in Perspektive zu setzen (Fig. 141).

Wir zeichnen das dem Kreise umgeschriebene Quadrat 𝔏𝔐𝔑𝔒, dessen Seiten der Breiten- und Tiefenrichtung parallel sind und den Kreis in den Punkten 1, 2, 3, 4 berühren. Dieses Quadrat bilden wir samt den Diagonalen, die den Kreis in den Punkten 5, 6, 7, 8 treffen, mit Hilfe des Distanzpunktes D_1 ab.[1]) Damit erhalten wir auch die

[1]) Es braucht dabei nur ein Distanzstrahl, nämlich LD_1, auf dem das Bild der Diagonale LP liegt, verwandt zu werden.

Bilder der Punkte 1, 2, 3, 4 und die der Tangenten in diesen Punkten. Die Bilder der Punkte 5, 6, 7, 8 liegen auf den bereits abgebildeten Diagonalen, ferner auf den Perspektiven der durch die Punktpaare 8, 5 und 6, 7 gehenden Tiefenlinien. Die Abbildung der 8 Kreispunkte samt den Tangenten in den Hauptpunkten 1, 2, 3, 4 genügt, um die Perspektive der Kurve, die hier eine Ellipse ist, mit hinreichender Genauigkeit zu zeichnen.

Zur genaueren Zeichnung des Kreisbildes bilde man auch die Tangenten in den Punkten 5, 6, 7 und 8 ab. Wo müssen sich die Bilder der Tangentenpaare in den Punkten 5, 7 und 6, 8 schneiden?

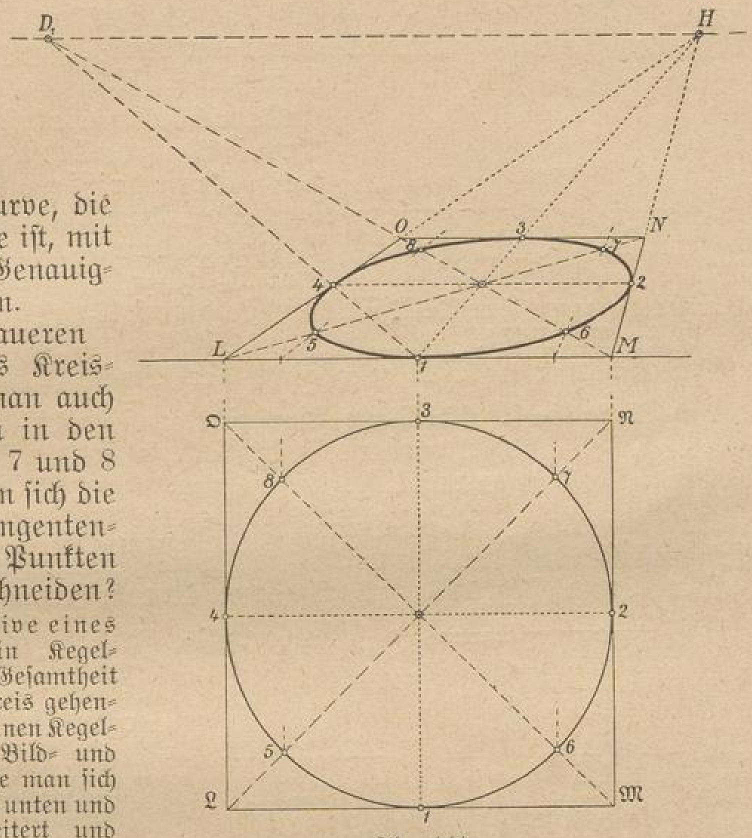


Fig. 141.

Die Perspektive eines Kreises ist ein Kegelschnitt, da die Gesamtheit der nach dem Kreis gehenden Sehstrahlen einen Kegelmantel bilden. Bild- und Grundebene denke man sich entsprechend nach unten und nach vorn erweitert und den in der Grundebene liegenden Kreis auch nach vorn vor die Grundlinie verschoben, so daß er die durch den Grundriß des Augpunktes zur Grundlinie gezogene Parallele, die „Fluchtlinie“ der Bildebene, 1. nicht schneidet, 2. berührt und 3. schneidet. In welchem Falle ist seine Perspektive eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel?

§ 34. Die zweite Grundaufgabe. Perspektivische Darstellung einfacher Körper.

1) Zweite Grundaufgabe. Die Perspektive eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, dessen Grundriß $\mathfrak{P}_1$ und Abstand von der Grundebene gegeben sind (Fig. 142).

Das Bild des Grundrisses $\mathfrak{P}_1$ kann ohne weiteres nach der ersten Grundaufgabe bestimmt werden. Da die Strecke $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ senkrecht zur Grundebene ist, so muß auch ihre Perspektive als Höhenlinie erscheinen und kann daher ihrer Richtung nach schon gezeichnet werden. Denken wir uns durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ die Tiefenlinien gezogen, die $\mathfrak{B}$ in P_x und P_0 treffen (Schrägbild!), so ist $P_x\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}\,P_0$ ein Rechteck, dessen

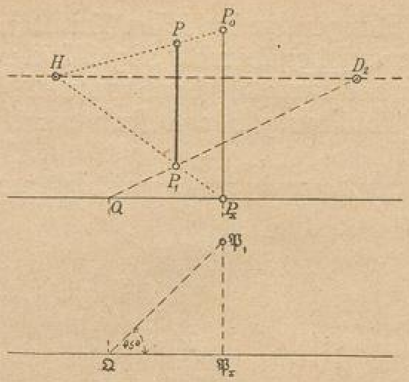


Fig. 142.

in $\mathfrak{B}$ gelegene Seite $P_x P_0$, der Aufriß von $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$, sich in wahrer Größe abbildet. Da die Tiefenstrecke P_0P ihren Fluchtpunkt im Hauptpunkte hat, so ergibt sich das Bild P von $\mathfrak{P}$ als Schnittpunkt der durch P_1 gezogenen Höhenlinie mit P_0H.

Danach haben wir folgende Lösung: Ermittle zunächst das Bild P_1 des Grundrisses $\mathfrak{P}_1$, errichte im Spurpunkte P_x des durch P_1 gehenden Hauptstrahls das Lot $P_xP_0 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$ und ziehe die Verbindungsstrecke P_0H, die die durch P_1 gehende Höhenlinie in P trifft.

P_1P ist „perspektivisch gleich" der Strecke $P_xP_0 = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}$.

2 a) **Aufgabe 1.** Die Perspektive eines auf der Grundebene ruhenden Würfels, dessen vordere Seitenfläche a) in der Bildebene liegt, b) der Bildebene parallel ist, zu zeichnen.

Aufgabe 2. Eine quadratische Säule, die auf quadratischer Grundplatte steht, in Perspektive zu setzen (Frontansicht!).

Der Körper (Fig. 143) ist durch seinen Grundriß und die Höhen der Grundplatte und der Säule gegeben. Die Abbildung der Grundfläche ergibt sich in bekannter Weise mit Hilfe zweier Hauptstrahlen und eines Distanzstrahles.

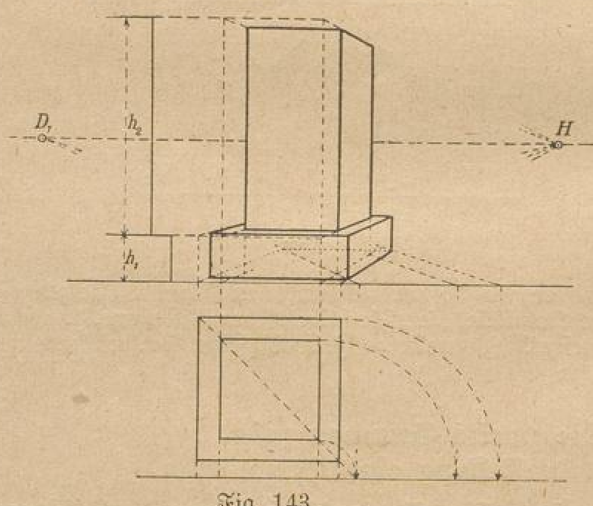


Fig. 143.

Bemerkung. Die Abbildung von wagerechten Flächen gestattet einen Einblick in die Gestaltungseigentümlichkeiten des perspektivischen Bildes. Auf wagerechte Flächen, die unter Aughöhe liegen, hat man im Bilde „Aufsicht", auf höherliegende „Untersicht". Wie bilden sich wagerechte Flächen in Aughöhe ab? Man bilde z. B. einen Quader in Frontstellung ab und zeichne eine Anzahl wagerechter Schnitte.

Aufgabe 3. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide, die auf ihrer Grundfläche ruht, in Perspektive zu setzen.

Von dem Körper ist die Grundfläche ihrer Lage nach in der Grundebene und die Höhe h gegeben. Nach Abbildung der Grundfläche und ihres Mittelpunktes M bestimmt man nach der zweiten Grundaufgabe das Bild der Spitze.

Aufgabe 4. Das perspektivische Bild eines Kreiskegels, der auf der Grundfläche ruht, zu zeichnen.

Der Kegel ist durch die Lage des Mittelpunktes M des Grundkreises in der Grundebene, dessen Radius r und die Höhe h gegeben. Nach Abbildung des Grundkreises und der Spitze zieht man von S, dem Bilde der Spitze, an die Perspektive des Grundkreises die Tangenten, die die Umrißlinien auf dem Mantel darstellen.

Will man die Umrißmantellinien konstruieren, so ist zu beachten, daß sie die Berührungslinien der durch den Augpunkt A an den Kegel gelegten Sehstrahlenebenen bilden (Schrägbild!). Ihre Schnittgerade AS trifft die Grundebene im Punkte T, den man durch Umlegung der Strecke AS um ihren Grundriß in die Grundebene G leicht finden kann. Die von T an den Grundkreis gezogenen Tangenten bestimmen die Berührungspunkte der Sehstrahlenebenen auf dem Grundkreis.

Aufgabe 5. Eine regelmäßig-sechsseitige Säule, die auf der Grundebene steht, in Perspektive zu setzen. Vgl. § 33 Aufg. 5.

Aufgabe 6. Einen auf der Grundebene stehenden geraden Kreiszylinder in Perspektive zu setzen.

Der Zylinder ist durch die Lage des Mittelpunktes M und den Radius r des Grundkreises, ferner durch die Höhe h gegeben. Unter Benutzung des umgeschriebenen Quadrates, von dem ein Seitenpaar der Grundlinie parallel ist, bildet man zunächst den Grundkreis ab und bestimmt dann das Bild des dem Zylinder umgeschriebenen regelmäßig-vierseitigen Prismas. In das Bild der Deckfläche des Prismas zeichnet man nach Ermittlung wichtiger Bildpunkte die Perspektive des Deckkreises ein. Schließlich zieht man an die beiden Ellipsen, die sich als die Perspektiven der Grund- und Deckfläche ergeben, die gemeinsamen Tangenten, die die Umrißmantellinien, durch die der Körper seitlich begrenzt erscheint, darstellen (Konstruktion!). Die Tangenten müssen parallel zur Zylinderachse sein, was für die Genauigkeitsprobe der Zeichnung von Wichtigkeit ist.

Aufgabe 7. Eine zylindrische Säule a) auf quadratischer, b) auf zylindrischer Grundplatte in Perspektive zu setzen.

b) **Aufgabe 8.** Das perspektivische Bild eines auf der Grundebene stehenden Quaders in Übereckstellung zu zeichnen.

Zur Abbildung der zur Grundebene parallelen Strecken benutzt man ihre Fluchtpunkte, die ja auf der Aughöhenlinie liegen. Die Fluchtpunkte F_1 und F_2 der zur Grundebene parallelen Kanten und der „Diagonalfluchtpunkt“ werden mit Hilfe des umgelegten Augpunktes bestimmt. Zur Lösung vgl. § 33 Aufgabe 4.

Aufgabe 9. Die Perspektive einer quadratischen Säule, die auf einem quadratischen Sockel steht, in schräger Ansicht zu zeichnen.

Aufgabe 10. Die Perspektive eines Hauses mit Walmdach in schräger Ansicht zu bestimmen (Fig. 144).

Von den Umrissen des Hauses ist der Grundriß vollständig gegeben. Vom Aufriß dagegen ist nur so viel über der Grundlinie, und zwar in gerader Ansicht, gezeichnet, als zur Entnahme der Höhe der Firstlinie und der lotrechten Hauskanten erforderlich ist. Lösung s. Fig.

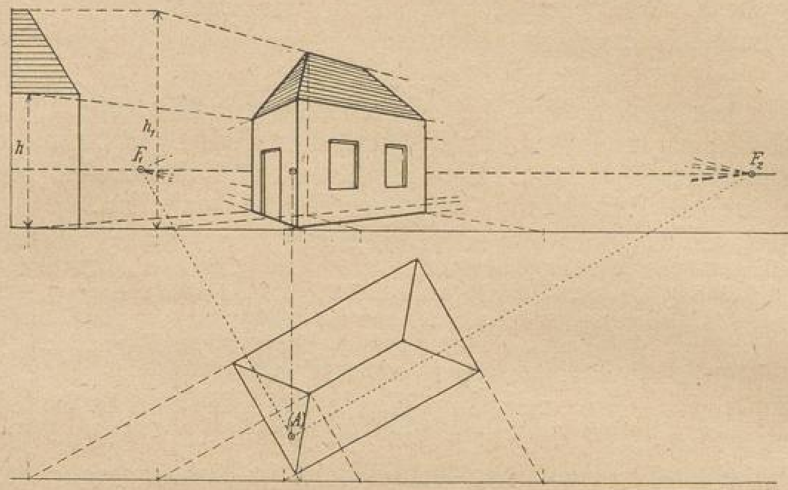


Fig. 144.

Aufgabe 11. Das perspektivische Bild eines quadratischen Obelisken samt Sockel und aufgesetzter Pyramide a) in Frontstellung, b) in Übereckstellung zu entwerfen.

Von dem Körper ist in Fig. 145 die Hälfte des Aufrisses in Frontansicht gezeichnet. Der Grundriß ist durch die beigefügten Maße (cm) mit gegeben, da der Querschnitt quadratisch ist.

Bemerkung. Freistehende Gegenstände bildet man gern in schräger Stellung (Übereckstellung) ab, weil die Bilder so einen frischen und natürlichen Eindruck machen. Im Gegensatz dazu wirken die Frontalansichten solcher Gegenstände oft steif und gezwungen. Das rührt daher, daß die Frontfiguren sämtlich durch ähnliche abgebildet werden, während die unmittelbar anstoßenden seitlichen Figuren im Bilde stark verzerrt erscheinen. Für Innenansichten jedoch ist die Frontansicht vorzuziehen.

Fig. 145.

3) Aufgabe 12. Die Perspektive einer auf der Grundebene ruhenden Kugel, die die Bildebene berührt, zu entwerfen.

Bevor wir zur Lösung übergehen, ist eine kurze geometrische Betrachtung erforderlich. Fig. 146 stellt den Achsenschnitt eines Kreiskegels dar, der von einer beliebigen Ebene B geschnitten wird, die mit dem Achsenschnitt die Linie AB gemeinsam hat. In den Kegel denken wir uns die Berührungskugeln K und K_1 gelegt, die die Schnittebene B in F_1 und F_2 berühren (vgl. L. II. § 51, 2). Betrachten wir die Spitze S des Kegels als den Augpunkt, die Kugel K als die abzubildende Kugel und B als die Bildebene, so sind die die Kugelfläche berührenden Sehstrahlen nichts anderes als die Mantellinien des Kegels. Ihr Schnitt mit B ist das Umrißbild der Kugel. Dieser Schnitt ist (Bew. s. L. II. § 51, 2) eine Ellipse mit den Brennpunkten

F_1 und F_2. Verlängern wir den Sehstrahl SF_2 bis zum zweiten Schnittpunkt F' mit der Kugel K, so ist, weil S äußerer Ähnlichkeitspunkt für die beiden Berührungskugeln ist, $KF' \parallel K_1F_2$ und, da $K_1F_2 \perp AB$ ist, ebenfalls senkrecht zu AB. Daher liegt KF' in der Verlängerung des zu AB senkrechten Kugelradius KF_1. Damit erhalten wir den für die Konstruktion der Umrißellipse wichtigen Satz:

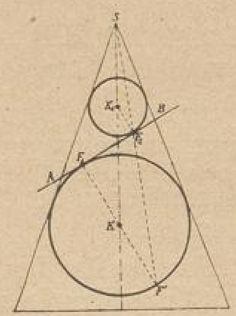


Fig. 146.

Die Perspektive einer Kugel ist im allgemeinen eine Ellipse. Ihre Brennpunkte sind die Bilder der Endpunkte des zur Bildebene senkrechten Kugeldurchmessers.

Lösung. (Fig. 147.) Wir bestimmen zunächst unter Benutzung der umgeschriebenen Quadrate die Perspektiven der drei Hauptkreise, nämlich des wagrechten, des zu B senkrechten und des frontalen Kreises. B_1B_2 ist das Bild der frontalen, N_1N_2 das der lotrechten

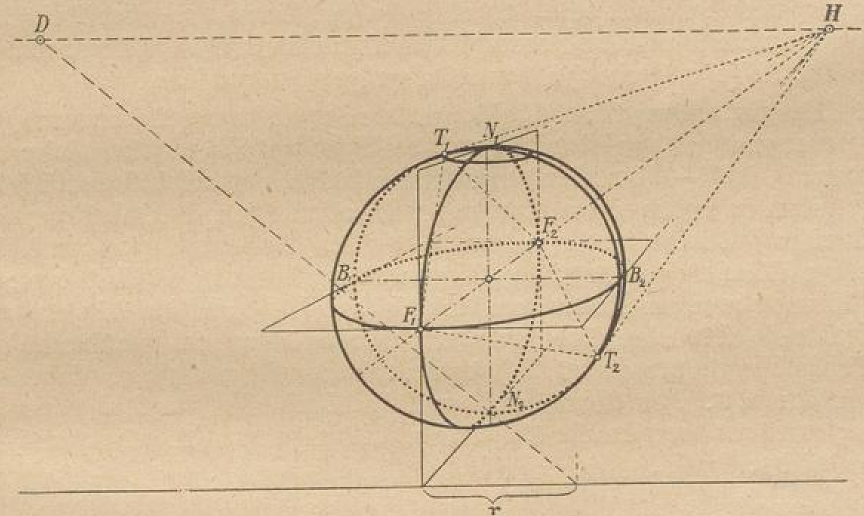


Fig. 147.

Achse des Achsenkreuzes der Kugel. Die Endpunkte der Tiefenachse ergeben die Brennpunkte F_1 und F_2 der gesuchten Umrißellipse. Der Mittelpunkt M von F_1F_2 ist der Mittelpunkt der großen Achse. Um die Kurve aus ihren Hauptachsen bestimmen zu können, ist noch ein Bestimmungsstück nötig, z. B. die Kenntnis eines Punktes der Kurve. Ziehen wir in irgendeinem Punkte des Frontalkreisbildes $B_1N_2B_2N_1$ die Hauptstrahlen, z. B. in B_1 und B_2 B_1H und B_2H, so geben diese Randtangenten die Richtung an, in der das Bild des Breitenkreises das Bild des frontalen Hauptkreises schneidet. Unter den sämtlichen Breitenkreisen gibt es zwei, nämlich den durch T_1 und den durch T_2, bei denen je eine Randtangente zugleich Tangente des frontalen Hauptkreises ist. Die von H an diesen Kreis gezogenen

Tangenten HT_1 und HT_2 bestimmen also die Punkte T_1 und T_2, in denen die Tangenten des Kreises mit der Umrißellipse zusammenfallen. Die Berührungspunkte T_1 und T_2 sind somit Punkte der gesuchten Ellipse, und die Summe der Brennstrahlen von T_1 (oder T_2), $T_1F_1 + T_1F_2 = 2a$, liefert uns jetzt die Länge der großen Achse $2a$. Daraus kann die kleine Achse und schließlich die Umrißellipse bestimmt werden.

Um die Anschaulichkeit des erhaltenen Bildes zu heben, teile man den lotrechten Durchmesser in eine Anzahl perspektivisch gleicher Teile, lege durch die Teilpunkte wagerechte Schnittebenen, die die Kugel in Parallelkreisen schneiden, und bilde diese ab. Die Perspektiven dieser Kreise sind Ellipsen. Die sie umhüllende Ellipse ist die Umrißfigur der Kugel.

Bemerkung 1. Ebenso wie die Kugel kann jeder auf wagerechter Unterlage ruhende Umdrehungskörper (z. B. eine Schale oder Vase), der durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Achse entstanden ist, durch Abbildung wagerechter Schnitte abgebildet werden. Denn jeder wagerechte Schnitt des Körpers ist ein sog. Parallel- oder Breitenkreis. Für die Darstellung braucht von einem Umdrehungskörper nur die Lage der Achse und ein Halbmeridian gegeben zu sein.

2. Die zentralprojektive Abbildung der Kugel findet Anwendung bei der **stereographischen Projektion der Erdoberfläche.** Bei dieser von Hipparch (160—125 v. Chr.) ersonnenen Abbildungsart befindet sich der Augpunkt A in irgend einem Punkte der Erdoberfläche; als Bildebene dient die Berührungsebene im Gegenpunkte von A. So nimmt man zur Abbildung der südlichen Halbkugel den Augpunkt im Nordpol, als Bildebene die Berührungsebene im Südpol an. Wie bilden sich dabei die Längen- und Breitenkreise ab? Diese Abbildungsart, die man besonders zur Darstellung der Erdhalbkugeln verwendet, besitzt zwei wichtige Eigenschaften. Erstens ist sie winkeltreu, d. h. die Winkel auf der Kugeloberfläche sind gleich denen im Bilde; zweitens werden alle Kugelkreise, die nicht durch A gehen, auch im Bilde wieder Kreise.

§ 35. Verfahren beim Hinausfallen eines Distanz- oder anderen Fluchtpunktes.

1) Bei der perspektivischen Darstellung größerer Gegenstände muß die Augdistanz entsprechend größer gewählt werden, da sonst starke Verzerrungen in der Zeichnung auftreten, die aus Schönheitsrücksichten möglichst vermieden werden müssen. Infolgedessen fallen dann häufig die Distanzpunkte über die Grenzen der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche hinaus. In solchen Fällen benutzt man Teile der Distanz und bezeichnet, je nachdem man vom Hauptpunkt die Hälfte, ein Drittel oder ein Viertel der Distanz abträgt, die erhaltenen **Teildistanzpunkte** D_t als Halb-, Drittel- oder Vierteldistanzpunkte $\left(D_{(\frac{1}{2})}, D_{(\frac{1}{3})}, D_{(\frac{1}{4})}\right)$.

Aufgabe. Das Bild eines in der Grundebene gelegenen Punktes P zu bestimmen, wenn auf der Zeichenfläche nur ein Drittel der Distanz auf der Aughöhenlinie abgetragen werden kann (Fig. 148).

Bestimmen wir wie früher das Bild P in der erweitert gedachten Zeichenebene mit Hilfe des Distanzpunktes D, so wird durch P der Hauptstrahl $P_x H$ im Verhältnis des Tiefenabstandes $\mathfrak{P}_x \mathfrak{P} = t$ des gegebenen Punktes $\mathfrak{P}$ zur Distanz d geteilt, also $P_x P : PH = t : d$. Um nun $P_x H$ im gleichen Verhältnis zu teilen, wenn $HD_t = \frac{1}{3} d$ auf der Aughöhenlinie gegeben ist, tragen wir auf der Grundlinie von P_x $P_x R = \frac{1}{3} t$ ab. Durch die Verbindungsstrecke RD_t wird dann $P_x H$ ebenfalls im Verhältnis $t : d$ geteilt (Beweis!). Der erhaltene Teilpunkt fällt also mit dem nach der ersten Grundaufgabe bestimmten Punkte P zusammen.

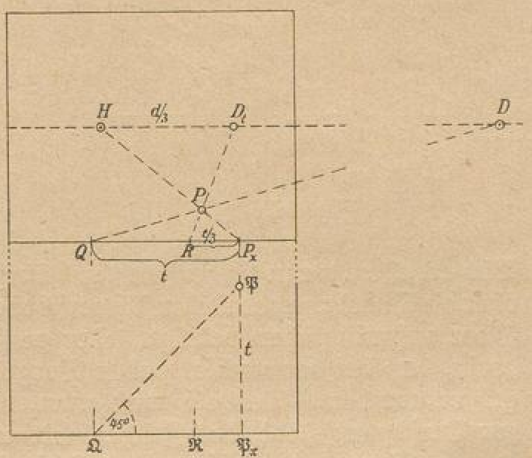


Fig. 148.

Löse auch die Aufgabe, wenn nur $\frac{1}{4}$ der Distanz benutzt werden kann.

Löse zur Übung die Aufgaben §§ 33 und 34 mit Hilfe von Halb- und Vierteldistanzpunkten.

2) Bei Darstellungen in schräger Ansicht kommt häufig ein Hauptfluchtpunkt außerhalb der Grenzen der Zeichenfläche zu liegen. Es entsteht dann die Aufgabe, von einem Bildpunkte aus eine Gerade nach dem auf der Aughöhenlinie liegenden „unzugänglichen" Fluchtpunkte zu ziehen, dessen Lage immer durch zwei gegebene Gerade bestimmt ist. Dieser Schwierigkeit kann man in doppelter Weise begegnen, entweder auf geometrischem Wege oder technisch mit mechanischen Hilfsmitteln.

Aufgabe 1. Die Perspektive dreier in der Grundebene gelegener Parallelen zu zeichnen, wenn ihr Fluchtpunkt außerhalb der Grenzen der Bildfläche liegt (Fig. 149).

Es sei (A) der herabgeschlagene Augpunkt und (A)U der herabgeschlagene Fluchtstrahl der in der Grundebene gelegenen Parallelen, deren Spurpunkte auf der Grundlinie 1, 2 und 3 seien. Da der Schnittpunkt F des Fluchtstrahls (A)U mit dem Horizont, der Fluchtpunkt der gegebenen Parallelen, außerhalb der Zeichenfläche angenommen wird, so haben wir die Aufgabe, um die Bilder der Parallelen zu finden, von den Punkten 1, 2, 3 die Geraden nach dem unzugänglichen Punkte F zu ziehen. Zu diesem Zwecke führen wir die Zeichnung zunächst in verkleinertem Maßstabe, hier im Verhältnis 2 : 1 aus, wobei wir den Hauptpunkt H als Ähnlichkeitspunkt benutzen: $\overline{H(A_t)} = \frac{1}{2}\overline{H(A)}$, $\overline{H1'} = \frac{1}{2}\overline{H1}$, $\overline{H2'} = \frac{1}{2}\overline{H2}$ usf. Die durch (A_t) zu (A)U gezogene Parallele trifft die Horizontlinie in F_t; $\overline{HF_t} = \frac{1}{2}\overline{HF}$ (Beweis!).

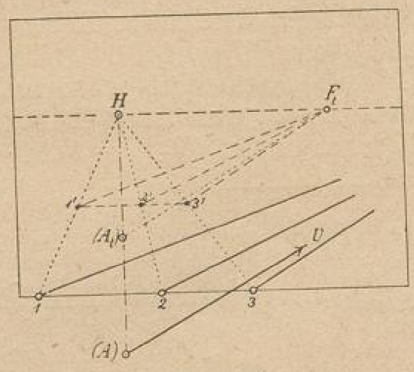


Fig. 149.

Ziehen wir jetzt durch die Spurpunkte 1, 2, 3 entsprechend zu $1'F_t$, $2'F_t$, $3'F_t$ die Parallelen, so gehen sie durch F. Der Beweis gründet sich auf die Umkehrung des Satzes: Parallele schneiden die Schenkel eines Winkels (Strahlen eines Strahlenbüschels) in verhältnisgleichen Strecken.

Die von uns gezeichnete Verkleinerung hätten wir als Bild erhalten, wenn Gegenstand und Auge ihre gegenseitige Lage behielten, aber die Bildebene parallel zu sich verschoben worden wäre, bis die Distanz nur $\frac{1}{2}$ der ursprünglichen beträgt. Der große Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß bei der nachfolgenden Vergrößerung auch die Ungenauigkeiten größer werden. Deshalb wird man, wenn ein hinreichend großer Tisch zur Verfügung steht, das Zeichenblatt auf diesen befestigen und mit einem langen Lineal oder gespannten Zwirnfaden den Fluchtpunkt bestimmen und mit einem Reißstift festlegen. Um diesen schlingt man einen dünnen Faden, der durch ein kleines Gewicht gespannt wird, und bestimmt mit ihm die nach dem Fluchtpunkt gehenden Linien, die mit Hilfe eines vorsichtig herangeschobenen Lineals gezogen werden.

Aufgabe 2. Von einem beliebigen Punkte 1 die Gerade nach dem unzugänglichen Fluchtpunkte F, der durch die Richtungslinie LM bestimmt ist, zu ziehen (Fig. 150).

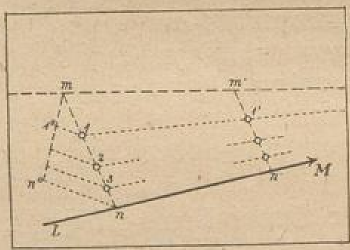


Fig. 150.

Ziehe durch 1 eine beliebige Gerade, die den Horizont in m und LM in n trifft, und in einiger Entfernung zu mn eine Parallele m′n′. Teile m′n′ in 1′ in demselben Verhältnis, wie mn durch 1 geteilt wird. 11′ ist dann die gesuchte Gerade. Löse die Aufgabe auch für die Punkte 2 und 3, die auf mn liegen. Beweis!

§ 36. Von der Lage des Augpunktes.

Damit ein nach den Gesetzen der Perspektive dargestellter Gegenstand einen naturgetreuen Eindruck gewährt, muß der Beschauer sein Auge annähernd in den Augpunkt bringen, d. h. an die Stelle, an der vorher das Auge des Zeichners war oder für die Herstellung des Bildes angenommen wurde. Das zeigt sich besonders kraß bei dem in Fig. 147 gezeichneten Bilde der Kugel. Nur wenn man ein Auge, etwa das linke, über den Hauptpunkt in die Entfernung der Distanz bringt, erscheint die Umrißellipse als ein Kreis. Befindet sich dagegen das Auge an irgendeiner anderen Stelle, so sieht es den Umriß als Ellipse, was aber der tatsächlichen Wahrnehmung widerspricht, daß der Umriß einer Kugel dem Auge von jeder beliebigen Stelle aus stets als ein Kreis erscheint.[1])

Deswegen hat man auch heutzutage begonnen, trotzdem die Perspektive bei den heutigen Malern und Zeichnern sich keiner besonderen Wertschätzung erfreut, Gemälde und andere Bilder in Museen, Ausstellungen, ja selbst in Wohnungen in Augenhöhe des Beschauers aufzuhängen, so daß dieser immer den richtigen Standpunkt vor dem Bilde einnehmen kann. Geschieht dies, so geht das Bild nach der Ausdrucksweise des Malers tatsächlich auseinander. Man mache z. B. den Versuch mit dem Bild in Abb. 3, das man in der

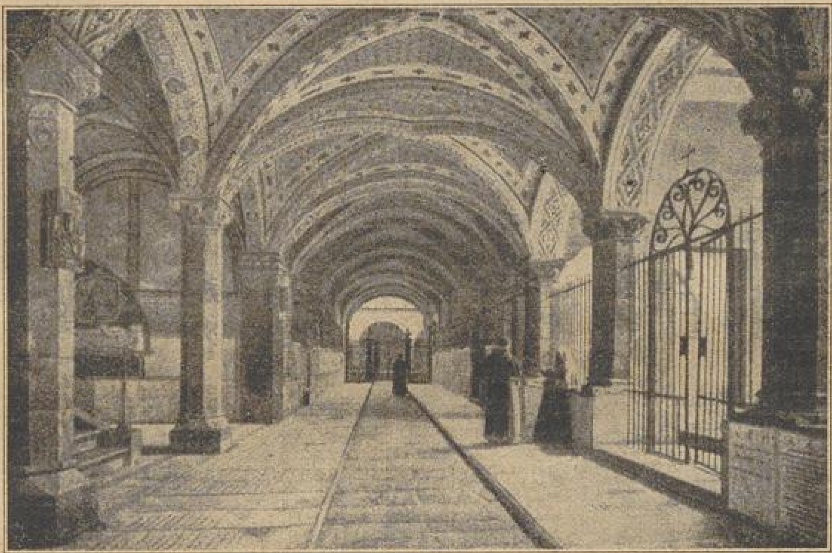


Abb. 3. Dominikanerkloster „Santa Maria Novella“ in Florenz. Nach Barducci.

richtigen Entfernung vor das Auge hält. Wird das Bild in die richtige Aughöhe gebracht, so scheint der Gang auch wagerecht zu sein. Beachtenswert ist, daß der Gang dem Auge zu folgen scheint, wenn man das Bild von der Seite ansieht. Ermittle den Hauptpunkt und die Aughöhenlinie, ferner den rechten Distanzpunkt und den Augabstand.

Gerade durch die Rücksicht auf den Beschauer sind dem Zeichner für die Wahl des Augpunktes, dessen Lage bei einem Bilde durch den Hauptpunkt und die Angabe der Distanz völlig bestimmt ist, gewisse Grenzen gezogen. Da man Bilder niemals schief von der Seite, sondern stets von vorn betrachtet, so folgt zunächst für die Wahl des Hauptpunktes die Regel:

Der Hauptpunkt ist innerhalb der Bildfläche, und zwar ungefähr in der Mitte des Bildes zu wählen.

Betrachtet man ein lotrecht aufgehängtes oder aufgestelltes größeres Bild, so pflegt man mitten davor hinzutreten, und zwar um so weiter

[1]) Nur in dem einen Falle bildet sich der Umriß einer Kugel als Kreis ab, wenn ihr Mittelpunkt in den Hauptpunkt zu liegen kommt.

von ihm entfernt, je größer die Ausdehnung des Bildes ist, um mit einem Blick ohne lästige Bewegungen des Kopfes das Ganze übersehen zu können. Nun ist man imstande, mit einem Blick ein Gesichtsfeld zu überblicken, das einem Sehkegel mit einem Öffnungswinkel von ungefähr 60° entspricht. Das trifft zu, wenn der Augabstand von der Bildfläche, die Distanz, das ein- bis zweifache der größeren Ausdehnung des Bildes nach der Seite oder Höhe beträgt. Damit haben wir die zweite wichtige Regel:

Die Distanz ist gleich der ein- bis zweifachen größeren Ausdehnung des Bildes nach der Seite oder Höhe zu nehmen.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man auch, wenn man ein an die Grundlinie stoßendes Quadrat für verschiedene Distanzen abbildet. Ist die Distanz gleich der einfachen Bildbreite, so wird im Bilde die hintere Quadratseite gleich der Hälfte ihrer wahren Länge a, ist sie gleich der doppelten Bildbreite, so wird sie auf $\frac{2}{3}$ a verjüngt. Wird die Distanz so gewählt, daß die hintere Seite kleiner als $\frac{1}{2}$ a oder größer als $\frac{2}{3}$ a wird, so wirkt das Bild unnatürlich (Grund?).

Für die genauere Bestimmung des Hauptpunktes und des Augabstandes innerhalb des durch die Regeln gegebenen weiten Spielraums sind neben anderen Gründen, die sich aus der Natur der dargestellten Gegenstände ergeben, in der Hauptsache Schönheitsrücksichten maßgebend. So wird man bei einer senkrecht zur Bildebene verlaufenden Säulenhalle niemals den Hauptpunkt genau in der Mitte der beiden Säulenreihen annehmen, weil sonst das Bild einen steifen und einförmigen Eindruck machen würde. Bei architektonischen Gegenständen wie Gebäuden, die von der Straße aus gezeichnet werden sollen, ergibt sich die Aughöhe und damit auch die Lage des Hauptpunktes von selbst; sie ist gleich der Körperlänge des Zeichners zu nehmen.

Wird der Augabstand zu klein genommen, so treten an den Seiten starke perspektivische Verzerrungen auf. Bekannt ist ja, daß bei photographischen Gruppenaufnahmen die Personen an den Seiten leicht zu dick werden. Um das zu vermeiden, nimmt der Photograph eine große Distanz und läßt kräftige Personen möglichst in der Mitte Platz nehmen oder so sich aufstellen, daß sie die schmale Seite dem Apparat zukehren. Kleine Distanzen eignen sich jedoch für die Darstellung von Innenräumen, die man ja gewohnt ist aus geringer Entfernung zu sehen und die dadurch viel anheimelnder wirken. Es ist deswegen auch kein Zufall, daß bei Raffaels vatikanischen Gemälden und bei Leonardos Abendmahl die Distanz gleich der einfachen Bildbreite ist.

Bei zu großer Distanz geht der eigentümliche perspektivische Reiz verloren.

§ 37. Perspektivische Teilung und Messung von Breiten-, Höhen- und Tiefenlinien. Perspektivische Maßstäbe.

1) Tragen wir auf einer geraden Linie eine bestimmte Strecke, z. B. 1 cm, als Maßeinheit wiederholt ab, so erhalten wir einen Maßstab. Mit Hilfe eines solchen Maßstabes können wir bei Darstellungen in gerader Parallelprojektion Breiten-, Höhen- und Tiefenstrecken sowohl unmittelbar abtragen als auch umgekehrt aus ihren Bildern ihre wahren Längen unmittelbar bestimmen.[1]) Höchstens ist dabei die Verkleinerungszahl in Rechnung zu ziehen. Bei perspektivischen Darstellungen dagegen ist das nicht möglich. Hier bedürfen wir, um im Bilde Strecken nach der Breite, Höhe und Tiefe abzutragen und zu messen, der sogenannten **perspektivischen Maßstäbe,** der Breiten-, Höhen- und Tiefenmaßstäbe. Diese beziehen wir auf einen bestimmten Maßstab, den wir der Einfachheit halber auf der Grundlinie auftragen (Fig. 151), wo im allgemeinen 1 cm im Bilde 1 m in der Wirklichkeit entsprechen soll, und bezeichnen ihn deshalb als **Grundmaßstab.**

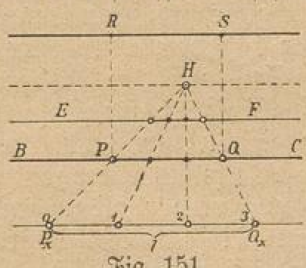


Fig. 151.

2a) Teilung und Messung von Breitenlinien. Breitenmaßstäbe.

Aufgabe 1. Auf der Bildbreitenlinie BC, die der Grundebene angehört, vom Punkte P aus die Strecke $l = 3$ cm perspektivisch abzutragen (Fig. 151).

Wir verbinden den Hauptpunkt H mit P und tragen vom Schnittpunkte P_x der Verlängerung von HP mit der Grundlinie die Strecke $P_x Q_x = l = 3$ cm ab. Die Tiefenlinie $Q_x H$ trifft BC in Q. Die Strecke PQ ist dann perspektivisch gleich $P_x Q_x = l = 3$ cm. Beweis! Was für eine Figur stellt das Trapez $P_x Q_x QP$ dar? Zeichne die Figur in der Grundebene!

Gehört die gegebene Breitenlinie, etwa RS, im Urbild nicht der Grundebene an, so tragen wir zunächst auf ihrem Grundriß (BC) die gegebene Strecke perspektivisch ab und finden durch Hinaufloten die gesuchte Bildstrecke $RS = l$.

Aufgabe 2. Die der Grundebene angehörende Bildstrecke PQ, die zur Grundlinie parallel ist, perspektivisch a) in $n = 3$ gleiche Teile, b) im Verhältnis $m : n = 2 : 3$ zu teilen.

Zu a) Man teile $P_x Q_x$ (Fig. 151) in $n = 3$ gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit H. Die Bildstrecke PQ wird durch die Hauptstrahlen in $n = 3$ **gleiche** Teile geteilt. Zeichnung in der Grundebene!

Aufgabe 3. Die wahre Länge der Bildstrecke PQ, die der Grundlinie parallel ist und deren Urbild der Grundebene angehört, zu bestimmen (Fig. 152).

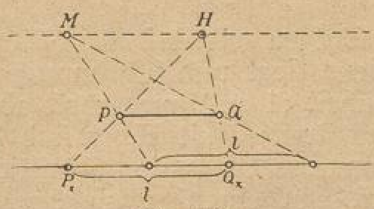


Fig. 152.

Die Lösung vollzieht sich umgekehrt wie die der Aufgabe 1.

Da mit Hilfe des Hauptpunktes H Breitenstrecken des Bildes geteilt oder gemessen werden können, so wird H auch als **Teilungs-** oder **Meßpunkt für die Breitenlinien** bezeichnet. Zum Messen von Breitenstrecken kann auch jeder beliebige

[1]) Darin besteht ja hauptsächlich der Vorteil der geraden Parallelprojektion, dem sie auch ihre weitgehende praktische Anwendung verdankt.

auf dem Horizont gelegene Punkt, z. B. M, benutzt werden. Denn die Verlängerungen der von M nach P und Q gezogenen Verbindungsstrecken schneiden auf der Grundlinie ebenfalls die wahre Länge l der gegebenen Bildstrecke ab. Beweis!

Soll auf der Bildbreitenlinie BC (Fig. 151) vom Punkte P aus die Einheitsstrecke perspektivisch mehrfach abgetragen werden, so ziehen wir nach Aufg. 1 die Tiefenlinie HP, die die Grundlinie in P_x schneidet, tragen von P_x aus auf dieser die Längeneinheit, z. B. 1 cm, wiederholt ab und verbinden die Teilpunkte mit H.[1]) Die von den Tiefenlinien begrenzten Abschnitte auf der Breitenlinie BC sind einander gleich (Beweis!). Da jeder von ihnen der Längeneinheit in Wirklichkeit entspricht, so bildet die Strecke PQ den **Maßstab** für beliebige, auf der Breitenlinie BC liegende Strecken und alle Breitenlinien derselben Tiefe. Ebenso bildet die Breitenlinie EF mit ihren Abschnitten den Breitenmaßstab für alle Strecken, die auf der Breitenlinie EF liegen. Die Maßeinheiten für die Breitenlinien werden nach hinten immer kleiner, und zwar um so mehr, je weiter diese in Wirklichkeit hinter der Bildebene liegen.

b) Teilung und Messung von Höhenlinien. Höhenmaßstäbe.

Aufgabe 4. In einem Bildpunkte P, der der Grundebene angehört, die Höhenstrecke h = 4 cm perspektivisch aufzutragen (Fig. 153).

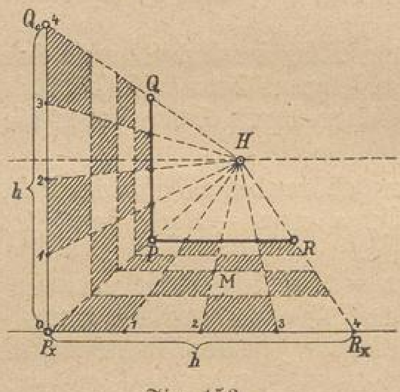


Fig. 153.

Wir ziehen die Tiefenlinie HP, die in ihrer Verlängerung die Grundlinie in P_x trifft, und errichten auf dieser das Lot $P_x Q_0 = h = 4$ cm. Die Tiefenlinie $Q_0 H$ schneidet die in P gezogene Höhenlinie in Q. PQ ist dann perspektivisch gleich $P_x Q_0 = h$. Beweis!

Eine andere Lösung ergibt sich, wenn wir durch P die Breitenlinie ziehen, auf ihr mit Hilfe des Grundmaßstabes die Strecke PR perspektivisch gleich $P_x R_x = h$ abschneiden und in P die Höhenstrecke PQ = PR ziehen. Beweis!

Tragen wir auf der Höhenlinie $P_x Q_0$ (Fig. 153), die in der Bildebene liegt und sich darauf in wahrer Größe abbildet, die Längeneinheit (1 cm) wiederholt ab und verbinden die Endpunkte der Einheitsstrecken mit H, so sind die von den Tiefenstrahlen auf PQ bestimmten Abschnitte bildgleich der Längeneinheit. Die Strecke PQ mit den einander gleichen Abschnitten bildet den **Höhenmaßstab für alle Höhenstrecken der gleichen Tiefe.** Das Auftragen von Höhen wird wesentlich vereinfacht durch die Anwendung der Höhenmaßstäbe.

Der Teilungspunkt für die Höhenlinien ist der Hauptpunkt.

[1]) Zeichne auch die zugehörige, in der Grundebene liegende Figur.

Die Maßeinheiten für die Höhenlinie PQ sind die gleichen wie die der Breitenlinie PR derselben Tiefe (Beweis! Vgl. die Perspektive eines Würfels in Frontansicht!). Es gilt daher der Satz:

Höhen- und Breitenlinien derselben Tiefe haben den gleichen Maßstab.

Von diesem Satze macht man Gebrauch, um bei Personen, die auf

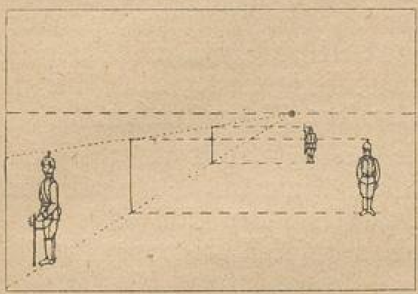


Fig. 154.

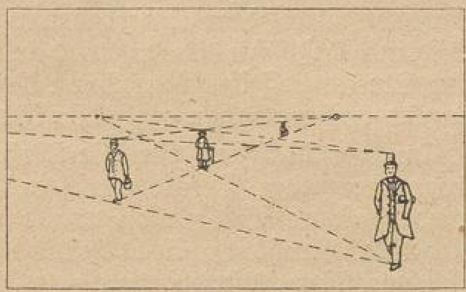


Fig. 155.

der Grundebene stehen, die Höhe von einer auf die andere zu übertragen (Fig. 154). Ein anderes allgemeineres Verfahren ist aus Fig. 155 ersichtlich.

c) Teilen und Messen von Tiefenstrecken. Tiefenmaßstäbe.

Aufgabe 6. Auf der Tiefenlinie $P_x H$, deren Urbild der Grundebene angehört, vom Punkte P aus die Strecke l perspektivisch abzutragen (Fig. 156).

Die Lösung erhellt sofort, wenn wir die Zeichnung in der Grundebene hinzufügen. Wir ziehen den Distanzstrahl $D_1 P$, dessen Verlängerung die Grundlinie in R trifft, tragen auf dieser $RS = l$ ab und verbinden S mit D_1. Die von den Distanzstrahlen RD_1 und SD_1 auf AH abgeschnittene Strecke PQ ist bildgleich $RS = l$.

Aufgabe 7. Die auf der Tiefenlinie $P_x H$ gelegene Bildstrecke PQ, deren Urbild der Grundebene angehört, a) in $n = 5$, b) im Verhältnis $m : n = 2 : 3$ perspektivisch zu teilen.

Die Lösungen ergeben sich leicht an der Hand der Zeichnung in der Grundebene (Fig. 156).

Zu a) Man ziehe die Distanzstrahlen $D_1 P$ und $D_1 Q$, die die Grundlinie in R und S treffen, teile RS in $n = 5$ gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit D. Die zu den Teilpunkten gehörigen Distanzstrahlen schneiden auf PQ $n = 5$ bildgleiche Abschnitte ab.

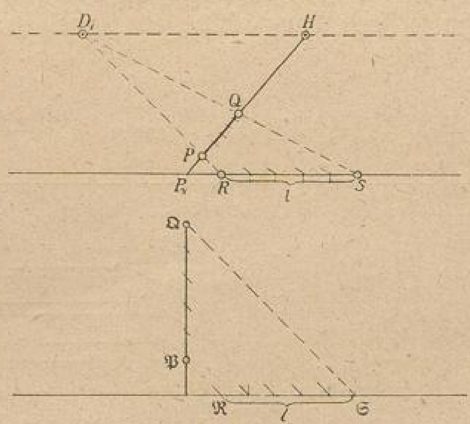


Fig. 156.

Aus den Lösungen der Aufgaben a) und b) folgt, daß die perspektivische Teilung von Tiefenstrecken mit Hilfe der Distanzpunkte geschieht. **Die Distanzpunkte sind deshalb die Teilungspunkte der Bildtiefenlinien** (vgl. Fig. 131).

Aufgabe 8. Die wahre Länge der Bildtiefenstrecke PQ, deren Urbild der Grundebene angehört, zu bestimmen (Fig. 156).

Als Umkehrung der Aufgabe 6 nimmt die Lösung der vorliegenden Aufgabe auch den umgekehrten Verlauf. Die Distanzstrahlen DP und DQ schneiden auf der Grundlinie die wahre Länge l der Strecke PQ im Maßstabe der Grundlinie aus. Die Distanzpunkte heißen daher auch die **Meßpunkte der Tiefenstrecken.**

Um den **Maßstab für die Tiefenlinie** 0H (Fig. 153) zu zeichnen, tragen wir vom Punkte 0 aus auf der Grundlinie die Längeneinheit wiederholt ab und ziehen von den Endpunkten der Einheitsstrecken die Distanzstrahlen nach D_1. Diese schneiden auf 0H die perspektivisch gleichen Einheitsstrecken ab.

Einen klaren Einblick in die Art und Weise, wie sich die Breiten-, Höhen- und Tiefenmaße nach hinten verjüngen, gewährt die in Fig. 153 gegebene Abbildung eines in der Grundebene und eines in einer Seitenebene (d. h. einer zur Grundlinie senkrechten Ebene) liegenden Netzes von Quadraten, deren Seitenlänge gleich der Längeneinheit 1 m des Grundmaßstabes ist. Die in Wirklichkeit gleich weit voneinander entfernten Breiten- und Höhenlinien rücken im Bilde immer näher zusammen.

Die Abbildung des in der Grundebene liegenden Quadratnetzes gibt die Möglichkeit, die Lage jedes Punktes der Grundebene aus seinem Bildpunkte zu bestimmen und umgekehrt. Wieviel Meter liegt z. B. der Bildpunkt M hinter der Bildebene und wieviel Meter rechts von der linken Begrenzungslinie? Gib das Bild des Punktes der Grundebene an, der 3 m rechts von der linken Begrenzungslinie und $2\frac{1}{2}$ m hinter der Bildebene liegt. Überzieht man Pläne von Straßenzügen, Gartenanlagen usw. mit einem solchen Netz von Quadraten, so kann man die Pläne leicht mit Hilfe des Netzes in Perspektive setzen.

3) Die perspektivischen Maßstäbe geben uns die Mittel an die Hand, die Perspektive eines beliebigen Gegenstandes, der durch seine Ausmessungen und seine Lage genau angegeben ist, unmittelbar zu zeichnen.

Aufgabe 9. Eine vierstufige einfache Treppe in Frontansicht zu zeichnen (Fig. 157).

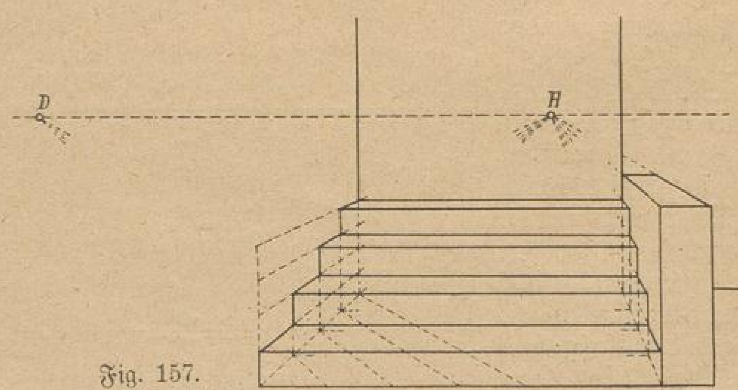


Fig. 157.

Die erste Stufe liegt mit der vorderen Fläche in der Bildebene. Breite der Stufen 2,40 m, Höhe 0,20 m, Tiefe 0,40 m. Aughöhe 1,60 m und Augabstand 3 m. Maßstab der Zeichnung 1 : 50.

Lösung s. Zeichnung. In dieser ist rechts noch eine Wange von 1 m Höhe und 30 cm Breite gezeichnet.

Aufgabe 10. Einen zur Bildebene senkrechten Säulengang zu zeichnen.

Jede Säulenreihe werde von drei Säulen gebildet. Jede einzelne von diesen bestehe aus 7 würfelförmigen Quadern, deren Kantenlänge je 40 cm betrage. Der lichte Abstand der Säulen soll 2,40 m nach der Seite und nach der Tiefe betragen. Die Vorderfläche der ersten beiden Säulen liege 2 m hinter der Bildebene. Aughöhe 1,60; Distanz 4 m. Maßstab der Zeichnung 1 : 20.

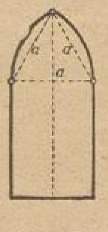


Fig. 158.

Aufgabe 11. Eine zur Bildebene senkrechte Bogenstellung (z. B. Fensterreihe mit Rund- oder Spitzbogen) in Perspektive zu setzen.

Zur Zeichnung eines Fensters mit Spitzbogen s. Fig. 158.

§ 38. Perspektivische Teilung beliebiger, der Grundebene angehörender Geraden. Teilungspunkt.

1) Aufgabe 1. Auf einer in der Grundebene gegebenen Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, die mit der Grundlinie den Winkel α bildet, ist die Strecke $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = l$ gegeben. Die Perspektive der Geraden samt der auf ihr liegenden Strecke zu zeichnen (Fig. 159).

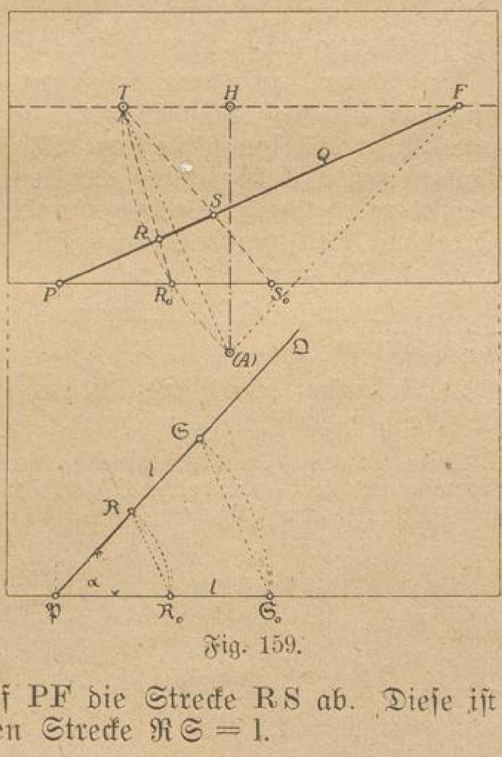


Fig. 159.

Mit Hilfe des herabgeschlagenen Augpunktes (A) ermitteln wir die durch den Fluchtpunkt F gehende Perspektive PQ der gegebenen Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, tragen auf der Grundachse $\mathfrak{P}\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{P}\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$ ab und ziehen $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_0$. Die durch (A) zu diesen parallelen Verbindungsstrecken gezogene Parallele trifft den Horizont in T, ihrem gemeinsamen Fluchtpunkte. Verbinden wir ihre auf die Grundlinie hinaufgeloteten Spurpunkte R_0 und S_0 mit T, so schneiden R_0T und S_0T, die Perspektiven der durch $\mathfrak{R}_0\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}_0\mathfrak{S}$ gehenden Geraden, auf PF die Strecke RS ab. Diese ist perspektivisch gleich der gegebenen Strecke $\mathfrak{R}\mathfrak{S} = l$.

Ist die Bildgerade PQ, die den Horizont in F schneidet, und auf ihr der Punkt R gegeben, von dem aus die Strecke l perspektivisch abgetragen werden soll, so kann der für die Lösung wichtige Punkt T ohne Benutzung der Zeichnung in der Grundebene ermittelt werden. Denn Dreieck $(A)TF$ ist ähnlich dem Dreieck $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_0\mathfrak{P}$ (Grund?) und, da dieses gleichschenklig ist, so muß $TF = (A)F$ sein. Es ergibt sich daher der Punkt T, wenn wir auf dem Horizont vom Fluchtpunkte F der gegebenen Bildgeraden die Strecke $FT = F(A)$ abtragen. Weiter ist R_0S_0 gleich $\mathfrak{R}_0\mathfrak{S}_0 = l$.

Aufgabe 2. Auf einer der Grundebene angehörenden Bildgeraden PQ vom gegebenen Punkte R eine der gegebenen Strecke l perspektivisch gleiche Strecke RS abzutragen (Fig. 160).

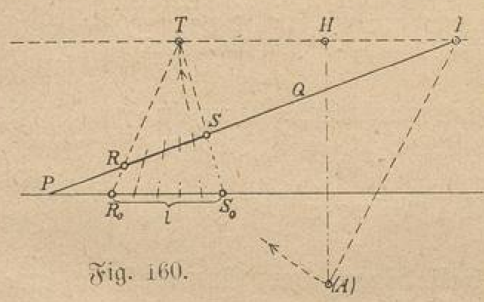


Fig. 160.

Trage auf der Aughöhenlinie $FT = F(A)$ ab, verlängere die Verbindungsstrecke TR bis zum Schnittpunkt R_0 mit der Grundlinie und schneide auf dieser $R_0S_0 = l$ ab. S_0T trifft PT in S. Alsdann ist RS perspektivisch gleich $R_0S_0 = l$.

Aufgabe 3. Die Bildstrecke RS einer in der Grundebene liegenden Strecke a) in $n = 5$ gleiche Teile, b) im Verhältnis $2 : 3$ zu teilen.

Lösung s. Fig. 160. Zum leichteren Verständnis und zur klaren Erfassung der Bedeutung des Punktes T führe gleichzeitig auch die Zeichnung in der Grundebene aus, trotzdem sie nicht erforderlich ist.

Ein solcher auf dem Horizont gelegener Punkt T, der nichts anderes als der Fluchtpunkt der in der Grundebene gelegenen parallelen Teilungsstrahlen ist und der zum perspektivischen Teilen von beliebigen in der Grundebene gelegenen Strecken verwandt wird, heißt Teilungspunkt und die von ihm ausgehenden Strahlen **Teilungsstrahlen.** Ein Teilungspunkt kann umgekehrt auch als **Meßpunkt** dienen.

Welches sind die Teilungspunkte der Breiten-, Höhen- und der Tiefenlinien?

2) Aufgabe. Die Perspektive eines Obelisken (s. § 34, Aufg. 11) in schräger Ansicht zu zeichnen.

Anmerkung. Durch Parallele, die man im Grundriß zu den beiden vorderen Grundkanten zieht, gewinnt man eine Teilung auf diesen, die man zunächst auf ihre Bilder überträgt usf.

Dritter Abschnitt.

Schattenbestimmung der Perspektive.

§ 39. Allgemeines. Hauptsätze.

1) Bei perspektivischen Darstellungen ist die Einzeichnung des Schattens ganz besonders angebracht. Dieser ist naturgemäß so einzuzeichnen, wie wir ihn sehen, also ebenfalls in Perspektive.

Wir beschränken uns auf den Fall der **Parallelbeleuchtung** und nehmen als die von der Natur gegebene Lichtquelle die Sonne an, deren Strahlen wir als parallel betrachten.

2) Zur Schattenbestimmung im allgemeinen dienen die bereits in § 25 angeführten Betrachtungen und Sätze. Sie wird danach zurückgeführt auf die Ermittlung der Schlagschatten von Punkten. Um diese Aufgabe in Perspektive zu lösen, haben wir zunächst die **Abbildung der „parallelen" Sonnenstrahlen** zu betrachten.

Es bezeichne $\mathfrak{l}$ (Fig. 161) den durch einen Punkt $\mathfrak{P}$ gehenden Lichtstrahl, der die Grundebene in $\mathfrak{p}$ trifft, und $\mathfrak{P}_1$ den Grundriß von $\mathfrak{P}$. Dann ist die durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}_1$ bestimmte Gerade $\mathfrak{l}_1$ die Grundrißprojektion des Lichtstrahls $\mathfrak{l}$. Ziehen wir nun durch den Augpunkt A den Parallelstrahl zu $\mathfrak{l}$, der die Bildebene im Punkte S durchstößt, so stellt S den Fluchtpunkt aller parallelen Lichtstrahlen dar und ist, da der Fluchtstrahl AS nach dem unendlich fern gedachten Lichtpunkte, dem Mittelpunkte der Sonne, hingeht, als das Bild dieses Punktes anzusehen. Mit Recht wird deshalb S als **Sonnen-** oder **Lichtpunkt** bezeichnet. Wegen seiner Eigenschaft als Fluchtpunkt der parallelen Lichtstrahlen gilt der Satz:

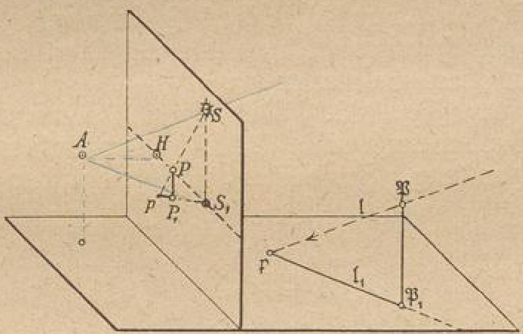


Fig. 161.

I. **Die Bilder der parallelen Lichtstrahlen laufen in dem Sonnenpunkte zusammen.**

Nun fällen wir von S auf die Aughöhenlinie das Lot SS_1 und verbinden dessen Fußpunkt S_1 mit A. Sodann ist $AS_1 \parallel \mathfrak{l}_1$ und folglich S_1 der Fluchtpunkt der senkrechten Projektionen der parallelen Lichtstrahlen. Für den **Sonnen-** oder **Lichtfußpunkt** S_1 haben wir daher den Satz:

II. **Die Grundrißbilder der parallelen Lichtstrahlen gehen durch den Sonnenfußpunkt** (vgl. Fig. 162).

Im folgenden nehmen wir den Sonnenpunkt S stets als gegeben an.

§ 40. Grund- und Übungsaufgaben.

1) Erste Grundaufgabe. Den Schlag- oder Bodenschatten eines Bildpunktes P, dessen Grundrißbild P_1 gegeben ist, zu bestimmen.

Bedeutet (Fig. 162) P das Bild des Punktes 𝔓 und P_1 das seines Grundrisses, so ist PS das Bild des durch 𝔓 gehenden Lichtstrahls und P_1S_1 das seines Grundrisses. Der Schnittpunkt p der Verlängerungen von PS und P_1S_1 ist das Bild des Spurpunktes 𝔭 des durch 𝔓 gehenden Lichtstrahls, also das Bild des gesuchten Schlagschattens auf die Grundebene. Löse danach die Aufgabe an Hand der Fig. 162.

2) Der Schatten der zur Grundebene senkrechten Strecke $𝔓𝔓_1$ (Fig. 161) fällt mit dem Grundriß des durch 𝔓 gehenden Lichtstrahls zusammen. P_1p (s. Fig. 162) ist daher das Bild des Schattens von P_1P, ebenso Q_1q von Q_1Q und R_1r von R_1R. Die Schlagschatten der zur Grundebene senkrechten Strecken (Stäbe oder Stangen) stellen sich so dar, daß sie nach rückwärts verlängert im Punkte S_1 zusammenlaufen. Ihre Schatten werden um so länger, je tiefer die Sonne sinkt.

Hinsichtlich der **Stellung der Sonne zur Bildebene** sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1. (Fig. 162.) Die Sonne steht, wie auch in Fig. 161 angenommen ist, im Angesichte des Zeichners. Ihr Bild erscheint dann über dem Horizont, und die Schatten der lotrechten Strecken kommen auf den Beschauer zu.

2. (Fig. 163.) Die Sonne steht im Rücken des Zeichners oder Beobachters. Die Schatten der Lotstrecken fallen jetzt nach vorn von ihm weg. In diesem Falle liegt der Fluchtpunkt S der von hinten nach vorn sich neigenden Lichtstrahlen unter dem Horizont. Obwohl S jetzt eigentlich nicht mehr als das Bild der punktförmig gedachten Sonne betrachtet werden kann (Grund?), bleibt die Bezeichnung Sonnenpunkt für ihn bestehen (Schrägbild!).

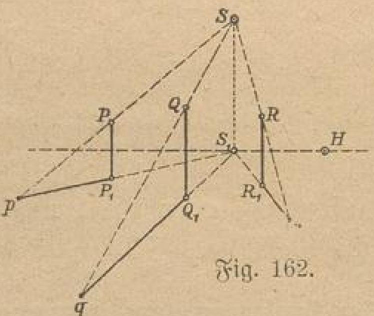


Fig. 162.

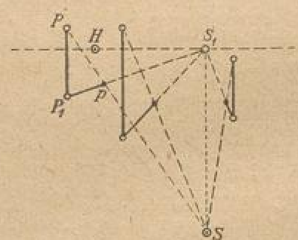


Fig. 163.

3. Die Sonne steht so, daß die Lichtstrahlen der Bildebene parallel sind. Die Lichtstrahlen bilden sich dann parallel der ursprünglichen Richtung ab. Ihre senkrechten Projektionen sind parallel der Grundlinie und erscheinen daher auch im Bilde als Breitenlinien. Durch die Lichtrichtungslinie l sind die Schatten der Lotstrecken bestimmt. Wie verlaufen die Bodenschatten der Lotstrecken? Wo liegen S und S_1?

Aufgabe 1. Den Schlag- und Eigenschatten eines auf der Grundebene stehenden Würfels (Quaders) in Frontansicht für die drei verschiedenen Stellungen der Sonne zu zeichnen.

Bemerkung. Die Wahl der Sonne im Angesicht des Beschauers kommt besonders für landschaftliche Darstellungen in Betracht (Landschaft bei Sonnenuntergang!), eignet sich aber nicht für die Darstellung architektonischer Vorwürfe, da hierbei gerade die dem Beschauer zugekehrten Teile im Selbstschatten liegen. Für solche ist die Annahme der Sonne im Rücken besonders günstig.

Aufgabe 2. Den Schlag- und Eigenschatten einer regelmäßig-sechsseitigen Pyramide, die auf der Grundebene steht, zu zeichnen, wenn die Sonne im Rücken des Beobachters angenommen wird.

Aufgabe 3. Ebenso für einen auf der Grundebene stehenden Kegel.

Aufgabe 4. Den Schlag- und Eigenschatten eines auf der Grundebene stehenden a) regelmäßig-sechsseitigen Prismas, b) geraden Zylinders zu zeichnen, wenn die Sonnenstrahlen parallel der Bildfläche sind.

Aufgabe 5. Den Schlag- und Eigenschatten eines einfachen Tores in schräger Ansicht für die zweite und dritte Stellung der Sonne zu bestimmen.

3) Zweite Grundaufgabe. Den Schatten eines Bildpunktes P, dessen Grundrißbild P_1 gegeben ist, a) auf eine lotrechte Fläche, b) auf eine wagrechte Fläche zu bestimmen.

Zu a) Die gegebene lotrechte Fläche KLMN (Fig. 164) denken wir uns bis zu ihrem Schnitt MN mit der Grundebene erweitert. Der Bodenschatten der materiell gedachten Lotstrecke P_1P geht vom Fußpunkt P_1 aus, fällt auf das Grundrißbild P_1S_1 des durch P gehenden Lichtstrahls und trifft die Spur MN im „Knickpunkte“ k. Dort steigt er (vgl. § 26, 2) an der lotrechten Fläche lotrecht empor und schneidet PS in p, dem gesuchten Schattenbild von P.

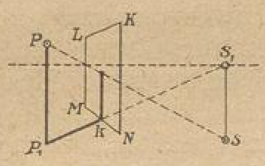


Fig. 164.

Zu b) Die Schatten empfangende Fläche sei eine wagrechte Fläche (Fig. 165) einer zweistufigen Treppe. Die Lotstrecke P_1P denken wir uns wieder materiell. Ihr Bodenschatten geht von ihrem Fußpunkt nach S_1, trifft im Knickpunkte 1 die untere Begrenzungslinie der vorderen Fläche der unteren Stufe, an der er lotrecht bis zum Knickpunkte 2 emporsteigt. Vom Punkte 2 an verläuft der Schlagschatten in der wagrechten Deckfläche und muß, da er in Wirklichkeit parallel dem Bodenschatten ist, im Bilde nach S_1 streben usf.

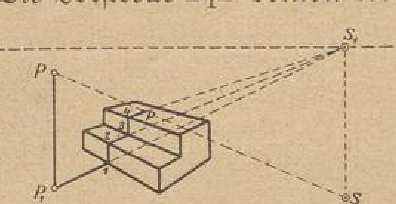


Fig. 165.

4) Übungsaufgaben. Den Schlag- und Eigenschatten der folgenden perspektivisch dargestellten Gegenstände zu bestimmen:

a) eines Quaders (Zylinders), der auf quadratischer (zylindrischer) Grundplatte ruht,

b) eines auf quadratischer Grundplatte stehenden Obelisken mit aufgesetzter Pyramide,

c) einer vierstufigen Treppe mit Wangen.

§ 41. Geschichte der Perspektive und ihre Bedeutung für die Entwicklung der Malerei. Ihre heutige Stellung. Umkehrung der Aufgabe der Perspektive (Bildmeßkunst).

1) Wie aufgedeckte Wandmalereien, landschaftliche Darstellungen auf Vasen und in Mosaik, ferner einige Stellen aus dem schon in § 24 erwähnten Buche des römischen Baumeisters M. Vitruvius Pollio beweisen, waren bereits die Griechen und Römer mit der Anwendung der perspektivischen Grundgesetze auf künstlerische Aufgaben vertraut. Die vorhandenen Kenntnisse gingen jedoch im Mittelalter verloren, und an die Stelle der perspektivischen Darstellung trat die unmalerische Parallelprojektion.

Erst beim Wiederaufleben der Künste und Wissenschaften im Zeitalter der Renaissance (im 15. Jahrhundert) wurden die Regeln der Perspektive in den Niederlanden und in Italien neu aufgefunden, weiter ausgebildet und von den großen Künstlern jener Zeit in geradezu meisterhafter Weise angewandt.

Recht früh ist der Sinn für perspektivische Darstellung in den Niederlanden, in Flandern, erwacht. Dort sind es zuerst die Brüder Hubert (1366—1426) und Jan van Eyck (1385—1440), die in ihren berühmten Genter Altarbildern die Fluchtpunkte rein erfahrungsgemäß, wenn auch nicht immer ganz streng, verwerten, während ihre Nachfolger zur weiteren Ausbildung der perspektivischen Darstellung beitragen.

In der italienischen Kunst erfolgt die Anwendung der Perspektive etwas später, entwickelt sich aber um so gewaltiger. Gerade diese Zeit genauer zu betrachten, ist ungemein lehrreich, da wir dadurch am besten ein Verständnis für ihre Bedeutung für die Entwicklung der Malerei gewinnen.

Um die Wende des 13. Jahrhunderts findet in Italien die dekorative Kunst des Mittelalters, die nur den Zweck verfolgte, die Wände zu schmücken, ihren Abschluß. Auf ihren Werken erscheinen die Gestalten in schmuckreichem Umriß nebeneinander mit goldenem oder blauem Hintergrunde.[1]) Als dann die Maler beginnen, vor allem Giotto (1276—1336), ihre Darstellungen in Landschaften und Baulichkeiten zu verlegen, da tritt an ihre Kunst die Aufgabe heran, die Malerei aus einer Flächenkunst zu einer Raumkunst zu gestalten, in die Tiefe zu gehen und die Personen auf verschiedenen Plätzen in richtigem Verhältnis darzustellen. Doch

[1]) Es ist zu empfehlen, die Entwicklung der Malerei jener Zeit an der Hand einer Kunstgeschichte mit guten Abbildungen zu verfolgen. Auch in den anregenden Vorträgen von Fr. Schilling: Über die Anwendungen der darst. Geometrie usw., und dem Buche von H. E. Timerding: Die Erziehung der Anschauung, finden sich zahlreiche Abbildungen nebst fesselnden Bemerkungen.

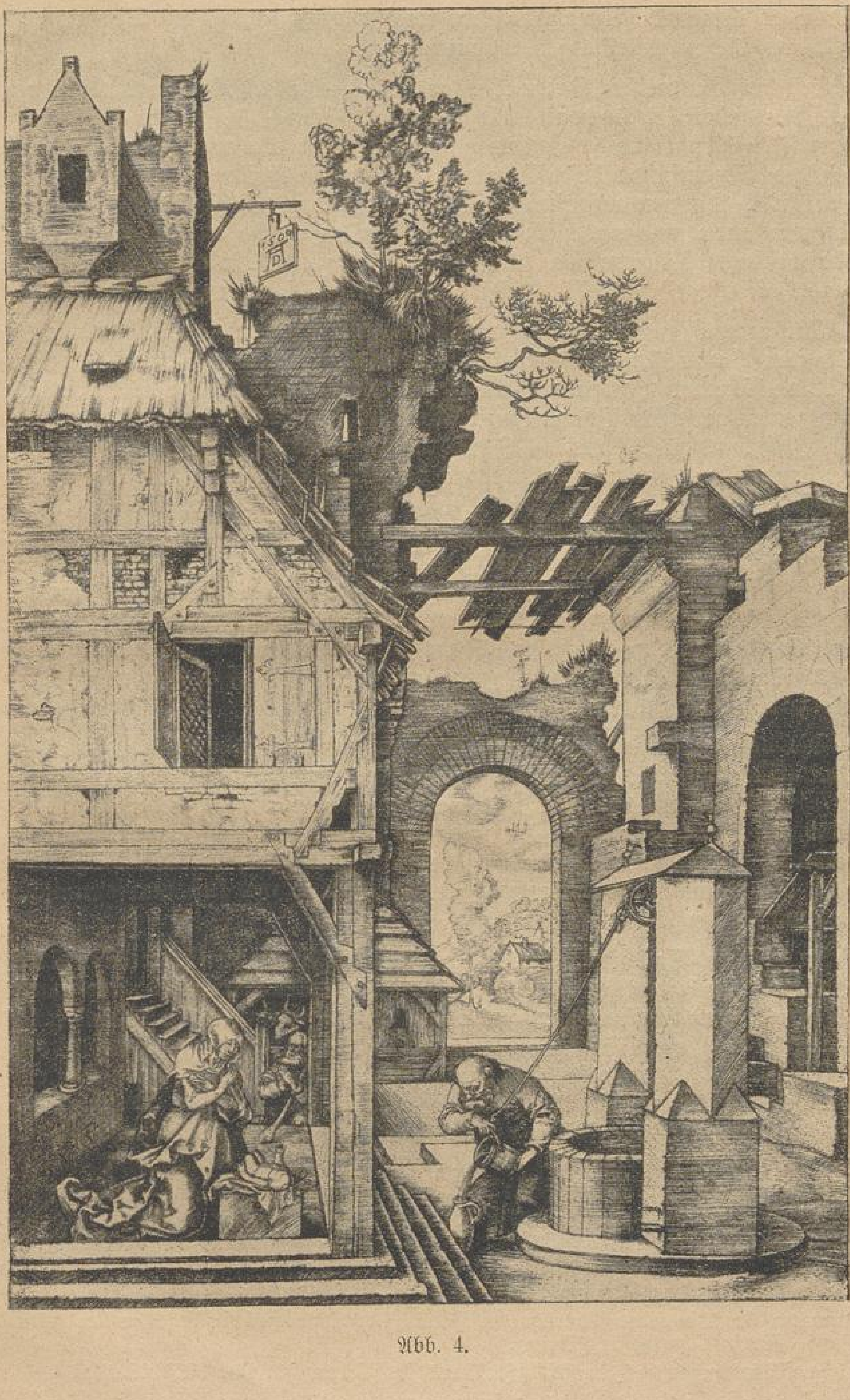


Abb. 4.

bleibt es ihm und seinen Schülern noch versagt, auf ihren Bildern eine wirkliche Tiefenvorstellung hervorzurufen.

Erst der Baumeister Brunellesco (1377—1466) findet, unterstützt von dem Mathematiker Toscanelli, das grundlegende Gesetz der Perspektive vom Fluchtpunkt des Raumes und stellt als erster den Satz auf, daß die Gegenstände desto kleiner erscheinen, je weiter sie vom Auge entfernt sind. Die neu aufgefundenen Gesetze werden mit großer Begeisterung aufgenommen, und unter ihrem ersten Einfluß entstehen die Bilder eines Masaccio,[1]) Mantegna, Gozzoli, Lippi, Ghirlandaio u. a., in denen die Regeln der Perspektive aufs sorgfältigste angewandt sind.

Naturgemäß waren schon gewisse Vorarbeiten vorhanden, die den berühmten Baumeister zur Auffindung des grundlegenden Gesetzes der Perspektive führten. In einem sehr bemerkenswerten Aufsatz: Die Anfänge der zentralperspektivischen Konstruktion in der italienischen Malerei des 14. Jahrhunderts,[2]) hat G. J. Kern in lichtvoller Weise gezeigt, daß die Entwicklung der Perspektive wie das Emporwachsen alles Organischen langsam und stetig erfolgt ist. Nach ihm hat die symmetrische Anordnung in der Malerei des Altertums zunächst für den Fluchtpunkt der Einzelebene die Grundlage gegeben. Das älteste Bild, in dem er das Zusammenlaufen der Tiefenlinie einer Ebene nachweisen konnte, ist die „Verkündigung" von Lorenzetti aus dem Jahre 1344. Sicher hat Brunellesco ebenso wie Jan van Eyck, der den Fluchtpunkt des Raumes im Norden gefunden hat, den Fluchtpunkt der Einzelebene gekannt.

Die von Brunellesco praktisch gefundenen Regeln wurden von dem Baumeister und vielseitigen Gelehrten Leo Battista Alberti (1404 bis 1472) in einer um 1440 verfaßten Schrift „De pictura", dem ersten selbständigen Werk über den Gegenstand, begründet und erweitert. Auch verdankt man ihm die Erfindung des Quadratnetzes, das die Möglichkeit gibt, die schwierigsten Aufgaben der Perspektive mit fast mathematischer Genauigkeit zu lösen.

In höchster Vollendung, aber auch mit der durch künstlerische Rücksichten gebotenen Freiheit sind die Regeln der Perspektive angewandt bei den großen Meistern der Hochrenaissance, Leonardo da Vinci (1452—1519), Raffael Santi (1483—1520) und Michelangelo Buonarotti (1475—1564). Von diesen hat der vielseitige und gelehrte Leonardo eine Abhandlung über die Perspektive geschrieben. Seine ausführlichen Perspektivstudien zu seinen Gemälden sind bekannt. Auch Raffael hat in seinen vatikanischen Gemälden, wie z. B. „Schule von Athen", und „die Vertreibung des Heliodor", Bilder von stärkster Raumwirkung geschaffen. Beim ersten sprengt seine Kunst gleichsam die Mauern und der

[1]) Masaccio (1401—1429) zeigt als erster eine vollkommene Beherrschung des Raumproblems in seinem berühmten Fresko der Dreifaltigkeit in der Kirche Santa Maria Novella in Florenz.

[2]) Mitteilungen des kunsthist. Instituts in Florenz, 2. Bd. 1913, Berlin.

Beschauer wird Schritt für Schritt in die Tiefe des festlichen Raumes gezogen.

In Deutschland hat vor allem Albrecht Dürer (1471—1528) die perspektivische Darstellung bekanntgemacht und in seinem berühmten Büchlein: Underweysung der Messung mit Zirckel und richtscheyt usw., das er am Abend seines Lebens verfaßte, die deutsche Kunst auf wissenschaftliche Grundlagen zu stellen gesucht. Alle Kupferstiche (s. Abb. 4, die Geburt Christi) und Holzschnitte des Meisters zeigen die gleiche Freude an genauer perspektivischer Darstellung.

Die malerische Perspektive hatte schon eine lange Entwicklung hinter sich, bevor zu Beginn des 17. Jahrhunderts Guido Ubaldi und Simon Stevin den Anfang machten, sie zu einem streng mathematisch begründeten Darstellungsverfahren mit einer einzigen Bildebene auszubilden. W. J. van's Gravesande (Essay de perspective, 1711) bestimmte gerade Linien durch Spur- und Fluchtpunkte und J. H. Lambert behandelte in seinem klassischen Büchlein „Freye Perspektive" (Zürich 1759) die Aufgabe, das perspektivische Bild eines Gegenstandes „von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen".

2) Um die Stellung der Perspektive zur Malerei richtig beurteilen zu können, ist es notwendig hervorzuheben, daß erstens die Grundlagen der Perspektive durchaus anfechtbar sind und daß ferner die Malerei keine angewandte Geometrie ist. Es ist deswegen auch kein Wunder, daß schon die großen Maler der Hochrenaissance sich mancherlei Abweichungen im Interesse der künstlerischen Wirkung von den strengen Regeln der Perspektive gestatteten. Man beachte z. B. auf Raffaels „Schule von Athen" die Darstellung der beiden Kugeln, die von Personen rechts in der Gruppe der Astronomen in der Hand gehalten werden, ferner die Darstellung der Figuren. Bei strenger Anwendung der Perspektive müßten deren Köpfe mit elliptischem Umriß gezeichnet werden, der um so gestreckter sein müßte, je weiter die Figuren nach der Seite stehen, und ihre Körper müßten nach der Seite dicker dargestellt werden. Gleichgroße Säulen, die in einer Reihe parallel zur Bildebene stehen, werden im Bilde gleichbreit wiedergegeben, obwohl die äußeren breiter gezeichnet werden müßten. Es sei hier auf das lesenswerte Schriftchen von Guido Hauck, „Die malerische Perspektive, ihre Praxis, Begründung und ästhetische Wirkung" (Berlin 1882), hingewiesen.

Bei den heutigen Malern genießt die Perspektive vielfach nur geringe Wertschätzung. Denn manche Richtungen der heutigen Malerei sehen ihre eigentliche Aufgabe nicht so sehr in der überzeugenden Wiedergabe der Natur, als in der reizvollen Belebung an sich toter Flächen. Eine räumliche Durchbrechung der Bildfläche läuft ihren Anschauungen zuwider. Deshalb müssen sie auf die Wirkungen der Perspektive mehr oder weniger verzichten. Die Folge sind häufig grobe und störende Verzeichnungen.

Bei den Japanern hat die Perspektive erst im letzten Jahrhundert Eingang gefunden und wird vereinigt mit dem alten parallelperspektivischen Darstellungsverfahren in den Schulen gelehrt. Die Bilder nach dem althergebrachten Verfahren sind nicht ohne eigentümlichen Reiz. Man sieht auf ihnen die Personen und Begebenheiten wie von einem Berge herunter. Vgl. die Bilder des berühmten Hokusai.

3) Die Umkehrung der Aufgabe der Perspektive ist die Aufgabe der Photogrammetrie oder Bildmeßkunst, die in unserer Zeit eine gewaltige praktische Bedeutung gewonnen hat. Sie besteht darin, aus einer oder mehreren gegebenen Perspektiven (photographischen Aufnahmen) eines räumlichen Gebildes seine wahre Gestalt zu bestimmen.

Anhang.

Darstellende Geometrie des Geländes.

(Kotierte Projektion oder Zahlrißverfahren.)

§ 1. Begriff der kotierten Projektion. Allgemeines.

1) Bedeutet P_0 (Fig. 1) einen beliebigen Punkt des Raumes und B eine wagerechte Bild- oder Zeichenebene, so ist seine Lage durch seinen senkrechten Riß P auf B[1]) und die Angabe der Länge und Richtung seines Abstandes p (z. B. p = 8 m oder p = — 5 m) eindeutig bestimmt. Die dem Riß P beigefügte Zahl heißt **Höhenzahl** oder **Kote**, der Riß P mit beigesetzter Höhenzahl **kotierter Riß** oder **Projektion.** Dieses Rißverfahren wird hauptsächlich zur Darstellung von **Gelände-** oder **topographischen Flächen** verwandt. Darunter versteht man ein Stück der Erdoberfläche, das so klein ist, daß man die Richtungen der in allen ihren Punkten wirkenden Schwerkräfte als parallel ansehen kann.

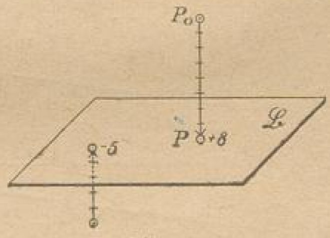


Fig. 1.

2) In einer topographischen[2]) Karte kommt es zunächst darauf an, ein Stück der Erdoberfläche nach Lage und Höhe genügend genau darzustellen. Ein Bild, wie es die photographische Kamera des Fliegers liefert, würde über die Bodengestaltung und -bedeckung, über die Beschaffenheit der Wege, insbesondere aber über die Höhenverhältnisse nicht genügenden Aufschluß geben. Um die Höhenunterschiede kenntlich zu machen, pflegt man eine hinreichende Zahl wichtiger Punkte abzubilden und mit der zugehörigen Höhenzahl zu versehen, die ihren Abstand von einer festen Ebene, meist dem Meeresspiegel, in einer bestimmten Maßeinheit, z. B. in Metern, bezeichnen. Die Abbildung einzelner Punkte aber genügt nicht,

[1]) Die Risse von Punkten oder Geraden werden im folgenden der Einfachheit halber nicht besonders gekennzeichnet, also einfach z. B. mit A, B ... oder g, ihre Urbilder dagegen entsprechend mit A_0, B_0 ... oder g_0 bezeichnet.

[2]) Topographie ist die möglichst genaue Darstellung und Beschreibung einer geographischen Örtlichkeit.

um auf der Karte die Geländeformen deutlich zur Anschauung zu bringen. Um das zu erreichen, denkt man sich in bestimmten, nicht zu großen Abständen, z. B. alle 10 m, wagerechte Schnittebenen (Niveauflächen) durch die abzubildende Geländefläche gelegt und die Risse der Schnittkurven, die man Höhen- oder Schichtlinien nennt, auf der Karte verzeichnet. Bei einem abgelassenen Teich kann man solche Schichtlinien, die Spuren früherer Wasserstände, sehr schön beobachten.

Das angegebene Darstellungsverfahren ist aus rein praktischen Bedürfnissen hervorgegangen, besonders aus militärischen und nautischen. Es findet im Vermessungs- und Kartenwesen, ferner in der Geologie und im Bergbau weitgehende Anwendung.

§ 2. Die Gerade. Grundbegriffe und Grundaufgaben.

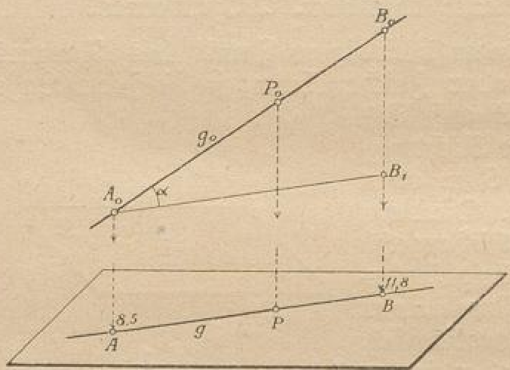


Fig. 2.

1) Eine Gerade g_0 im Raume (Fig. 2) ist durch die Zahlrisse zweier Punkte, z. B. A (8,5) und B (11,8) bestimmt.

Der Winkel α, unter dem g_0 gegen die wagrechte Bildebene geneigt ist, heißt der **Fallwinkel**, $\operatorname{tg}\alpha$ der **Anstieg** oder die **Böschung** der Geraden.

Anmerkung. Im folgenden haben wir es fast durchweg mit den Zeichnungen in der Bildebene zu tun. Wenn man deswegen z. B. einfach von dem Fallwinkel oder dem Anstieg der Geraden g, dem Riß von g_0, spricht, so hat man darunter die entsprechenden Größen der ursprünglichen Geraden zu verstehen.

Aufgabe 1. Eine Gerade g_0 ist durch die Zahlrisse A (8,5) und B (11,8) gegeben. Den Fallwinkel und den Anstieg der Geraden, endlich die Entfernung $A_0 B_0$ zu bestimmen.

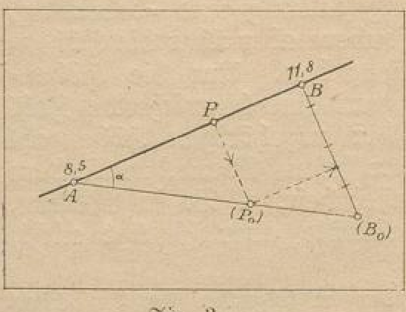


Fig. 3.

Man zeichne in der Bildebene (Fig. 3) das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten AB und $B(B_0) = B_1B_0 = 3{,}3$ (vgl. Fig. 2). Die gesuchten Größen sind mit dem Winkelmesser und Maßstab zu entnehmen.

Aufgabe 2. Die Höhenzahl eines beliebigen auf der Geraden AB gelegenen Punktes P zu bestimmen **(Einschalten eines Punktes).**

Zur Lösung vgl. Fig. 3. Bedeuten a, b, p die entsprechenden Höhenzahlen der Punkte A_0, B_0 und P_0 (Fig. 2), so findet man die gesuchte Höhenzahl von P auch durch Rechnung (am bequemsten mit dem Rechenschieber) aus der Formel

$$p = a + \frac{AP}{AB}(b - a).$$

Aufgabe 3. Auf der Geraden AB den Punkt P mit der Höhenzahl p zu finden (vgl. Fig. 3).
Ermittle P auch durch Rechnung.

Aufgabe 4. Eine Gerade g_0, die durch die Risse A (37,6) und B (41,3) gegeben ist, zu **graduieren (maßteilen)**, d. h. die Punkte mit ganzen Höhenzahlen zu ermitteln (Fig. 4).

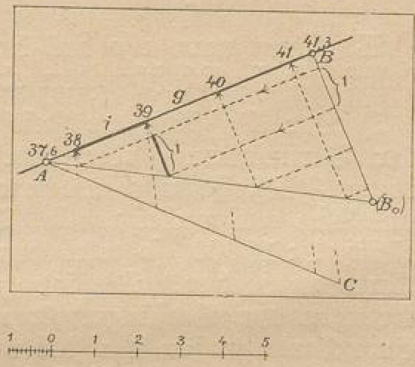


Fig. 4.

Man zeichne die Umlegung AB(B_0) des rechtwinkligen Dreiecks $A_0B_0B_1$ mit der einen Kathete AB und der andern $B(B_0) = B_1 B_0 = 3{,}7$ Einheiten, dem Höhenunterschied zwischen A_0 und B_0, und trage auf $B(B_0)$ von B 0,4 und dann die Maßeinheit wiederholt ab. Die Parallelen, die durch die erhaltenen Punkte zu AB gezogen werden, schneiden die Umlegung $A(B_0)$ in Punkten, deren zugehörige Risse ganzzahlig sind. Zieht man jetzt durch die gefundenen Punkte auf $A(B_0)$ die Parallelen zu $B(B_0)$, so ergeben diese die gesuchten ganzzahligen Rißpunkte auf AB, sie schneiden, wie man sagt, auf AB die **Graduierung (Maßteilung)** oder den **Gefällemaßstab** aus.

Einfacher wird die Aufgabe auf folgende Weise gelöst: Man ziehe von A aus einen beliebigen Strahl AC, trage auf ihm AC = 3,7 in beliebigen Einheiten und in den gleichen Einheiten von A aus 0,4 und weiter 1 ab. Die durch die erhaltenen Punkte zu CB gezogenen Parallelen schneiden auf AB die Graduierung aus.

Zur Graduierung genügt die Ermittlung zweier aufeinander folgender Risse mit ganzen Höhenzahlen, z. B. 38 und 39. Die Entfernung zweier solcher aufeinander folgender Punkte einer graduierten Geraden heißt ihr **Intervall** i.

Das Gefälle wird durch die Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 : i$$

bestimmt. Je steiler demnach der Anstieg der Geraden AB, um so kleiner ist ihr Intervall.

Wie groß ist der Fallwinkel für i = 1, 2, 5, 10, 20 und 100 und wieviel für Hundert beträgt in jedem Falle die Steigung?

2) Zwei Gerade g_0 und l_0 des Raumes schneiden sich nur dann, wenn ihre Bilder g und l einen Punkt mit gleicher Höhenzahl gemeinsam haben (Fig. 5 und 6). Sie sind parallel, wenn $g \parallel l$ ist und zugleich ihre Intervalle übereinstimmen (vgl. § 3 S. III).

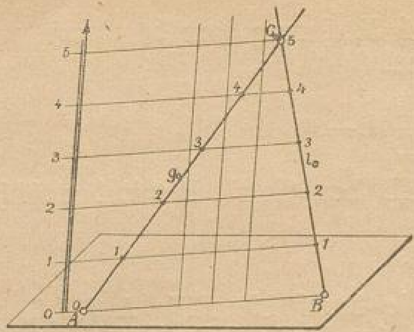


Fig. 5.

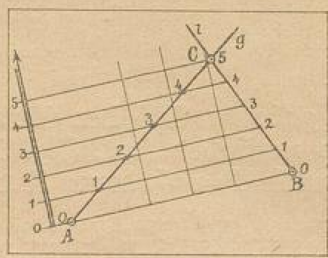


Fig. 6.

Wie kann man also aus den beiden Rissen zweier Geraden feststellen, ob sie sich schneiden oder parallel sind oder sich kreuzen?

3) Der **Maßstab der Zeichnung oder Karte** bezeichnet das Maß der Verkleinerung oder Verjüngung der Karte im Vergleich zur Natur. Besteht zwischen den wagerechten Entfernungen auf der Karte und den entsprechenden in Wirklichkeit das Verhältnis 1 : m, z. B. gleich 1 : 10000, so wird durch dieses Verhältnis der Maßstab der Karte angegeben. Die topographischen Karten bewegen sich in den Grenzen der Verjüngungsverhältnisse von 1 : 10000 bis 1 : 200000. Eine Karte großen Maßstabes wie 1 : 10000 kann naturgemäß mehr enthalten und so ein Geländestück genauer wiedergeben als eine von kleinerem Maßstabe wie etwa 1 : 100000, wird aber bei größeren Geländeabschnitten unhandlich.

Für den Maßstab 1 : m gilt für Längen die Beziehung $l_k : l_n = 1 : m$, wo l_k die Länge auf der Karte und l_n die entsprechende in der Natur bedeutet. Z. B. bei den Karten 1 : 25000 sind 1000 m in der Natur nur 4 cm. Denn $l_k = 1000 \text{ m} : 25000 = 4 \text{ cm}$. Wie groß ist umgekehrt l_n für $l_k = 5{,}2$ cm? Zur Vereinfachung ist auf jeder Karte der Maßstab aufgedruckt. Zeichne Maßstäbe für die Karten 1 : 100000, 1 : 80000, 1 : 25000, 1 : 10000!

Wichtige Geländegegenstände, wie Straßen und Eisenbahnlinien, werden nicht maßstabsgerecht gezeichnet, weil sie bei der Verjüngung auf einen kleinen Maßstab auf der Karte nur als ganz feine Linien erscheinen würden. Wie breit dürfte z. B. eine 10 m breite Straße auf einer Karte vom Maßstabe 1 : 100000 (Generalstabskarte) oder auf den Meßtischblättern (1 : 25000) nur gezeichnet werden?

Da die Höhen im Vergleich zu den Längen auf der Karte meist klein sind, werden bei Zeichnungen, wo auch die Höhen zur Darstellung kommen, diese in größerem Maßstabe gezeichnet (Überhöhung).

Verhalten sich auf einer Zeichnung vom Maßstabe 1 : m die Höhen zu den entsprechenden in der Wirklichkeit wie 1 : n, so beträgt die tatsächliche Entfernung zwischen zwei Punkten A_0 und B_0 mit den Höhenzahlen a und b (vgl. Fig. 2)

$$e = \sqrt{m^2\,\overline{AB}^2 + n^2\,(b-a)^2},$$

und der Anstieg der Geraden A_0B_0

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{n\,(b - a)}{m \,.\, AB}.$$

n wird meist kleiner als m gewählt (Überhöhung). In welchem Falle wird $e = m \cdot AB$ und $\varphi = \alpha$, wo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b - a}{AB}$ ist?

§ 3. Darstellung der Ebene und krummer Flächen.

1 a) Eine Ebene ist bestimmt durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade. Graduiert man in Fig. 5 und 6 die Geraden und zieht die Verbindungslinien der Punkte mit gleicher Höhenzahl, so erhält man die Höhen- oder Schichtlinien der durch sie bestimmten Ebene.

Die zu den Höhenlinien senkrechten Geraden der Ebene (Fig. 5) werden **Fallinien** genannt. Ihre Risse verlaufen ebenfalls senkrecht[1]) zu den Bildern der Schichtlinien und werden von ihnen graduiert. Eine Ebene ist durch eine beliebige graduierte Fallinie, die man als ihren **Böschungs-** oder **Gefällemaßstab** bezeichnet, völlig bestimmt (inwiefern?). Der Böschungsmaßstab wird in der Regel als maßgeteilte Doppelgerade dargestellt und die dabei als eigentliche Fallinie geltende Gerade mit einer Pfeilspitze gekennzeichnet.

Der Fallwinkel α der Fallinien heißt das Fallen der Ebene und $\operatorname{tg} \alpha$ ihre Böschung. Die Anstiegrichtung der Ebene wird durch die zunehmenden Höhenzahlen der Fallinien bezeichnet.

Aufgabe. Die Zahlrisse dreier Punkte A (27,3), B (32,5), C (35,8) sind gegeben. Den Böschungsmaßstab der Ebene ABC zu zeichnen (Fig. 7).

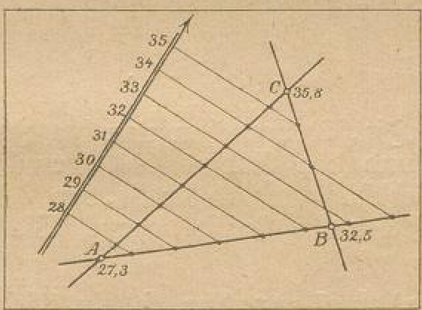


Fig. 7.

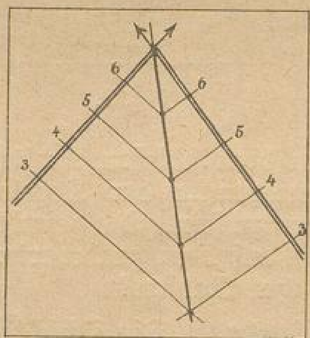


Fig. 8.

Ziehe die drei Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte, maßteile sie, zeichne die Schichtlinien der Ebene und endlich senkrecht zu ihnen den Böschungsmaßstab.

b) Aufgabe. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu bestimmen (Fig. 8).

---

[1]) Vgl. § 18, 2).

Die Schnittgerade ergibt sich als Ort der Schnittpunkte der Schichtlinien mit gleicher Höhenzahl, die zugleich ihre Graduierung bewirken.

Haben die gegebenen Ebenen gleiche Böschung, so halbiert die Schnittgerade im Bilde die von den gleichzahligen Schichtlinien gebildeten Winkel.

2) Aufgabe 1. Die Schichtlinien a) eines geraden, b) eines schiefen auf der Zeichenebene stehenden Kreiskegels zu zeichnen.

Die Schichtlinien des geraden Kegels sind konzentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Riß der Spitze ist. Was braucht in der Zeichenebene nur gegeben zu sein?

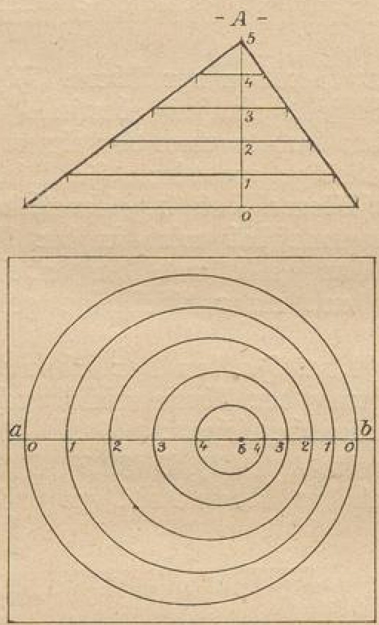


Fig. 9.

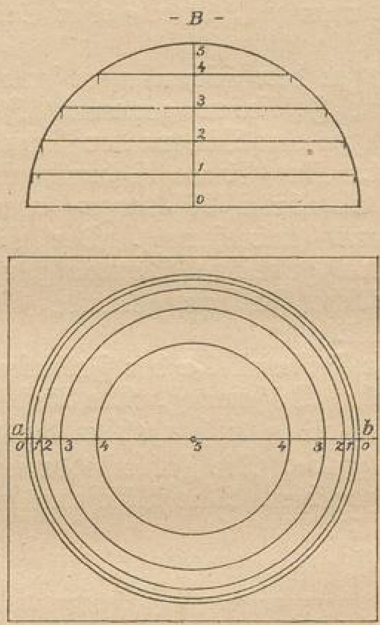


Fig. 10.

Von dem schiefen Kreiskegel (Fig. 9) brauchen nur die Zahlrisse der Endpunkte der Kegelachse und der Radius des Grundkreises gegeben zu sein. Die gesuchten Schichtlinien sind Kreise, deren Mittelpunkte auf dem graduierten Riß der Kegelachse liegen. Wie findet man ihre Radien?

Aufgabe 2. Die Schichtlinien a) eines geraden, b) eines schiefen Kreiszylinders mit wagerechten Grundflächen zu finden, wenn die Zahlrisse der Endpunkte der Achse und der Grundkreisradius gegeben sind.

Aufgabe 3. Die obere Hälfte eines geraden Kreiszylinders, der mit seiner ebenen Seitenfläche auf der Bildebene ruht, durch seine Schichtlinien darzustellen.

Aufgabe 4. Eine Halbkugel, deren ebene Fläche auf der Bildebene ruht, durch ihre Schichtlinien darzustellen (Fig. 10).

Aufgabe 5. Von einem Umdrehungskörper, der die Gestalt eines spitzen, geraden Kegels mit hohlen Seitenflächen hat (Fig. 11), das Schichtlinienbild zu zeichnen.

Betrachtet man die in den Fig. 9—11 durch ihre Schichtlinienbilder und lotrechten Schnitte dargestellten Körper A—C als Bergkörper, so hat man es bei A mit einem Bergkegel, bei B mit einer Kuppe und bei C mit einer sogenannten Spitze oder Nadel zu tun. Besteigt man die einzelnen Bergkörper und geht im Geiste von a nach b, so erkennt man unter Beachtung des zugehörigen lotrechten Schnittes leicht folgendes: Bei A sind An- und Abstieg unter sich gleichmäßig, aber der Abstieg ist steiler. Die durch den Weg gehenden Schichtlinien für den An- und Abstieg haben dementsprechend unter sich gleiche Abstände, aber für den Abstieg liegen sie enger aneinander. Die Kuppe im Bilde B steigt vom Fuße seitlich steil an, dann verflacht sie sich mehr und mehr. Dementsprechend drängen sich die Schichtlinien am Fuße, wo der Anstieg am stärksten ist, enger aneinander, während sie sich weiter oben mehr voneinander entfernen. Die „Spitze" im Bilde C steigt zunächst sanft an, deshalb sind die Höhenschichtlinien weit voneinander entfernt. Dann strebt sie steiler empor. Demgemäß nähern sich die Schichtlinien mehr und mehr. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich folgendes: Schichtlinien in weiten Abständen kennzeichnen ein allmählich ansteigendes, in engen Abständen ein stark ansteigendes Gelände.

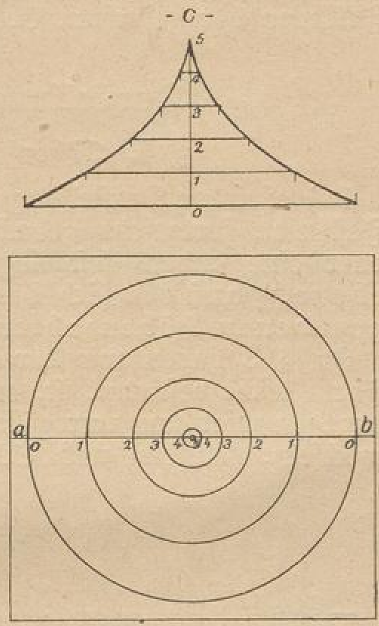


Fig. 11.

Schichtlinien von Bergkörpern, die oben weit und nach unten zu sich immer mehr nähernd verlaufen, deuten auf einen nach außen gewölbten — erhabenen — Hang. Wie verlaufen die Schichtlinien bei einem nach innen gebogenen — hohlen — und wie bei einem gleichmäßig verlaufenden — steten — Hang?

3) Alle Ebenen gleicher Böschung, die durch denselben Punkt P gehen, umhüllen einen geraden Kreiskegel, den sogenannten **Böschungskegel.**

Aufgabe. Durch eine gegebene Gerade die Ebenen von gegebener Böschung zu zeichnen.

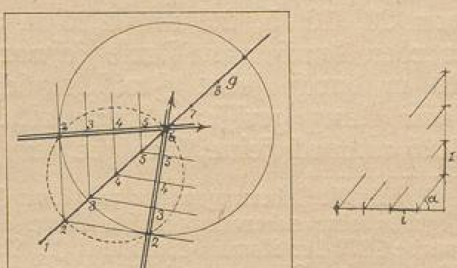


Fig. 12.

Man wähle (Fig. 12) einen beliebigen Punkt der Geraden g, z. B. 6, als Spitze des Kegels mit der gegebenen Böschung, zeichne den zu einem beliebigen Punkte von g, etwa 2, gehörigen Schichtkreis und ziehe von 2 an ihn die beiden Tangenten. Die nach den Berührungspunkten von Punkt 6 aus gezogenen Radien sind dann Fallinien der gesuchten Ebenen. Wie erfolgt ihre Graduierung?

Darstellung von Geländeflächen.

§ 4. Höhenschichtlinien. Längenprofile.

1 a) Bei der Darstellung von Geländeflächen dient die unter dem Festlande fortgesetzt gedachte mittlere Ebene des Meeresspiegels oder eine anders festgelegte wagerechte Ebene als Vergleichsebene,[1]) auf die sich die in der Karte oder Zeichnung angegebenen Höhenzahlen beziehen.

In § 3 haben wir bereits einige einfache Körperflächen, deren Form leicht bestimmt ist, durch Schichtlinien dargestellt. Die Natur dagegen zeigt ganz unregelmäßige Geländeformen. Berge und Täler wechseln. Mulden und Schluchten greifen tief in Bergkörper ein, Rücken und Vorsprünge wachsen heraus. Um von einer solch mannigfach gestalteten Oberfläche eines Geländestückes ein deutliches und hinreichend genaues Bild zu geben, denken wir uns dieses (vgl. Fig. 13a), wie vorher die einfachen Körper, durch eine genügende Anzahl wagerechter Ebenen (Niveauflächen), die in gleichen Abständen, z. B. 20 m, übereinander liegen, geschnitten. Die Schnittkurven dieser Ebenen mit der Geländefläche, die **Höhenschichtlinien,** werden in verjüngtem Maßstabe auf die wagerechte Zeichenebene abgebildet. Die Abbildungen nennt man der Einfachheit halber ebenfalls kurz Schichtlinien. Die Landesaufnahme hat Schichthöhen von 20, 10, 5, 2,5 und 1,25 m festgesetzt. Schichthöhen von 20 m werden durch mittelstarke schwarze Hauptschichtlinien, die von 10 m durch feine Zwischenschichtlinien, die von 5 m durch feine, lang gerissene Normalhöhenlinien und die von 2,5 und 1,25 m durch feine, kurz gerissene Hilfsschichtlinien bezeichnet.

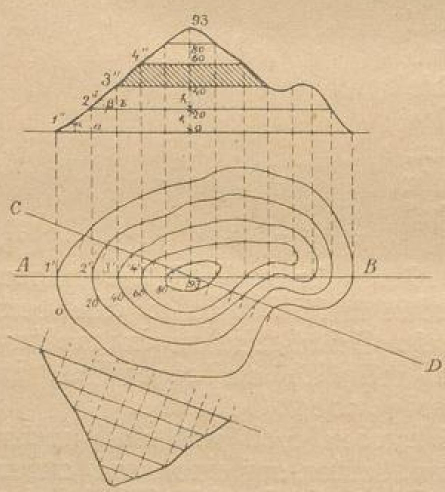


Fig. 13a.

[1]) Die Veränderungen der mittleren Höhe des Meeresspiegels haben Veranlassung gegeben, eine andere wagerechte Ebene als Vergleichsebene zu wählen. In Preußen wurde 1879 der Normal-Nullpunkt (N. N.) für Höhenmessung durch Anbringen einer Marke an der Sternwarte in Berlin mit der Höhenzahl 37 m festgelegt. Nach Abbruch des Gebäudes ist der Normal-Nullpunkt durch 5 versenkte Marken auf der Straße Berlin—Mantschow bei Hoppegarten bestimmt.

Wie die Höhen auf dem Lande werden die Tiefen des Meeres und der Seen durch Schichtlinien angegeben, die demgemäß Punkte gleicher Tiefen unter der Meeresfläche bezeichnen (Tiefenlinien).

Die Entstehung der Schichtlinien können wir uns sehr einfach mit Hilfe der Fig. 13b anschaulich vor Augen führen. Denken wir uns den dargestellten Bergkörper als Insel, vom Meere umgeben. Da, wo ihn das Wasser bei seinem normalen Stande bespült, haben wir uns die mit 0 bezeichnete Schichtlinie zu denken. Würde das Wasser nun genau von 10 zu 10 m nach und nach steigen, so würden durch die Uferlinien entsprechend die 10 m, 20 m usf. Schichtlinien bezeichnet. Diese Linien verkleinert auf die Karte übertragen, liefern das Schichtlinienbild, wie es die Figur zeigt. Ebenso können wir uns die Entstehung der Tiefenlinien vor Augen führen.

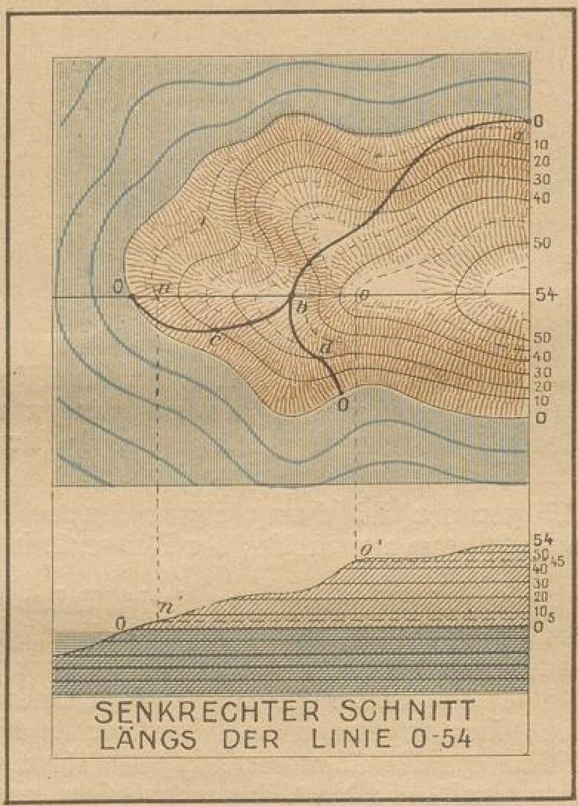


Fig. 13b.

b) Um die Bodengestaltung eines welligen oder gebirgigen Geländestückes am deutlichsten zur Anschauung zu bringen, fertigt man ein **Relief** an. Ein solches ergibt sich leicht auf Grund der Schichtlinienkarte (z. B. von Meßtischblättern). Man kann die Hauptschichtlinien auf Pappstücke oder Holzplatten, deren Dicke der Schichtendicke entspricht, aufzeichnen und ausschneiden. Legt man die Stücke oder Platten richtig aufeinander, so erhält man ein stufenförmiges Gebilde. Die Stufen bringt man zum Verschwinden, indem man das Modell mit gefärbtem Wachs überzieht und mit erwärmtem feinem Sande überstreut.

2) Außer den Schichtlinien sind noch andere Kurven im Zusammenhang mit einer Geländefläche zu betrachten, wie z. B. Wege oder Eisenbahnlinien. Auch diese sind auf die Karte zu übertragen. Mit Hilfe der Schichtlinien kann man das Steigen oder Fallen solcher Linien, z. B. des Weges AB (Fig. 14), ohne Rücksicht auf die Krümmungen der Linienführung darstellen. Man zeichnet auf einer wagerechten Achse die Abwicklung des Grundrisses der Kurve AB, indem man mit hinreichend kleiner Zirkelöffnung den Grundriß von AB stückweise überträgt, und kennzeichnet dabei auf der Achse besonders die Punkte, deren Höhenzahlen angegeben sind. In diesen Punkten werden die zugehörigen Höhen senkrecht aufgetragen. Die Verbindungslinie der Endpunkte durch einen Kurvenzug liefert das

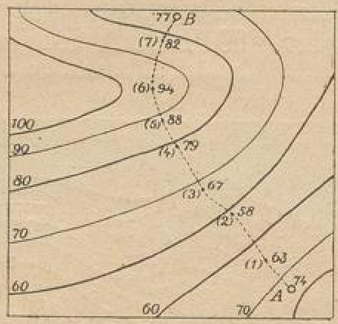


Fig. 14a.

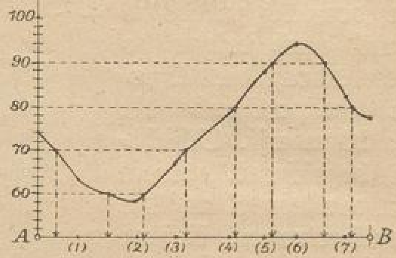


Fig. 14b.

Längenprofil des Weges AB. Zweckmäßig ist es, die Höhen in einem 10fach so großen Maßstab aufzutragen wie die Längen. In der Technik sind derartige Längenprofile für den Entwurf von Bahn- und Wegebauten äußerst wichtig.

Unter der Böschung einer Kurve in einem ihrer Punkte versteht man den Anstieg der Tangente in dem betreffenden Punkte.

3) Die **Bestimmung der Schichtlinien** geht in der Praxis einfach vor sich. Zunächst wird bei der aufzunehmenden Geländefläche eine genügende Anzahl wichtiger Punkte mit Hilfe des Meßtisches nach Länge und Breite ermittelt und in einem bestimmten Maßstabe in den Plan eingetragen. Weiter werden die Höhen einiger wichtiger Geländepunkte über der Vergleichsebene bestimmt und alsdann in bezug auf diese die Höhenunterschiede von möglichst vielen anderen Punkten ermittelt. Ihre „absoluten" Höhen werden bei den zugehörigen Rissen in der Karte verzeichnet.[1]) Bei der Höhenmessung gleichmäßig geneigter Flächen genügt die Messung von wenigen Punkten, bei solchen von veränderlicher Neigung müssen mehr Messungen ausgeführt werden.

Die Höhenlinien werden durch Einschaltung zwischen den Punkten bestimmt, die im Felde aufgenommen sind. Es seien z. B. 78,3 und 82,1 die Höhen zweier Punkte A und B, deren wagrechte Entfernung e auf der Karte gegeben ist. Man soll die Lage des Schnittpunktes X der Höhenlinie 80 auf AB suchen. Die Fig. 15 stellt einen Schnitt

---

[1]) Tiefenlinien werden ermittelt auf Grund zahlreicher Tiefenmessungen und Peilungen.

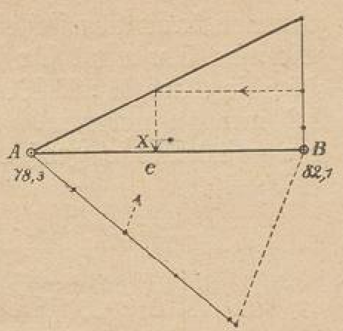


Fig. 15.

durch die Punkte AB dar in bezug auf 78,3 als Nullhöhe. Lösung durch Zeichnung und Rechnung. Umgekehrt kann die Höhe eines zwischen A und B gelegenen Punktes gefunden werden.

Um aus einer größeren Zahl vermessener Punkte des Geländes den Verlauf der dazwischen liegenden Hauptschichtlinien zu finden, verbindet man geeignete Punkte (Fig. 14) durch einen Kurvenzug AB, der möglichst quer zu den zu erwartenden Schichtlinien zu legen ist, und zeichnet das Längenprofil von AB. Wenn man nun von der lotrechten oder y-Achse aus die Höhenpunkte mit runden Zahlen, z. B. 60, 70, 80, 90, durch Parallele zur x-Achse auf das Längenprofil überträgt, von diesem auf die Abwicklung des Grundrisses von AB auf der x-Achse und von da auf den Grundriß in dem Plan, so können die gesuchten Zwischenpunkte mit runden Höhenzahlen leicht gefunden werden.

Anmerkung. Als zeichnerische Hilfsmittel kommen u. a. in Betracht: 1. Kurvenlineale, 2. Spiegellineale zum Zeichnen von Tangenten oder Loten (Normalen) in einem beliebigen Punkte einer Kurve, 3. der Storchschnabel, um Teile der Karte genau im vergrößerten oder verkleinerten Maßstabe auszuführen.

§ 5. Geländeschnitte (Querprofile).

1) Ein wichtiges Hilfsmittel zum Verständnis des Verlaufs der Geländefläche, besonders hinsichtlich der Neigung, bildet die Zeichnung von lotrechten Schnitten.

In Fig. 13a ist ein Bergkörper durch seine Schichtlinien dargestellt. Es soll ein lotrechter Schnitt längs der Linie AB gezeichnet werden. Der Deutlichkeit halber denkt man sich den Schnitt parallel zu AB verschoben und dann in die Zeichenebene umgelegt. Zu den Punkten 1′, 2′, 3′ ... hat man nur die zugehörigen Aufrisse 1″, 2″, 3″ ... zu zeichnen und diese durch einen freien Kurvenzug zu verbinden. Man gewinnt so den lotrechten Schnitt oder das **Querprofil** längs der Linie AB.

Die kleinen Dreiecke 1″ 2″a, 2″ 3″b ... heißen Profildreiecke. a 2″, b 3″ ... ist die Schichthöhe, 1′a, 2′b entsprechend die Anlage und 1″ 2″, 2″ 3″ die Böschung. $\sphericalangle\,\alpha$ und $\sphericalangle\,\beta$ sind die entsprechenden Böschungswinkel. Es ist oft von praktischem Wert, den Grad der Neigung des Geländes an einer bestimmten Stelle gegen die Wagerechte, d. h. den Böschungswinkel, zu kennen. In dem Böschungsdreieck 1″a 2″, in dem man bei kleiner Schichtenstärke die Linie 1″ 2″ als geradlinig ansehen kann, ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\,2''}{1''\,a} = \frac{\text{Schichtenhöhe}}{\text{Anlage}}.$$

Um schnell die Neigung an irgendeiner Stelle der Karte zu bestimmen, kann man sich einen sogenannten **Böschungsmaßstab** (Fig. 16a) zeichnen, der leicht für jede Karte verwendbar gemacht werden kann. Für die Karte 1 : 25000 und die Schichtenhöhe d = 20 m ist d gleich 0,8 mm zu nehmen. Da diese Strecke zu klein ist, so nimmt man d n = 10mal so groß an. Ebenso muß man auch die n = 10fache

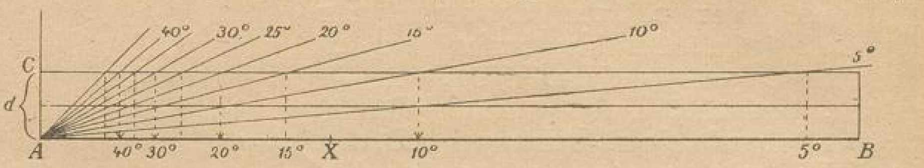


Fig. 16a.

Schichtenentfernung b in den Zirkel nehmen. Die eine Zirkelspitze setzt man im Punkte A des Maßstabes ein und liest am Begegnungspunkt der anderen Spitze mit AB die Neigung ab. Trifft sie keinen Teilstrich des Maßstabes, so wird der zugehörige Neigungswinkel geschätzt, z. B. für den Punkt X auf 13°. Der Maßstab Fig. 16a gibt unmittelbar die Neigung für Schichthöhen von 200 m. Der Maßstab Fig. 16b gibt

Fig. 16b.

diese für die Karte 1 : 25000 unmittelbar für Schichten von 100 m Höhe, er ist praktisch viel besser verwendbar.

Militärisch ist die Kenntnis der Größe des Anstiegs von Wegen oder Hängen von großer Wichtigkeit. So kann Infanterie nur bis 18° Steigung geschlossen ohne Tritt, bis 30° in Schützenlinie, über 30° durch Klettern einen Berghang emporsteigen. Leichte Artillerie kann noch bis 7° Steigung im Trabe und Galopp auffahren.

Die Zeichnung von Geländeschnitten findet sehr mannigfache Anwendung bei den Aufgaben des Tief- und Bergbaues, der Geologie und bei militärischen Aufgaben, besonders artilleristischen.

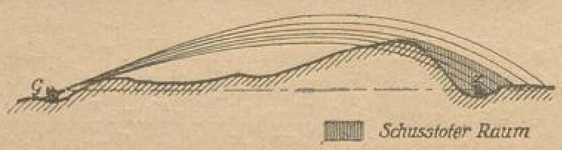


Fig. 17.

Will z. B. der Artillerist feststellen, ob er ein Ziel hinter einem steilen Hang (Fig. 17) beschießen kann, so zeichnet er sich einen Geländeschnitt längs der Linie G—Z (Geschütz—Ziel) und vergleicht ihn mit den im gleichen Maßstab gezeichneten Flugbahnbildern.

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte aus, z. B. einem erhöhten Beobachtungspunkte, den Berührungskegel an eine Geländefläche zu legen.

Man legt durch den gegebenen Punkt A (Fig. 18) eine hinreichende

Anzahl von Lotschnitten, zeichnet die zugehörigen Querprofile — es genügt in der Regel die Zeichnung von Teilen — und zieht nach diesen von A aus die Tangenten. Die Übertragung der Berührungspunkte in die Karte liefert die gesuchte Berührungskurve und damit die für

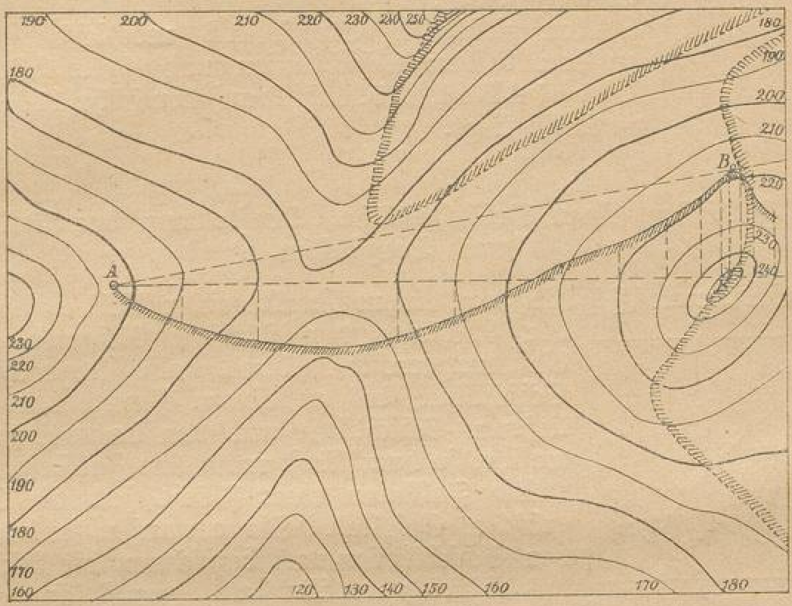


Fig. 18.

militärische Zwecke wichtige Ermittlung der Sichtfeldgrenzen für einen gegebenen Beobachtungspunkt. Die Bestimmung ist nur dann angenähert richtig, wenn der Gesichtskreis nicht zu groß ist, weil sonst die Krümmung der Erdoberfläche nicht vernachlässigt werden kann.

Zugleich kann damit auch die Aufgabe gelöst werden, das nicht eingesehene (sichttote) Gelände zu ermitteln.

2) Das **Einschalten von Schichtlinien** geschieht oft auch mit Hilfe von Querprofilen, die man an der betreffenden Stelle zeichnet.

Aufgabe. In dem Plan (Fig. 19) längs der Richtung AB den Verlauf der Zwischenschichtlinien (d. h. der 2,5 m-Schichtlinien) zu bestimmen.

Lösung siehe Fig. 19.

Laufen die Schichtlinien annähernd parallel, so kann man Punkte der einzuschaltenden Zwischenschichtlinien mit ausreichender Genauigkeit mit Hilfe eines einfach anzulegenden Maßstabes finden.

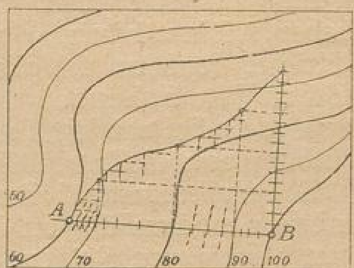


Fig. 19.

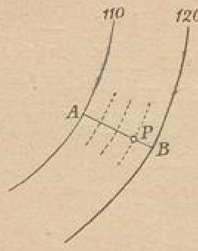


Fig. 20.

Für diesen Fall ergibt sich auch sehr einfach die Lösung der für den Artilleristen wichtigen Aufgabe: Die Höhe eines Punktes zu bestimmen, der zwischen zwei Schichtlinien, z. B. 110 und 120, liegt (Fig. 20).

Man zieht die Strecke AB möglichst senkrecht zu den beiden Schichtlinien und stellt fest, daß $AP \approx \frac{3}{4} AB$ ist, d. h. daß P auf der Höhe $110 + \frac{3}{4} 10 = 117{,}5$ liegt.

§ 6. Fallinien einer Geländefläche. Darstellung des Geländes durch Bergstriche.

1) Geht man (Fig. 21) von einem Punkte einer Geländefläche in der Richtung der stärksten Neigung gegen die wagerechte Ebene, also senkrecht zur Schichtlinie, bis zu einem Punkte der nächst tieferen Schichtlinie und von da entsprechend weiter, so durchläuft man eine **Fallinie.**

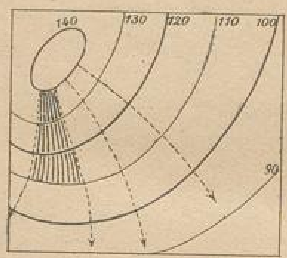


Fig. 21.

Die Fallinien einer Fläche sind die Linien größten Gefälles. Sie verlaufen senkrecht zu den Schichtlinien und bezeichnen die Richtung des abfließenden Wassers. Zur Zeichnung der Fallinien benutzt man das Spiegellineal.

2) Der Anstieg längs einer Fallinie ändert sich im allgemeinen. Um das stärkere oder schwächere Gefälle einer Geländefläche zur Anschauung zu bringen, pflegt man bei zahlreichen Kartendarstellungen, z. B. den Generalstabskarten 1 : 100000, die Fallinien stückweise stärker oder schwächer auszuziehen. Man erhält so eine recht anschauliche Geländedarstellung durch **Bergstriche** oder **Schraffen,** die darin besteht, daß eine Schattierung der geneigten Flächen bewirkt wird. Dabei wird angenommen, daß die Sonne im Scheitelpunkte des abzubildenden Geländes steht. Eine wagerechte Fläche ist am hellsten beleuchtet, bleibt also weiß, die geneigten Flächen erscheinen um so weniger hell beleuchtet, je größer das Gefälle ist. Die Schattierung geschieht durch Striche (Schraffen), die in der Richtung der Fallinien gezogen werden und bei Neigungen von 5° aufwärts stets in gleicher Anzahl einen bestimmten Raum auszufüllen haben. Die Abstufung wird demnach nicht durch die Anzahl der Striche, sondern lediglich durch ihre Stärke erzielt. Kräftige Schraffen bedeuten starke, dünne Schraffen schwache Steigung. Dabei verzichtet man auf die weitere Abstufung bei der Darstellung von Geländeflächen von mehr als 45° Neigung.

Die Bodenunebenheiten (Fig. 22) kommen bei dieser Darstellungsart sehr anschaulich zum Ausdruck. Dagegen sind die Höhen nur aus den beigefügten Zahlen, Höhenunterschiede nur annähernd aus der Länge der Bergstriche und dem abgeschätzten Böschungswinkel, die

Art und Steilheit der Böschung nur aus der Stärke der Bergstriche zu erkennen. Zu bemerken ist, daß das Sehen des Schraffenbildes auch geübt sein muß. Schließt man das eine Auge und betrachtet mit dem andern einige Sekunden z. B. das Bild Fig. 22, so werden die Formen sehr körperlich hervortreten (vgl. auch Fig. 13a).

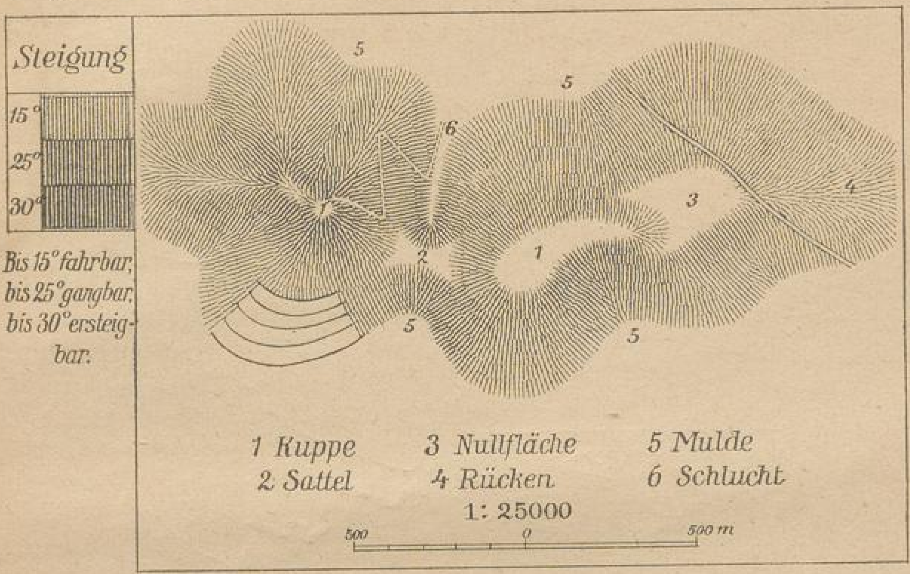


Fig. 22.

Sehr kleine Bodenformen, wie z. B. Böschungen an Hohlwegen, Dämmen und Sandgruben, werden bei Darstellung des Geländes durch Schichtlinien mit kurzen, starken Bergstrichen gekennzeichnet.

Ein anderes Verfahren, das Gelände anschaulich darzustellen, besteht in der Verwendung von Höhenlinien und Flächentönen unter Annahme senkrechter oder schiefer Beleuchtung (Schummerung).

Fig. 23 zeigt zum Vergleich Geländestücke in verschiedenen Darstellungen. Oben links ist ein reines Lagenbild, unten links ist noch die Geländeform durch Schichtlinien und unten rechts durch Schraffen zur Darstellung gebracht. Rechts oben ist die Schichtliniendarstellung mit Abtönung durch Schummerung vereinigt. Die Tiefe der Töne richtet sich nach dem Gefälle, folgt also den Grundsätzen der senkrechten Beleuchtung.

§ 7. Lesen der Karte. Grundriß und Ansichtsskizzen.

1) Zum Lesen einer Karte, d. h. zum schnellen Auffassen und richtigen Beurteilen des dargestellten Geländes, ist außer der Kenntnis der besonderen Kartenzeichen für Wege, Bahnen, Bodenart und -bedeckung usf.[1]) eine gewisse Übung erforderlich. Bei der Darstellung

[1]) Näheren Aufschluß über die Kartenzeichen und die Beschriftung gibt die amtliche Zeichenerklärung zur Karte des Deutschen Reiches.

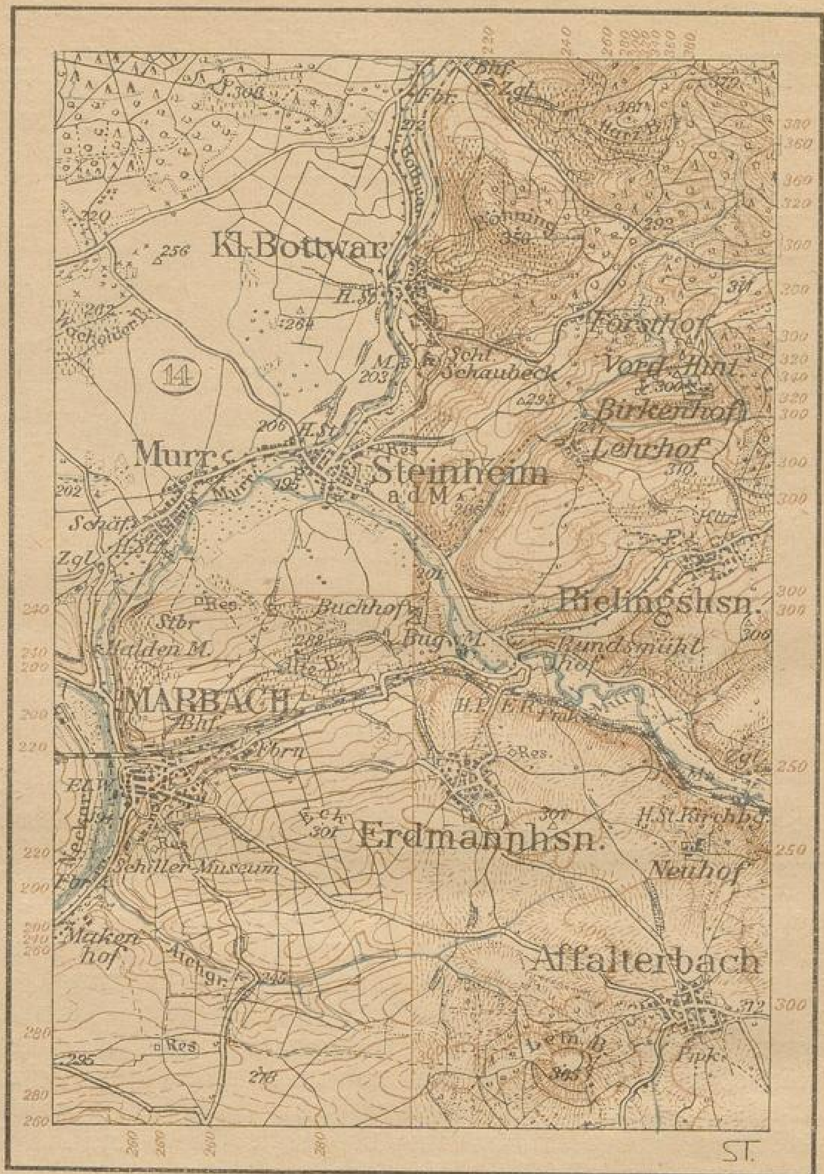


Fig. 23.

des Geländes durch Schichtlinien erkennt man sofort, ob ein Punkt höher liegt als ein anderer und um wieviel. Man übersieht leicht die allgemeine Gestaltung des Geländestücks und kann weiter aus dem Verlauf der Schichtlinien die Form der Erhebungen erkennen: Vorsprünge, Bergnasen, Rücken an den Ausbiegungen, Mulden an den schwachen, Schluchten an den stärkeren Einbiegungen der Höhenlinien. Bei einem Sattel biegen die Höhenlinien auf allen vier Seiten nach innen ein (s. Fig. 24) usf. Je dichter die Höhenlinien an einer Stelle folgen, um so steiler ist dort das Gelände. Eine Böschung ist erhaben, wenn die Abstände der Schichtlinien von unten nach oben größer werden, im entgegengesetzten Falle ist sie hohl.

Im allgemeinen geht durch jeden Punkt der Karte eine Schichtlinie. Es gibt aber gewisse Ausnahmepunkte (Fig. 24), die besonders bemerkenswert sind, wie **Gipfel-, Mulden-** und **Jochpunkte.** Die beiden ersten (G und M) sind dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen die zugehörige Schichtlinie auf einen Punkt zusammenschrumpft. Der Gipfelpunkt liegt höher, der Muldenpunkt tiefer als alle benachbarten Punkte. Ein Jochpunkt (J) kennzeichnet sich dadurch, daß durch ihn zwei oder mehr Schichtlinien der gleichen Höhenzahl hindurchgehen. Er bezeichnet die tiefste Stelle zwischen zwei Erhebungen (G und K) und die Ausgangsstelle zweier durch einen Bergzug getrennter Täler. Die Fallinie, die vom Gipfel auf dem Kamme zum Jochpunkte hinabläuft, wird Kammweg (k) und jene, die vom Jochpunkt ins Tal (t) hinabführt und die Fallinie zweier Hänge schneidet, Talweg genannt.

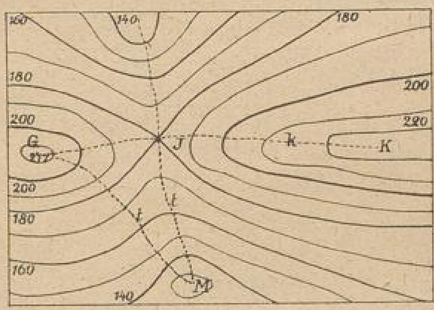


Fig. 24.

2a) Während die Karte das Ergebnis genauer wissenschaftlicher Aufnahmen und Zeichnungen darstellt, sind **Grundrißskizzen** Geländezeichnungen in einfachster Form, die oft nur einem bestimmten Zwecke dienen. Sie sollen z. B. einen Weg, eine Feuerstellung, einen Lagerplatz oder Fernsprechverbindungen usf. kennzeichnen. Sie brauchen daher weder maßstabgerecht zu sein noch auf Messung zu beruhen. Doch müssen Abmessungen, auf die es ankommt, beigefügt werden. Soll z. B. ein Weg erkundet werden, so werden die Entfernungen auf ihm abgeschritten und die Richtungsänderungen geschätzt oder mit dem Kompaß bestimmt. Der Verlauf von seitlich liegenden Wegen und Flüssen wird nach Augenmaß eingetragen, ihr Schnittpunkt mit dem Weg durch Abschreiten gewonnen.

Krokis sind Grundrißzeichnungen von Geländestücken, die nach der Natur in beschränkter Zeit mit den einfachsten Maß- und Zeichenvorrichtungen ungefähr maßstäblich angefertigt werden. Sie bieten im Kriege, wo man zunächst auf die oft schlechten Karten des Feindes angewiesen ist, die Möglichkeit, diese auf ihre Genauigkeit zu prüfen und zu berichtigen. Ein viel feineres und genaueres Verfahren bietet heutzutage das vom Flieger aufgenommene Lichtbild mit Hilfe der Bildmeßkunst.

b) Eine besondere Art von Skizzen sind die **Ansichtsskizzen** (Geländeansichten). Darunter versteht man die Abbildung eines Geländestückes auf eine lotrechte Fläche, also eine perspektivische Darstellung. Die Ansichtsskizze soll dazu dienen, einmal erkannte wichtige Punkte,

z. B. feindliche Stellungen, im Gelände schnell wiederzufinden, um auch auf Grund ihrer Angaben schnell einen Zielwechsel vornehmen zu können. Sie enthält mit wenigen Strichen (Fig. 25) eine perspektivische Darstellung des in Frage kommenden Geländestückes von einem bestimmten Beobachtungspunkte aus. Alle bemerkenswerten Punkte, wie Türme, Häuser, Bäume, wichtige Linien (Feldstellungen) werden mit Angabe des seitlichen Abstandes von einem als Hauptrichtungspunkt gewählten Gegenstand eingetragen. Die seitlichen Abstände werden mit Hilfe eines Winkelmessers oder der Fadenplatte (Strichteilung) des Doppelglases oder Scherenfernrohrs gemessen.

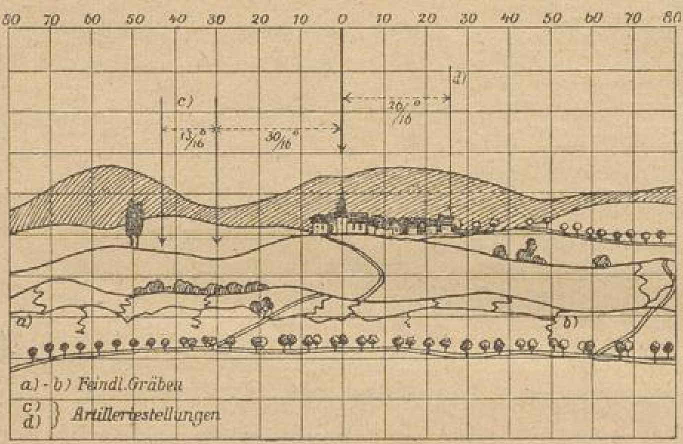


Fig. 25.

Für die Anfertigung der Skizze ist folgendes zu beachten: Man wähle zunächst in der ungefähren Mitte des darzustellenden Abschnitts einen bemerkenswerten Punkt, möglichst einen trigonometrischen Punkt, als Hauptrichtungspunkt und trage ihn ein, ebenso nach Messung ihrer seitlichen Abstände zunächst ganz fein eine Reihe hervorstechender Punkte. Durch Wagrechthalten des Bleistifts in Augenhöhe wird die Aughöhenlinie festgelegt und einige Punkte gemerkt. Nun messe man mit lotrecht gehaltenem Bleistift die Höhe von wichtigen Geländepunkten über und unter der Aughöhenlinie. Zu diesem Zwecke hält man den Bleistift mit leicht gebogenem Arm vor das eine Auge, das andere schließend und bezeichnet mit dem Daumenende das gesehene Maß, das man durch Auflegen des Bleistifts in die Zeichnung überträgt. In das Gerippe der großen Linien werden dann zum Schluß die weniger wichtigen Gegenstände nach Augenmaß eingetragen.

Aufgabe. Von einem durch Schichtlinien dargestellten Geländestück die Ansichtsskizze zu zeichnen.

Bei einem gegebenen Beobachtungspunkt aus geringerer Entfernung kommt für die Aufgabe die Perspektive (Zentralprojektion), für eine Ansicht aus weiter Ferne die Parallelprojektion in Frage. Der Einfachheit halber lösen wir die Aufgabe für diesen Fall und nehmen die Richtung der Abbildungsstrahlen senkrecht zur Bildebene an (Fig. 26). Der Grundriß der Bildebene ($X_1 X_2$) wird als Bildachse benutzt. Nun lotet man genügend viele Punkte des Planes auf die Achse und errichtet in den Schnittpunkten Lote, deren Längen

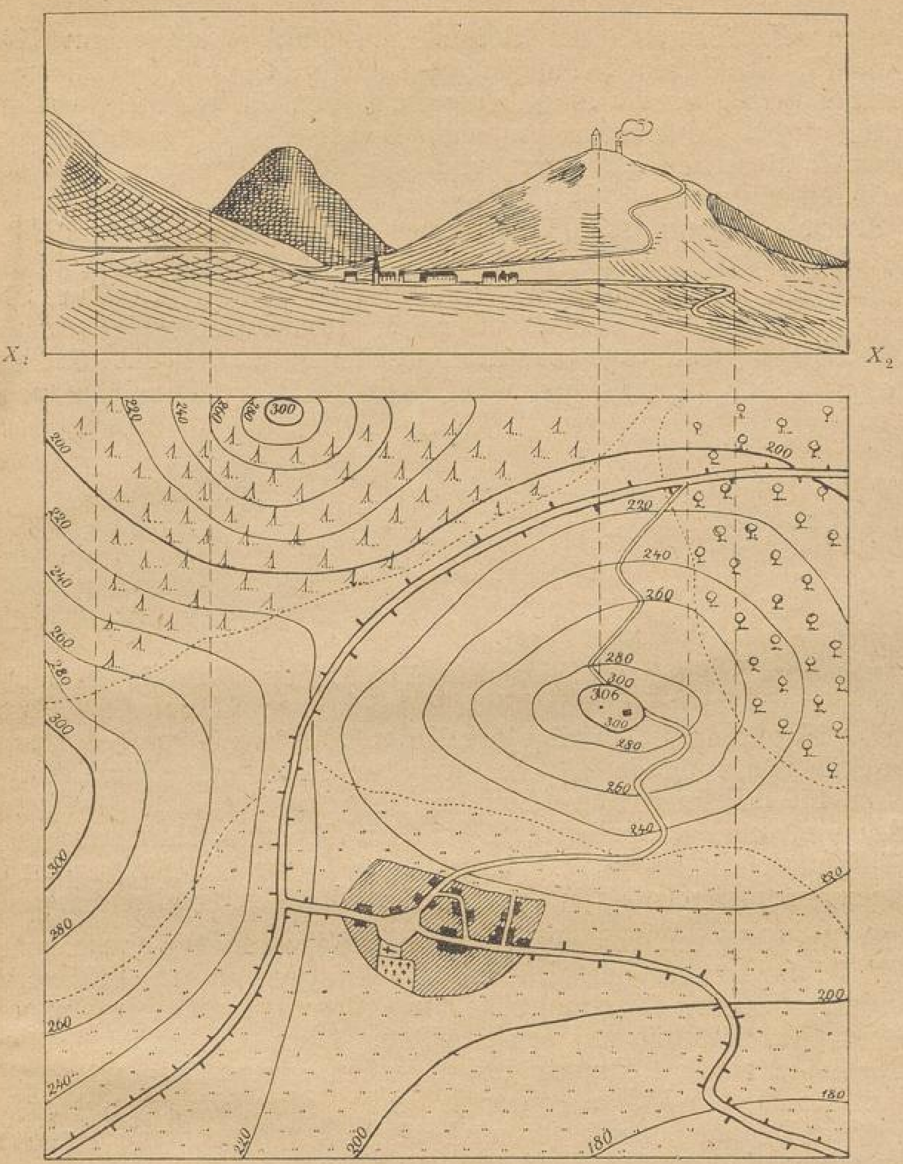


Fig. 26.

gleich den zugehörigen Höhenzahlen der abzubildenden Punkte sind. Insbesondere zieht man Tangenten an die Schichtlinien und bildet die Berührungspunkte ab.

§ 8. Wegführung im Gelände. Längenmessung.

1) Eine topographische Karte ist immer so angelegt, daß ihr oberer Rand nach Norden liegt. Bei Märschen oder Wanderungen ist die Karte beim Gebrauche stets so zu halten, daß sich die Richtung des auf der Karte gezeichneten Weges mit der Marschrichtung auf diesem

Wege deckt. Verfolge den Verlauf eines Weges auf einem Meßtischblatt. Er ist eben, hat mäßige oder starke Steigung, je nachdem er parallel, schräg oder nahezu senkrecht zu den Schichtlinien verläuft.

Wie verhält sich die Steigung eines Weges bei Schraffendarstellung, wenn er a) die Schraffen rechtwinklig, b) schräg schneidet, c) parallel zu ihnen läuft?

Über die Steigungsverhältnisse eines Weges gibt am anschaulichsten sein Längenprofil Auskunft. In Fig. 27 ist das Längenprofil des Weges AC eines deutschen Mittelgebirges dargestellt. Der Weg steigt zunächst von A nach B. Der Höhenunterschied zwischen A und B beträgt, wie man aus der Karte entnehmen kann, 174 m. Errichtet man in B auf AB das Lot gleich BB_0, so stellt AB_0 annähernd die wahre

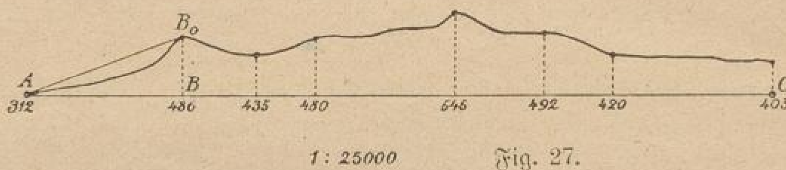


Fig. 27.

Länge des Weges dar. Wieviel ist AB_0 größer als AB? Die wahre Länge ergibt sich genauer mit Hilfe des Längenprofils von AB. Für die ganze Wegstrecke AC beträgt der Unterschied der Länge des Profils gegenüber der Länge AC des auf der Karte gemessenen Weges knapp 150 m. Diese Abweichung von dem auf der Karte gemessenen Weg muß man im Hochgebirge bei Märschen und Wanderungen in Rücksicht ziehen, im Mittelgebirge dagegen, wo die Steigungen im allgemeinen nicht zu groß sind, genügt ein kleiner Zeitzuschlag.

2) Um Längen von ebenen Kurvenstücken auf der Karte zu ermitteln, denkt man sich diese aus kleinen geradlinigen Stücken zusammengesetzt und überträgt diese durch Abgreifen mit einer genügend kleinen Zirkelöffnung auf den Maßstab. Um z. B. die Länge eines Weges mit vielen Krümmungen zu finden, nimmt man zweckmäßig eine Strecke, die 500 m entspricht, in die Zirkelöffnung und zirkelt ihn vom Ausgangspunkte stückweise ab.[1]) Der Soldat und der Wanderer, der nicht immer einen Zirkel zur Hand hat, kann die Fingerspitzen, deren Breite er kennt, als bequemes Maß benutzen.

Genauer wird die Länge eines Kurvenstücks mit Hilfe eines Kurvimeters bestimmt. Dieses besteht aus einem Rädchen, mit dem man die Papierebene abfährt, wobei die Umdrehungen durch ein Zählwerk angegeben werden.

[1]) Vgl. auch die Verwendung der sägezahnartigen Kartenentfernungsmesser.

Ph. Lötzbeyer / Darstellende Geometrie mit Einschl