Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 34. Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung der Normalgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

und beim etwaigen Nachrechnen zu beachten ist, indem dadurch die Gesamt-Stimmung noch etwas verbessert worden ist. Offenbar muss, wer ein solches Schema wie S. 105 anwenden will, dasselbe langsam mit dem Rechenschieber in der Hand verfolgen und erst, wenn er den ganzen Gang mechanisch eingeübt hat, ein neues eigenes Beispiel vornehmen.

§ 34. Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung der Normalgleichungen.

Zu den Nebenbetrachtungen, welche sich an die Haupttheorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen noch anschliessen lassen, gehört auch die Frage, ob die Normalgleichungen überhaupt immer eine Auflösung geben werden?

In praktischen Fällen wird man schon aus der Natur der Aufgabe selbst wissen, ob eine Auflösung im gewöhnlichen Sinn möglich ist oder nicht, z. B. wenn ein Punkt in der Ebene bestimmt wird durch den Schnitt mehrerer Geraden, welche in einem einzelnen Falle zufällig alle nahezu parallel werden, so sagt schon der Anblick der Figur, dass keine gute bzw. überhaupt keine Lösung von einer Ausgleichung zu erwarten sein wird.

In diesem und ähnlichem Sinne ist die nachfolgende Untersuchung zu verstehen.

Wir betrachten zuerst den besonderen Fall, dass die Anzahl der Fehlergleichungen *gleich* der Anzahl der Unbekannten ist, und nehmen nur 2 Elemente an:

Fehlergleichungen: *Normalgleichungen:*

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1 & \qquad [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] &= 0 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2 & \qquad [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Reduzierte Normalgleichung: $$[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,l\,.\,1] = 0 \qquad (2)$$

Fehlerquadratsumme: $$[v\,v] = [l\,l\,.\,2] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \qquad (3)$$

In diesem einfachen Falle ist aber:

$$\begin{aligned} [a\,a] &= a_1^2 + a_2^2 & [a\,b] &= a_1 b_1 + a_2 b_2 & [a\,l] &= a_1 l_1 + a_2 l_2 \\ & & [b\,b] &= b_1^2 + b_2^2 & [b\,l] &= b_1 l_1 + b_2 l_2 \\ & & & & [l\,l] &= l_1^2 + l_2^2 \end{aligned}$$

Setzt man dieses in (2) ein, so erhält man nach kurzer Um-Ordnung:

$$[b\,b\,.\,1] = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{a_1^2 + a_2^2} \qquad [b\,l\,.\,1] = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 l_2 - a_2 l_1)}{a_1^2 + a_2^2} \qquad (4)$$

folglich wird $$y = -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} = -\frac{(a_1 l_2 - a_2 l_1)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \qquad (5)$$

Das ist *derselbe* Wert y, den man auch unmittelbar aus den Fehlergleichungen mit $v_1 = 0$ und $v_2 = 0$ erhalten würde. Die Normalgleichungen bilden also hier einen Umweg, den man aber unter Umständen deswegen betritt, weil dabei das Gewicht von y , $p_y = [b\,b\,.\,1]$ erhalten wird, welches die Fehlergleichungen an und für sich nicht geben würden.

Gehen wir nun weiter zu der Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ nach (3), so zeigt sich bald, dass diese gleich Null wird, denn die Ausrechnung giebt:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,2] = l_1^2 + l_2^2 - \frac{(a_1 l_1 + a_2 l_2)^2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{(a_1 l_2 - a_2 l_1)^2}{a_1^2 + a_2^2} = 0 \qquad (6)$$

Wollte man ferner einen mittleren Gewichtseinheitsfehler berechnen, so würde man erhalten:

$$m^2 = \frac{[l\,l\,.\,2]}{2-2} = \frac{0}{0} \tag{7}$$

Denken wir uns, zur Veranschaulichung, unter den 2 Fehlergleichungen etwa 2 lineare Bestimmungen eines Punktes mit den Coordinaten x und y, so erhalten die Resultate (4) bis (7) folgende Deutungen:

Bei 2 Strahlen ist eine Ausgleichung zur Punktbestimmung nicht nötig, wenn man aber trotzdem die Ausgleichungsformeln anwendet, so geben sie denselben Schnittpunkt $x\ y$, den man auch ohne Ausgleichung erhalten hätte, mit bestimmten Gewichten $p_y = [b\,b\,.\,1]$ und $p_x = [a\,a\,.\,1]$, aber ohne einen bestimmten mittleren Gewichtseinheitsfehler m.

Hat man aber die Kenntnis eines solchen Wertes m von irgend anderwärts, so kann man auch mittlere Coordinatenfehler berechnen:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{[b\,b\,.\,1]}} \qquad m_x = \frac{m}{\sqrt{[a\,a\,.\,1]}}$$

Unmöglich wird die Bestimmung von y und x dann, wenn die Coefficienten $a_1\,b_1 \quad a_2\,b_2$ in (1) gleiches Verhältnis haben:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \quad \text{also} \quad a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = 0 \tag{8}$$

d. h. wenn die betreffenden Strahlen parallel werden.

Dagegen wird die Bestimmung von x und y wieder möglich, wenn zu zweien Fehlergleichungen mit konstantem Verhältnis $b : a$ eine dritte mit anderem Verhältnis $b_3 : a_3$ hinzutritt, oder allgemein, wenn bei beliebig vielen Fehlergleichungen, mit 2 Unbekannten, wenigstens 2 Fehlergleichungen sind, deren Coefficientenverhältnisse $b : a$ *nicht* gleich sind. Denn wenn *alle* Verhältnisse $b : a$ einander gleich wären, so würde auch $\frac{[a\,b]}{[a\,a]} = \frac{b}{a}$, also:

$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = [b\,b] - \frac{b}{a}[a\,b] = [b\,b] - [b\,b] = 0.$$

Bei nur 2 Unbekannten x und y lassen sich alle diese Verhältnisse leicht überblicken; für irgend welche Zahl von Unbekannten hat schon *Gauss* in der „Theoria combinationis“ art. 23. Betrachtungen über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung angestellt.

In neuerer Zeit ist diese Frage durch die Determinantentheorie theoretisch noch klarer gemacht worden in folgender Weise:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Normalgleichungen eine und nur eine Auflösung zulassen, besteht darin, dass die aus den Coefficienten der in diesen Gleichungen vorkommenden Unbekannten zusammengesetzte Determinante von Null verschieden sei.

Diese Determinante entsteht aus dem System der Coefficienten der Unbekannten in den Fehlergleichungen durch Komposition mit sich selbst. Sie ist daher gleich (nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten) der Summe der Quadrate derjenigen Determinanten, welche man erhält, indem man aus dem System der Fehlergleichungen auf alle möglichen verschiedenen Weisen jedesmal so viel Gleichungen herausgreift, als Unbekannte zu bestimmen sind, und die Coefficienten der Unbekannten in den herausgegriffenen Gleichungen zu einer Determinante zusammenstellt. Ist von diesen letzteren Determinanten auch nur eine von Null verschieden, so ist die Determinante der Coefficienten der Unbekannten in den Normalgleichungen ebenfalls von Null verschieden.

Das System der Normalgleichungen hat daher jedesmal dann eine und nur eine Lösung, wenn sich aus den Fehlergleichungen auch nur eine einzige Gruppe von Gleichnngen absondern lässt, welche eben so viele Gleichungen enthält, als Unbekannte vorhanden sind, und die Eigenschaft hat, eine und nur eine Lösung zu besitzen.

§ 35. Determinantenformeln für 3 Elemente.

(Ohne Zusammenhang mit unserem allgemeinen Entwicklungsgang.)

Man kann bei 3 Elementen $x\ y\ z$ immer noch die Auflösungsformeln für $x\ y\ z$ und die Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. in einigermassen geschlossener Form angeben, ähnlich wie bei 2 Unbekannten, namentlich wenn man *Determinanten* anwendet, welche selbst ja auch bei 3 Elementen noch übersichtliche Ausrechnung gestatten.

Praktische Bedeutung haben die nachfolgenden Formeln kaum, denn die numerische Auswertung der Unbekannten und ihrer Gewichte geschieht immer am besten auf dem Wege der allmählichen Elimination.

Wenn folgende Fehlergleichungen vorliegen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 &= a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + l_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

so sind die zugehörigen Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Durch allmähliche Elimination findet man hieraus:

$$\left.\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] &= 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,y + [c\,c\,.\,1]\,z + [c\,l\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$[c\,c\,.\,2]\,z + [c\,l\,.\,2] = 0 \tag{4}$$

Andererseits kann man die Determinantentheorie anwenden:

$$D = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,c] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix} = \left\{\begin{aligned} &+ [a\,a]\,[b\,b]\,[c\,c] - [a\,c]\,[b\,b]\,[a\,c] \\ &+ [a\,b]\,[b\,c]\,[a\,c] - [a\,a]\,[b\,c]\,[b\,c] \\ &+ [a\,c]\,[a\,b]\,[b\,c] - [a\,b]\,[a\,b]\,[c\,c] \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Analog sei:

$$D_x = \begin{vmatrix} [a\,l] & [a\,b] & [a\,c] \\ [b\,l] & [b\,b] & [b\,c] \\ [c\,l] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,l] & [a\,c] \\ [a\,b] & [b\,l] & [b\,c] \\ [a\,c] & [c\,l] & [c\,c] \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,l] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,l] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,l] \end{vmatrix} \tag{6}$$

Dann werden $x\ y$ und z so bestimmt:

$$x = -\frac{D_x}{D} \qquad y = -\frac{D_y}{D} \qquad z = -\frac{D_z}{D} \tag{7}$$