Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 36. Interpolations-Ausgleichung einer periodischen Erscheinung

§ 36. Interpolationsausgleichung einer periodischen Erscheinung.

Nachdem wir nun die allgemeine Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen erledigt haben, mag es am Platze sein, zum Abschluss dieser Theorie ein Anwendungs-Beispiel vorzunehmen und hier einzuschalten, welches nicht wie fast alle unsere späteren sonstigen Anwendungen geodätischer Natur ist.

Wir betrachten eine Ausgleichung von Beobachtungen, welche ihrer Natur nach einen *periodischen* Verlauf haben, wie z. B. meteorologische Beobachtungen, Pegelbeobachtungen am Meeresufer u. s. w.

Als periodische Funktion nehmen wir die folgende:

$$F = (F) + r_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + r_2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + r_3 \sin(\alpha_3 + 3\varphi) + \ldots \tag{1}$$

wobei φ unabhängige Veränderliche, etwa der Zeit entsprechend, ist. Die Konstanten $r_0\ r_1\ r_2\ r_3 \ldots \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$ sollen so bestimmt werden, dass die Funktionswerte sich gegebenen Beobachtungen möglichst gut anschliessen, d. h. dass die Quadratsumme der Abweichungen der Funktionswerte F von den Beobachtungen ein Minimum werde.

Zum Zweck der Ausgleichung muss man die Funktion (1) in Bezug auf die zu ermittelnden Unbekannten linear machen, und zwar geschieht dieses einfach durch Auflösung:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 + \varphi) &= \sin\alpha_1 \cos\varphi + \cos\alpha_1 \sin\varphi \\ \sin(\alpha_2 + 2\varphi) &= \sin\alpha_2 \cos 2\varphi + \cos\alpha_2 \sin 2\varphi \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 \sin\alpha_1 = y_1 & r_1 \cos\alpha_1 = x_1 \\ r_2 \sin\alpha_2 = y_2 & r_2 \cos\alpha_2 = x_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{2}$$

und damit nimmt die Funktion (1) folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} F = (F) &+ y_1 \cos\varphi + y_2 \cos 2\varphi + y_3 \cos 3\varphi + \ldots \\ &+ x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + x_3 \sin 3\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Man führt also statt der Unbekannten r und α die neuen Unbekannten y und x ein, und wenn diese ermittelt sind, kann man jederzeit wieder zu r und α zurückkehren, indem man die Gleichungen (2) nach den Unbekannten r und α auflöst.

Wir setzen folgende Beobachtungen voraus:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Amplitude } \varphi = & 0 & i & 2i & 3i \ldots & (n-1)i \\ \text{Beobachtung} & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \ldots & F_{n-1} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Dabei ist i das Intervall der Amplitude φ, und zwar sollen die Beobachtungen sich gleichförmig auf *eine* Periode verteilen, d. h.

$$n\,i = 360°. \tag{5}$$

Man bildet nun aus (3) die den n Beobachtungen F entsprechenden n Fehlergleichungrn, deren allgemeine Form diese ist:

$$v = (F) + y_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi + y_2 \cos 2\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots - F \tag{6}$$

Die n Fehlergleichungen gehen hieraus hervor, wenn man für φ der Reihe nach die Werte 0, i, $2i \ldots$ und für F entsprechend die Werte $F_0\ F_1\ F_2 \ldots$ einsetzt. Wir bilden die Tabelle der Coefficienten der Fehlergleichungen, und um die Bezeichnungen festzusetzen, schreiben wir zu (6) noch die entsprechende Gleichung:

$$v = a(F) + b\,y_1 + c\,x_1 + d\,y_3 + e\,x_2 + \ldots + l \tag{7}$$

Die Tabelle der Coefficienten $a\ b\ c\ \ldots$ und der Absolutglieder l ist:

a	b	c	d	e	$\ldots$	l
$+1$	$\cos 0$	$\sin 0$	$\cos 0$	$\sin 0$	$\ldots$	$-F_0$
$+1$	$\cos i$	$\sin i$	$\cos 2i$	$\sin 2i$	$(3i)$	$-F_1$
$+1$	$\cos 2i$	$\sin 2i$	$\cos 4i$	$\sin 4i$	$(6i)$	$-F_2$
$+1$	$\cos 3i$	$\sin 3i$	$\cos 6i$	$\sin 6i$	$(9i)$	$-F_3$
$+1$	$\cos 4i$	$\sin 4i$	$\cos 8i$	$\sin 8i$	$\ldots$	$-F_4$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

(8)

Wenn man nun die Summen-Coefficienten $[a\,a]\ [a\,b]\ \ldots$ bildet, so bemerkt man bald, dass dieselben wegen der symmetrischen Anordnung der Beobachtungen höchst einfach werden. Die Coefficienten sind nämlich:

$$\left.\begin{array}{lllll}
[a\,a] = n & [a\,b] = 0 & [a\,c] = 0 & [a\,d] = 0 & [a\,e] = 0 \\
 & [b\,b] = \frac{n}{2} & [b\,c] = 0 & [b\,d] = 0 & [b\,e] = 0 \\
 & & [c\,c] = \frac{n}{2} & [c\,d] = 0 & [c\,e] = 0 \\
 & & & [d\,d] = \frac{n}{2} & [d\,e] = 0 \\
 & & & & [e\,e] = \frac{n}{2}
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Die Begründung dieser Formeln kann durch eine geometrische Betrachtung nach nebenstehender Fig. geschehen: Die Gleichung (5), $n\,i = 360°$, entspricht der Konstruktion eines regelmässigen Vielecks von n Seiten, dessen Projektionen auf 2 Achsen sind:

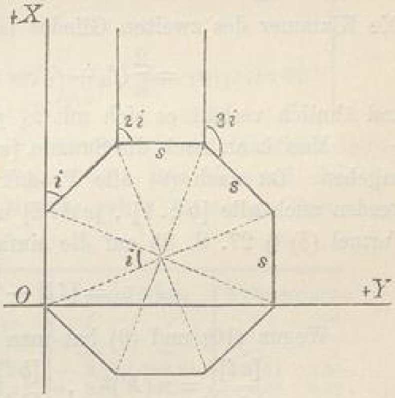
Projektion auf x:

$s + s\cos i + s\cos 2i + s\cos 3i + \ldots$

Projektion auf y:

$0 + s\sin i + s\sin 2i + s\sin 3i + \ldots$

Geometrische Darstellung der Gleichungen $[a\,b] = 0$ und $[a\,c] = 0$



Die Projektionen eines geschlossenen Vielecks auf 2 Achsen sind aber algebraisch = Null, es sind daher durch diese Projektionen die beiden Gleichungen der Gruppe (9) bewiesen:

$$[a\,b] = 0 \text{ und } [a\,c] = 0.$$

Ganz ebenso verhält es sich mit den übrigen Produktsummen $[a\,d] = 0$, $[a\,e = 0$ u. s. w., denn hier handelt es sich nur um *mehrfaches* Durchlaufen von Polygonen mit Centriwinkeln $2i$, $3i$ u. s. w., und ähnlich verhält es sich auch mit $[b\,c]$, $[b\,d]$ u. s. w.; man überzeugt sich, dass jedem Glied $\sin(\ldots)\cos(\ldots)$ immer ein Glied gegenübersteht von der Form $\sin(\ldots \pm 180°)\cos(\ldots)$. Bei den Quadratsummen $[a\,a]$, $[b\,b]$ u. s. w. findet man immer Gruppierung $\sin^2(\ldots) + \cos^2(\ldots)$.

Indem wir hiernach die Coefficienten (9) als erledigt betrachten, gehen wir zur Auflösung der Normalgleichungen über, welche sind:

$$\left.\begin{array}{ll} [a\,a]\,y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & +[a\,l]=0 \\ \quad [b\,b]\,y_1 \ldots\ldots & +[b\,l]=0 \\ \qquad [c\,c]\,x_1 & +[c\,l]=0 \end{array}\right\} \tag{9a}$$

Jede Normalgleichung enthält also nur *eine* Unbekannte, und Elimination ist gar nicht nötig. Indem wir nun auch die Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ ... nach (8) bilden, erhalten wir folgende Auflösung der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} n\,(F) = -\,[a\,l] = [F] \\ \frac{n}{2}y_1 \;\; = -\,[b\,l] = (F_0 + F_1 \cos i + F_2 \cos 2\,i + F_3 \cos 3\,i + ..) \\ \frac{n}{2}x_1 \;\; = -\,[c\,l] = (.. \quad F_1 \sin i + F_2 \sin 2\,i + F_3 \sin 3\,i + ..) \\ \frac{n}{2}y_2 \;\; = -\,[d\,l] = (F_0 + F_1 \cos 2\,i + F_2 \cos 4\,i + F_3 \cos 6\,i + ..) \\ \frac{n}{2}x_2 \;\; = -\,[e\,l] = (.. \quad F_1 \sin 2\,i + F_2 \sin 4\,i + F_3 \sin 6\,i + ..) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{10}$$

Die erste Gleichung $n\,(F) = [F]$ sagt aus, dass (F) das arithmetische Mittel aller Beobachtungen F ist, und es scheint nun passend, alle Beobachtungen von diesem Mittel an zu zählen, und zu setzen:

$$F_0 = (F) + f_0 \quad , \quad F_1 = (F) + f_1 \quad , \quad F_2 = (F) + f_2 \text{ u. s. w.} \tag{11}$$

hiebei ist:

$$[f] = 0 \tag{12}$$

Man darf nun auch in (10) überall f statt F schreiben, denn es wird z. B. durch Substitution von (11) in y_1:

$$y_1 = \frac{2}{n}(f_0 + f_1 \cos i + f_2 \cos 2\,i + \ldots) + \frac{2}{n}(F)\,(1 + \cos i + \cos 2\,i + \ldots)$$

Die Klammer des zweiten Gliedes ist aber $= [a\,b] = 0$, folglich:

$$y_1 = \frac{2}{n}(f_0 + f_1 \cos i + f_2 \cos 2\,i + f_3 \cos 3\,i + \ldots) \tag{13}$$

und ähnlich verhält es sich mit $x_1\ y_2\ x_2 \ldots$

Man kann noch die Summe $[v\,v]$ und den mittleren Fehler m einer Beobachtung angeben. Da nach (9) alle Produktsummen $[a\,b]$, $[a\,c]$ ... gleich Null sind, so werden auch alle $[b\,c\,.\,1]$, $[c\,d\,.\,2]$ u. s. w. gleich Null, und damit reduziert sich die Formel (8) § 27. S. 85 auf die einfache Gestalt:

$$[v\,v] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l]^2}{[b\,b]} - \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]} \ldots$$

Wegen (10) und (9) hat man hier:

$$\frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} = n\,(F)^2 \quad , \quad \frac{[b\,l]^2}{[b\,b]} = \frac{n}{2}y_1^2 \quad , \quad \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]} = \frac{n}{2}x_1^2 \text{ u. s. w.}$$

$$[v\,v] = [l\,l] - n\,(F)^2 - \frac{n}{2}(y_1^2 + x_1^2) - \frac{n}{2}(y_2^2 + x_2^2) - \ldots \tag{14}$$

Wegen (2) ist $\quad y_1^2 + x_1^2 = r_1^2 \qquad y_2^2 + x_2^2 = r_2^2 \ldots$

also

$$[v\,v] = [l\,l] - n\,(F)^2 - \frac{n}{2}[r\,r] \tag{15}$$

Das Anfangsglied $[l\,l]$ ist nach (8) zunächst:

$$[l\,l] = [F\,F]$$

Aus (11) folgt: $[F\,F] = [f\,f] + n\,(F)^2 + 2\,(F)\,[f]$ (16)

oder weil nach (12) $[f] = 0$ ist:

$$[l\,l] = [F\,F] = [f\,f] + n\,(F)^2$$

Dieses in (15) gesetzt giebt: $[v\,v] = [f\,f] - \frac{n}{2}[r\,r]$ (17)

Der mittlere Fehler einer Beobachtung wird:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}} \tag{18}$$

wobei u die Anzahl der Konstanten in der Interpolationsformel ist, z. B. in (1) ist $u = 7$; wenn man dagegen schon bei den Gliedern mit $2\,\varphi$ abbricht, wie in (14), so ist $u = 5$.

Wir stellen noch besondere Formeln auf für den häufig vorkommenden Fall $n = 12$, also nach (5), $i = 30°$. In diesem Falle wird nach (13):

$$\begin{aligned} 6\,y_1 &= f_0 + f_1 \cos 30° + f_2 \cos 60° + f_3 \cos 90° + f_4 \cos 120° + f_5 \cos 150° \\ &+ f_6 \cos 180° + f_7 \cos 210° + f_8 \cos 240° + f_9 \cos 270° + f_{10} \cos 300° + f_{11} \cos 330° \end{aligned}$$

Da aber alle hier vorkommenden goniometrischen Funktionen sich auf $\sin 30° = 0{,}5$ und $\cos 30° = 0{,}8660$ reduzieren lassen, so erhält man:

$$6\,y_1 = (f_0 - f_6) + (f_2 - f_4 - f_8 - f_{10}) \sin 30° + (f_1 - f_5 - f_7 + f_{11}) \cos 30°$$

Alle derartigen Formeln für $n = 12$, entsprechend einer Funktion (1), welche bis $4\,\varphi$ fortgesetzt wird, erhält man aus (10), mit Rücksicht auf die Ersetzung der F durch f, wie bei (13). Die Resultate sind:

$$\left.\begin{aligned} 6\,y_1 &= (f_0 - f_6) + (f_2 - f_4 - f_8 + f_{10}) \sin 30° + (f_1 - f_5 - f_7 + f_{11}) \cos 30° \\ 6\,x_1 &= (f_3 - f_9) + (f_1 + f_5 - f_7 - f_{11}) \sin 30° + (f_2 + f_4 - f_8 - f_{10}) \cos 30° \\ 6\,y_2 &= (f_0 - f_3 + f_6 - f_9) + (f_1 - f_2 - f_4 + f_5 + f_7 - f_8 - f_{10} + f_{11}) \sin 30° \\ 6\,x_2 &= (f_1 + f_2 - f_4 - f_5 + f_7 + f_8 - f_{10} - f_{11}) \cos 30° \\ 6\,y_3 &= (f_0 - f_2 + f_4 - f_6 + f_8 - f_{10}) \\ 6\,x_3 &= (f_1 - f_3 + f_5 - f_7 + f_9 - f_{11}) \\ 6\,y_4 &= (f_0 + f_3 + f_6 + f_9) - (f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + f_7 + f_8 + f_{10} + f_{11}) \sin 30° \\ 6\,x_4 &= (f_1 - f_2 + f_4 - f_5 + f_7 - f_8 + f_{10} - f_{11}) \cos 30° \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Zu einem Zahlenbeispiel für die Formeln (19) nehmen wir die 6jährigen Barometermittel von 1868—1873 in Kairo (Jordan, Phys. Geogr. und Meteorol. der lib. Wüste S. 144). Diese Mittel für die einzelnen Monate gehen in unsere Rechnung als Beobachtungen F ein, wie folgende Tabelle zeigt:

φ	Monat		Beobachtet			Ausgeglichen		Widersprüche	
			F	$f = F - 758{,}26$	f^2	f'	F'	v	v^2
			mm	mm		mm	mm	mm	
0°	Januar	0.	761,70	+ 3,44	11,83	+ 3,95	762,21	+ 0,51	0,26
30°	Februar	1.	761,74	+ 3,48	12,11	+ 2,80	761,06	— 0,68	0,46
60°	März	2.	757,62	— 0,64	0,41	+ 0,09	758,35	+ 0,73	0,53
90°	April	3.	758,14	— 0,12	0,01	— 0,72	757,54	— 0,60	0,36
120°	Mai	4.	757,15	— 1,11	1,23	— 0,77	757,49	+ 0,34	0,12
150°	Juni	5.	755,75	— 2,51	6,30	— 2,52	755,74	— 0,01	0,00
180°	Juli	6.	754,51	— 3,75	14,06	— 4,00	754,26	— 0,25	0,06
210°	August	7.	754,40	— 3,86	14,90	— 3,46	754,80	+ 0,40	0,16
240°	September . . .	8.	757,10	— 1,16	1,35	— 1,52	756,74	— 0,36	0,13
270°	Oktober	9.	758,90	+ 0,64	0,41	+ 0,84	759,10	+ 0,20	0,04
300°	November . . .	10.	760,51	+ 2,25	5,06	+ 2,27	760,53	+ 0,02	0,00
330°	Dezember . . .	11.	761,61	+ 3,35	11,22	+ 3,08	761,34	— 0,27	0,07
	Mittel (F) =		758,26	+ 13,16	78,89	+ 13,03	758,26	+ 2,20	2,19
				— 13,15		— 12,99		— 2,17	

Nach (19) wird berechnet:

$$6\,y_1 = +\,20{,}561 \qquad 6\,y_2 = -\,0{,}270 \qquad 6\,y_3 = +\,3{,}31 \qquad 6\,y_4 = +\,0{,}11$$
$$6\,x_1 = -\,\;2{,}479 \qquad 6\,x_2 = -\,3{,}603 \qquad 6\,x_3 = +\,2{,}24 \qquad 6\,x_4 = +\,1{,}49$$

Nach (2) hat man $tang\,\alpha_1 = \dfrac{+\,20{,}561}{-\,\;2{,}479}$ $\qquad \alpha_1 = 96^\circ\,53'$

$$r_1 = \frac{1}{6}\,\frac{20{,}561}{sin\,\alpha_1} = \frac{1}{6}\,\frac{-\,2{,}479}{cos\,\alpha_1} \qquad r_1 = 3{,}452$$

und in gleicher Weise findet man auch die übrigen α und r, so dass man hat:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \;\;96^\circ\;53' & r_1 &= 3{,}452 \\ \alpha_2 &= 184^\circ\;17' & r_2 &= 0{,}602 \\ \alpha_3 &= \;\;55^\circ\;55' & r_3 &= 0{,}666 \\ \alpha_4 &= \;\;\;\;4^\circ\;13' & r_4 &= 0{,}249 \end{aligned}$$

Die Interpolationsformel heisst jetzt:

$$\left.\begin{aligned} f' = 3{,}452\,sin\,(96^\circ\,53' + \varphi) + 0{,}602\,sin\,(184^\circ\,17' + 2\,\varphi) \\ +\,0{,}666\,sin\,(55^\circ\,55' + 3\,\varphi) + 0{,}249\,sin\,(4^\circ\,13' + 4\,\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

oder die ganze Formel nach (1):

$$F' = 758{,}26 + f'$$

Hiernach sind die ausgeglichenen Werte f' und F' der Tabelle unten auf S. 113 berechnet.

Durch Vergleichung der beobachteten und der ausgeglichenen Funktionswerte F oder f erhält man die Widersprüche v, deren Quadratsumme sich in der vorstehenden Tabelle (S. 113) durch unmittelbare Rechnung $[v\,v] = 2{,}19$ ergiebt. Zur durchgreifenden Kontrolierung der ganzen Ausgleichungsrechnung bestimmt man diese Summe auch noch nach (17):

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= 3{,}452 & r_1^2 &= 11{,}916 \\ r_2 &= 0{,}602 & r_2^2 &= \;\;0{,}362 \\ r_3 &= 0{,}666 & r_3^2 &= \;\;0{,}444 \\ r_4 &= 0{,}249 & r_4^2 &= \;\;0{,}062 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} [r\,r] &= 12{,}784 \\ 6\,[r\,r] &= 76{,}704 \end{aligned}$$

$$[v\,v] = [f\,f] - \frac{n}{2}\,[r\,r] = 78{,}89 - 76{,}70 = 2{,}19$$

was mit der unmittelbaren Ausrechnung von $[v\,v] = 2{,}19$ vollständig stimmt. Endlich hat man noch den mittleren Fehler einer Beobachtung nach (18):

$$m = \sqrt{\frac{2{,}19}{12-9}} = \pm\,0{,}85^{mm} \tag{21}$$

Wenn man nur bis zu den Gliedern mit $3\,\varphi$ gehen will, so hat man lediglich in (20) das letzte Glied wegzulassen, und umgekehrt, wenn man mit der Übereinstimmung zwischen der Rechnung und Beobachtung nicht zufrieden ist, und deswegen ein weiteres Glied in die Formel aufnehmen will, so fügt man, mit Beibehaltung aller erstmals erhaltenen Resultate, weitere Glieder bei.

Wie viele Glieder man der Interpolationsformel (1) geben soll, ist natürlich nicht allgemein festzusetzen, man kann nur verlangen, dass der mittlere Fehler (18) nach der Ausgleichung, den Abweichungen, welche die Beobachtungen vor der Ausgleichung unter sich zeigten, möglichst entspreche.

Die hier behandelte Interpolationsrechnung ist zuerst von Bessel in den astr. Nachrichten 6. Band 1828 S. 333—356 behandelt worden: „Über die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung“. Unsere vorstehende Darstellung giebt das Bessel sche Verfahren, nur in etwas mehr anschaulicher Darstellung.

Die Coefficienten $\sin i\ \sin 2i\ \sin 3i \ldots \cos i\ \cos 2i\ \cos 3i \ldots$, welche wir in (19) für $n = 12$ also $i = 30°$ ausgerechnet haben, kann man auch für andere Fälle ein für allemal berechnen, z. B. $n = 73$, $i = 4°\,55'\,53''$ (5tägige Mittel, $n = 365 : 5$) sind die Logarithmen solcher Coefficienten mitgeteilt in: „Des anomalies de la température observées à Genève par Plantamour, Genf und Basel 1867“ S. 20 und 21, wobei jedoch die Amplitude φ anders gezählt ist, so dass die Formeln und die zugehörigen Coefficienten nicht unmittelbar mit den unsrigen übereinstimmen.

Hiezu ist auch zu berichten: Ein graphisches Verfahren zur Herleitung der Coefficienten der Bessel schen Reihe, von Prof. Dr. *Paul Schreiber* in der Meteorologischen Zeitschrift, Juni 1891, S. 237.

Bedingte Beobachtungen.

Nachdem wir in § 12.—36. die vermittelnden Beobachtungen als unmittelbare Folge des allgemeinen Ausgleichungsprinzips von § 12. vollständig durchgenommen haben, gehen wir über zu einer zweiten Form der Ausgleichungsaufgaben, den *bedingten Beobachtungen*, und zwar wollen wir im nächsten § 37. zuerst zeigen, wie sich die Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf die bereits bekannte Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zurückführen lässt, worauf in § 38, 39 u. ff. die selbständige Lösung der neuen Aufgabe sich anschliessen wird.

§ 37. Bedingte Beobachtungen, zurückgeführt auf vermittelnde Beobachtungen.

Es wurden n Grössen unmittelbar beobachtet, zwischen denen r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen bestehen, wobei n grösser als r ist; es sollen die wahrscheinlichsten Werte der n Grössen bestimmt werden.

Ein sehr einfacher Fall dieser Art ist z. B. die Messung von 3 Winkeln $x_1\ x_2\ x_3$ in einem Dreieck, wobei eine Bedingungsgleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 180° = 0$ besteht (bzw. $180° +$ sphär. Excess), also $n = 3$, $r = 1$.

Wir haben diese Aufgabe bereits in § 10. S. 31—35 auf eine Ausgleichung nach dem arithmetischen Mittel zurückgeführt.

Man kann immer die Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf vermittelnde Beobachtungen zurückführen, was wir nun zeigen werden.

Wir nehmen an, es seien n unbekannte Grössen $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n$ zu bestimmen und man habe hiefür die gleich genauen Messungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ gemacht. Zwischen den Unbekannten x bestehen folgende r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_n x_n = 0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_n x_n = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_0 + \underbrace{r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + \ldots + r_n x_n}_{\text{Anzahl} \,=\, n} = 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

Setzt man an Stelle der Unbekannten x die Beobachtungswerte l, so sind die Gleichungen (1) nicht mehr befriedigt, sondern sie geben:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots + a_n l_n = w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + \ldots + b_n l_n = w_2 \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + \ldots + c_n l_n = w_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \ldots + r_n l_n = w_n \end{array} \right\} \tag{2}$$