



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive**

**Lötzbeyer, Philipp**

**Dresden, 1918**

Allgemeines.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83258](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83258)

## Allgemeines.

### § 1. Aufgabe und Bedeutung der darstellenden Geometrie. Zur Geschichte ihrer Entstehung.

Körperliche Gebilde können nicht unmittelbar wie ebene Gebilde durch Zeichnung in einer Ebene so dargestellt werden, daß ihre wahre Gestalt vollständig bestimmt ist (Grund?). Auch ist es nicht möglich, die Konstruktionen der Stereometrie ohne weiteres in einer Zeichenebene auszuführen. Man muß sich zunächst damit begnügen, sie im Geiste mit Hilfe der Vorstellungskraft auszuführen.

Die darstellende Geometrie lehrt nun, sowohl räumliche Gebilde durch gesetzmäßige Abbildungen in einer Ebene so darzustellen, daß ihre wahre Gestalt und gegenseitige Lage vollständig bestimmt ist, als auch alle im Raume auszuführenden Aufgaben durch entsprechende in einer Ebene zu lösen.

Dadurch ist sie für viele Zweige der Technik und Kunst von hervorragender praktischer Bedeutung. Denn sie gibt die Mittel an die Hand, einerseits bereits vorhandene Gegenstände, wie Bauwerke, Maschinen, Monumente ußf. durch Zeichnungen genau und klar zur Darstellung zu bringen, anderseits von noch nicht vorhandenen genaue Pläne zu entwerfen, die als Grundlage für die spätere Ausführung dienen können.

So verdankt denn auch die darstellende Geometrie ihre Entstehung den rein praktischen Bedürfnissen des Handwerkers, Malers und Technikers. Die bei diesen gebräuchlichen Verfahren gesammelt und durch Verschmelzung zu einem Ganzen in ein wissenschaftliches Gewand gekleidet zu haben, ist das Verdienst des französischen Mathematikers Gaspard Monge (1746—1818). Durch das von ihm ausgebildete Grund- und Aufrißverfahren, das allerdings schon vor ihm bekannt war, hat er zuerst der Projektionslehre eine einheitliche Grundlage gegeben (s. § 24).

Wegen ihrer vielseitigen Anwendbarkeit in den technischen Wissenschaften wurden die Lehren der darstellenden Geometrie rasch bekannt. Sie wurden später erweitert und vertieft und gaben den Anstoß zur Entstehung der Geometrie der Lage.

G. Monge war zuerst Professor der Mathematik an der Genieschule zu Mézières und lehrte schon hier seine darstellende Geometrie, durfte aber darüber nichts ver-



öffentlich. Später wurde er Professor an der nach seinen Plänen eingerichteten École polytechnique, wo er seit 1795 seine Géométrie descriptive vortrug und in kurzer Zeit eine große Anzahl hervorragender Geometer und Ingenieure heranzubildete. Monges Schüler (Poncelet, Plücker) waren es, die die projektive Geometrie begründeten. 1792 war er kurze Zeit Marineminister. Nach Napoleons Sturz, dessen Anhänger er war und den er auch nach Agypten begleitet hatte, verlor er 1816 Amt und Würde.

## § 2. Das Projektionsverfahren (Abbildungsverfahren) und die verschiedenen Projektionsarten.

1a) Die Natur zeigt am besten den Weg, räumliche Gebilde in einer Ebene darzustellen. Auf dem lotrecht stehenden Schirm B (Bildebene) entwerfen wir mit Hilfe der sehr kleinen (punktförmigen)

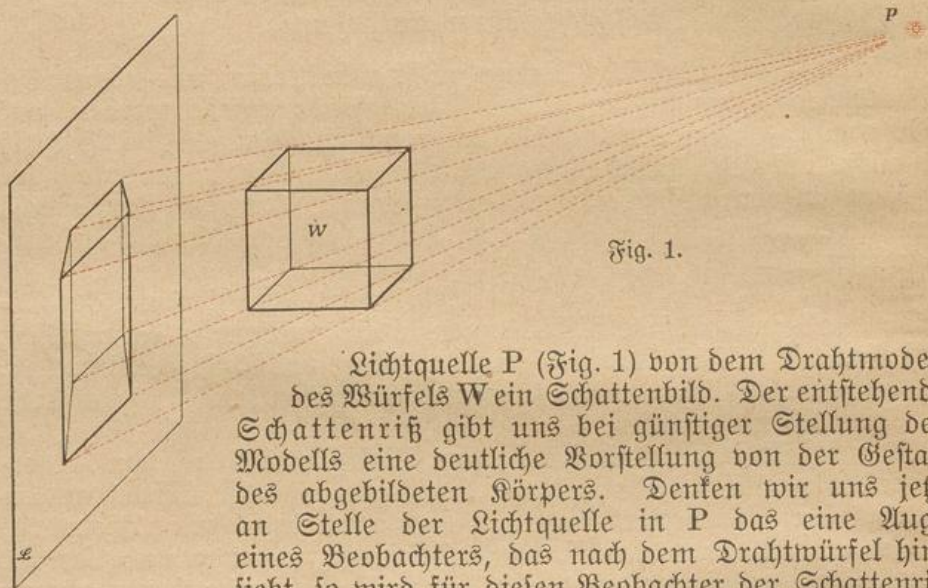


Fig. 1.

Lichtquelle P (Fig. 1) von dem Drahtmodell des Würfels W ein Schattenbild. Der entstehende Schattenriß gibt uns bei günstiger Stellung des Modells eine deutliche Vorstellung von der Gestalt des abgebildeten Körpers. Denken wir uns jetzt an Stelle der Lichtquelle in P das eine Auge eines Beobachters, das nach dem Drahtwürfel hinsieht, so wird für diesen Beobachter der Schattenriß durch den Körper vollständig verdeckt, da die Sehstrahlen, die von dem Auge nach den einzelnen Punkten des Körpers gehen, mit den Lichtstrahlen zusammenfallen. Das Bild ist demnach als die Gesamtheit der Schnittpunkte aller vom Auge in P nach allen Punkten des Gegenstandes gezogenen Sehstrahlen

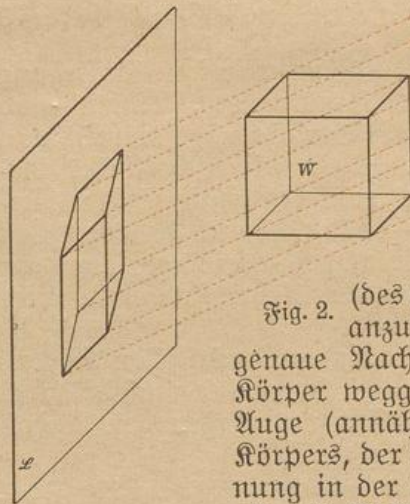


Fig. 2. (des Sehstrahlenbündels) mit dem Schirm anzusehen. Wird jetzt das Schattenbild durch genaue Nachzeichnung festgehalten und dann der Körper weggenommen, so hat das in P befindliche Auge (annähernd) den Eindruck des ursprünglichen Körpers, der um so täuschender ist, je besser die Zeichnung in der Farbe gelungen ist. Die Zeichnung ist also als **Abbildung** des Körpers zu betrachten.



b) Entwerfen wir (Fig. 2) dagegen von dem Drahtwürfel mit Hilfe der Strahlen der Sonne, die wir wegen der ungeheuren Entfernung als parallel ansehen dürfen, ein Schattenbild, so zeigt uns dieses den Gegenstand niemals so, wie wir ihn sehen, da wir ja nie unser Auge in unendliche Entfernung bringen können. Dennoch ist auch ein durch parallele Strahlen erzeugtes Bild, das **Parallelbild** oder **Parallelriß**<sup>1)</sup> heißt, recht anschaulich und macht auf unser Auge einen befriedigenden Eindruck. Im Gegensatz dazu heißt das vorher entworfene **Zentralbild** oder **Zentralriß**, da es durch Strahlen, die von einem Punkte (Zentrum) ausgingen, erzeugt wurde.

Hätte man von einem festen, undurchsichtigen Würfel (statt wie vorher von dem Drahtwürfel) die Schattenbilder entworfen, so hätte man nur ein Bild des Körperumrisses erhalten, das keine deutliche Vorstellung ermöglichte. Deshalb bilden wir auch im folgenden von den darzustellenden Körpern wie vorher bei dem Drahtwürfel nur die Kanten und Eckpunkte, bei krummflächigen Körpern nur die Umrisse und wichtige Schnitte ab.

2a) Dem von der Natur gewiesenen Weg folgt die geometrische Abbildung durch **Projektion**, die als eine Nachbildung des Sehvorgangs unter vereinfachenden Annahmen anzusehen ist. Es sei  $B$  (Fig. 3) eine feste Ebene und  $P$  ein außerhalb der Ebene gegebener fester Punkt. Ist nun  $A$  ein Punkt, der der Ebene  $B$  nicht angehört, so besteht das **Verfahren der Projektion**, das **Projizieren**<sup>2)</sup> oder **Abbilden**, darin, daß man  $P$  mit  $A$  geradlinig verbindet und diese Verbindungslinie zum Schnitt mit der Ebene  $B$  bringt. Den Schnittpunkt  $A'$  nennt man die **Projektion (Riß)**<sup>1)</sup> oder das **Bild** des Punktes  $A$  und sagt, der Punkt  $A$  ist von  $P$  auf die Ebene  $B$  projiziert oder abgebildet worden. Der projizierende Strahl  $PA$  heißt der **Projektions- oder Sehstrahl**,  $P$  das **Projektionszentrum** (Aug- oder Sehpunkt) und  $B$  die **Projektions-, Riß- oder Bildebene**.

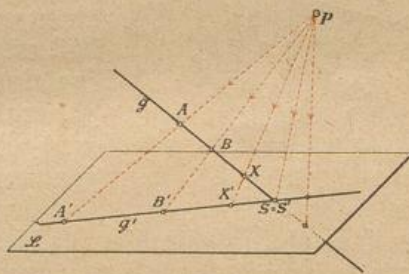


Fig. 3.

Alle Punkte, die auf dem Strahl  $PA$  liegen, haben dieselbe Projektion.

Die Projektion eines Punktes ist wieder ein Punkt.

b) Ist  $g$  eine durch  $A$  (Fig. 3) gehende Gerade, die  $B$  im Punkte  $S$ , dem **Spurpunkt** der Geraden, durchstößt, und projizieren wir alle ihre Punkte von  $P$  auf  $B$ , so erhalten wir als Bild wieder eine Gerade  $g'$ . Denn die Gesamtheit aller Projektionsstrahlen ( $PA, PB \dots$ ) der Punkte von  $g$  liegt in der durch das Projektionszentrum und die Gerade  $g$

<sup>1)</sup> Riß von reißen (Reißzeug!) vom mhd. rizen = einritzen, verwunden, zeichnen.

<sup>2)</sup> Projizieren von proicere (lat.) = hinwerfen, entwerfen.



bestimmten Ebene, der sogenannten **projizierenden Ebene** oder **Seh-ebene** der Geraden  $g$ , die die Bildebene in der **Spur**  $g'$  durchdringt. Jedem Punkte  $X$  von  $g$  entspricht ein und nur ein Bildpunkt  $X'$ . Wie erhält man den Bildpunkt des „unendlich fernen Punktes“ von  $g$ ? Welcher Punkt von  $g$  fällt mit seinem Bildpunkte zusammen? Die Abbildung einer durch das Projektionszentrum gehenden Geraden ist ein Punkt (Grund?). Daraus folgt:

**Die Projektion einer Geraden, die nicht durch das Projektionszentrum geht, ist wieder eine Gerade.**

Demnach erhält man das Bild einer Strecke  $AB$ , indem man ihre Endpunkte projiziert und die Projektionen verbindet. Das Bild einer krummen Linie ergibt sich durch Abbildung einer Anzahl nahe beieinander liegender Punkte, die durch einen zusammenhängenden Kurvenzug zu verbinden sind.

Das Bild einer ebenen Figur findet man durch Projektion der sie begrenzenden Linien. Es ist im allgemeinen wieder eine ebene Figur. In welchem Falle schrumpft es zusammen auf eine Strecke? (Fig. 4.)

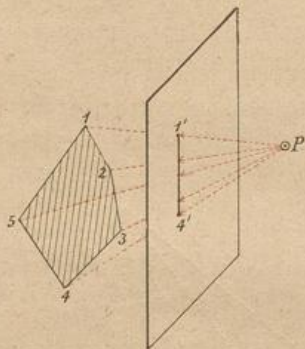


Fig. 4.

**3 a)** Das unter 2) behandelte Projektionsverfahren, bei dem das Projektionszentrum einen endlichen Abstand von der Bildebene hat, nennt man **Zentralprojektion** oder **Perspektive**<sup>1)</sup> und die durch sie erzeugten Bilder **Zentralbilder** oder **Perspektiven**.

**b)** Läßt man (Fig. 3) das Projektionszentrum  $P$  immer weiter in der Richtung  $A'A$  von der Bildebene wegrücken, so wird der von zwei Projektionsstrahlen (z. B. von  $PA$  und  $PB$ ) gebildete Winkel immer kleiner. Liegt es unendlich fern, so sind die Projektionsstrahlen parallel (vgl. Fig. 5 u. 6). In diesem Falle spricht man von **Parallelprojektion**. Die Schattenbilder, die die Sonne liefert, sind ausgezeichnete Parallelprojektionen. Versuche mit Stäben und Drahtmodellen!

Bei der Parallelprojektion, die als Grenzfall der Zentralprojektion aufzufassen ist, unterscheidet man noch **schiefe (schräge)** und **gerade Parallelprojektion** oder **Normalprojektion**, je nachdem die Projektionsstrahlen zur Bildebene schief oder senkrecht stehen. Dementsprechend heißen auch die durch schiefe oder gerade Parallelprojektion gewonnenen Bilder **Schrägbilder** oder **Normalbilder**.

<sup>1)</sup> Die beiden Begriffe decken sich nicht vollständig. Mit Perspektive bezeichnet man im allgemeinen die Anwendungen der Gesetze der Zentralprojektion und spricht auch nur dann von einer perspektivischen Abbildung, wenn Gegenstand und Sehpunkt durch die Bildebene getrennt sind. Perspektive von perspicere (lat.) = hindurchsehen. Der Sinn des Wortes wird erst recht in § 28 klar.