Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 37. Bedingte Beobachtungen, zurückgeführt auf vermittelnde Beobachtungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Die Coefficienten $\sin i \sin 2i \sin 3i \ldots \cos i \cos 2i \cos 3i \ldots$, welche wir in (19) für $n = 12$ also $i = 30°$ ausgerechnet haben, kann man auch für andere Fälle ein für allemal berechnen, z. B. $n = 73$, $i = 4° 55' 53''$ (5tägige Mittel, $n = 365 : 5$) sind die Logarithmen solcher Coefficienten mitgeteilt in: „Des anomalies de la température observées à Genève par Plantamour, Genf und Basel 1867" S. 20 und 21, wobei jedoch die Amplitude φ anders gezählt ist, so dass die Formeln und die zugehörigen Coefficienten nicht unmittelbar mit den unsrigen übereinstimmen.

Hiezu ist auch zu berichten: Ein graphisches Verfahren zur Herleitung der Coefficienten der Bessel schen Reihe, von Prof. Dr. *Paul Schreiber* in der Meteorologischen Zeitschrift, Juni 1891, S. 237.

Bedingte Beobachtungen.

Nachdem wir in § 12.—36. die vermittelnden Beobachtungen als unmittelbare Folge des allgemeinen Ausgleichungsprinzips von § 12. vollständig durchgenommen haben, gehen wir über zu einer zweiten Form der Ausgleichungsaufgaben, den *bedingten Beobachtungen*, und zwar wollen wir im nächsten § 37. zuerst zeigen, wie sich die Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf die bereits bekannte Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zurückführen lässt, worauf in § 38, 39 u. ff. die selbständige Lösung der neuen Aufgabe sich anschliessen wird.

§ 37. Bedingte Beobachtungen, zurückgeführt auf vermittelnde Beobachtungen.

Es wurden n Grössen unmittelbar beobachtet, zwischen denen r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen bestehen, wobei n grösser als r ist; es sollen die wahrscheinlichsten Werte der n Grössen bestimmt werden.

Ein sehr einfacher Fall dieser Art ist z. B. die Messung von 3 Winkeln $x_1\, x_2\, x_3$ in einem Dreieck, wobei eine Bedingungsgleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 180° = 0$ besteht (bzw. $180° +$ sphär. Excess), also $n = 3$, $r = 1$.

Wir haben diese Aufgabe bereits in § 10. S. 31—35 auf eine Ausgleichung nach dem arithmetischen Mittel zurückgeführt.

Man kann immer die Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf vermittelnde Beobachtungen zurückführen, was wir nun zeigen werden.

Wir nehmen an, es seien n unbekannte Grössen $x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n$ zu bestimmen und man habe hiefür die gleich genauen Messungen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n$ gemacht. Zwischen den Unbekannten x bestehen folgende r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_n x_n = 0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_n x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_0 + \underbrace{r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + \ldots + r_n x_n}_{\text{Anzahl} = n} = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Setzt man an Stelle der Unbekannten x die Beobachtungswerte l, so sind die Gleichungen (1) nicht mehr befriedigt, sondern sie geben:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots + a_n l_n = w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + \ldots + b_n l_n = w_2 \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + \ldots + c_n l_n = w_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \ldots + r_n l_n = w_n \end{array} \right\} \quad (2)$$

Es sind an den l solche Korrektionen v anzubringen, dass die Widersprüche w wieder verschwinden, z. B. für die erste Gleichung von (2):

$$a_0 + a_1(l_1 + v_1) + a_2(l_2 + v_2) + \ldots + a_n(l_n + v_n) = 0$$

Dieses mit der ersten Gleichung von (1) verglichen, giebt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + w_1 = 0$$

also das ganze System dieser Art:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_n v_n + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_n v_n + w_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + \ldots + r_n v_n}_{\text{Anzahl} = n} + w_n = 0 \end{array} \right\} \qquad (3)$$

Hiezu hat man noch die Ausgleichungsbedingung

$$[v\,v] = \text{Minimum.} \qquad (4)$$

Für die Anzahl n der Unbekannten und die Anzahl r der Bedingungsgleichungen ist es wesentlich, dass n grösser als r sei, d. h.

$$n > r \qquad (6)$$

denn es soll nicht möglich sein, die v schon aus den Gleichungen (3) ohne Benützung von (4) zu bestimmen.

Ausserdem sollen die Bedingungsgleichungen (1) untereinander unabhängig sein, und dasselbe gilt von den abgeleiteten Bedingungsgleichungen (3), welche ebenfalls unter einander unabhängig sein müssen.

Man kann nun die Ausgleichung auf vermittelnde Beobachtungen zurückführen, und zwar dadurch, dass man mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (3) eine beliebige Auswahl von r Unbekannten in den $n - r$ übrigen ausdrückt. Man möge erhalten:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} v_1 = A_1 v_{r+1} + B_1 v_{r+2} + \ldots + H_1 v_n \\ v_2 = A_2 v_{r+1} + B_2 v_{r+2} + \ldots + H_2 v_n \\ \vdots \\ v_r = \underbrace{A_r v_{r+1} + B_r v_{r+2} + \ldots + H_r v_n}_{\text{Anzahl} = n - r} \end{array} \right\} \qquad (16)$$

Hiezu schreibt man auch noch die als unabhängig ausgewählten $v_{r+1}\, v_{r+2} \ldots v_n$ selbst:

$$\text{Anzahl} = n - r \left\{ \begin{array}{l} v_{r+1} = v_{r+1} \;\ldots\;\ldots \\ v_{r+2} = \;\ldots\; v_{r+2} \;\ldots \\ \vdots \\ v_n \;\; = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; v_n}_{\text{Anzahl} = n - r} \end{array} \right\} \qquad (7)$$

Nun stellen (6) und (7) zusammen ein System von $r + (n - r)$ d. h. von n Fehlergleichungen mit $n - r$ unabhängigen Unbekannten vor, welche zusammen nach § 25. u. ff. zu behandeln sind. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler m bestimmt sich hiefür nach (19) § 27. S. 87:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(r + (n - r)) - (n - r)}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \qquad (8)$$

Ob diese in allgemeinen Gleichungen angedeutete Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen nützlich ist, kommt auf den einzelnen Fall an. Wenn die Bedingungsgleichungen einfacher Natur sind, und wenn ihre Anzahl nicht gross ist, so wird dieses Verfahren zu empfehlen sein.

Es war uns zunächst nur darum zu thun, die Verhältnisse im ganzen zu überblicken und zugleich die Fehlerformel (8) zu finden, welche immer gilt, mag man die Ausgleichung durch Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen oder nach der nachher zu behandelnden Korrelaten-Methode ausführen.

Über das *Vorzeichen der Absolutglieder* w, welche nach (1) und (2) die Widersprüche zwischen Beobachtung und Theorie vorstellen, ist noch im allgemeinen zu bemerken, dass dasselbe sich unter allen Umständen nach der Formel bestimmt:

$$\text{Widerspruch } w = \text{Beobachtung} - \text{Theorie}$$

oder

$$w = \textit{Beobachtung} - \textit{Soll}. \tag{9}$$

§ 38. Minimum mit Nebenbedingungen.

Ehe wir zu der zweiten, wichtigsten Behandlung bedingter Beobachtungen übergehen, wollen wir in diesem § eine Einschaltung aus der Analysis machen, welche nicht nur zum allernächsten Gebrauch in § 39., sondern auch später noch in ähnlichen Fällen dienen wird.

Wir betrachten eine Funktion von n Veränderlichen $x, y, z \ldots$:

$$\Omega = F(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

Diese Funktion soll zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, wenn die Veränderlichen $x\ y\ z$ nicht unabhängig, sondern durch folgende streng zu erfüllende „Bedingungsgleichungen" verbunden sind:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{array}\right\} \quad (\text{Anzahl} = r) \tag{2}$$

Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen sei r, und zwar soll n grösser als r sein.

Aus der Minimumsbedingung folgt, dass das totale Differential von Ω gleich Null werden muss, d. h.

$$d\,\Omega = \frac{\partial F}{\partial x} d\,x + \frac{\partial F}{\partial y} d\,y + \frac{\partial F}{\partial z} d\,z = 0 \tag{3}$$

Wären keine Bedingungsgleichungen da, so müssten hier die Coefficienten von $d\,x\ d\,y\ d\,z$ einzeln gleich Null gesetzt werden, um den Wert $d\,\Omega$ allgemein auf Null zu bringen. Ausser der Gleichung (3) bestehen noch folgende n durch Differentiierung der Bedingungsgleichungen (2) gewonnene Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} d\,x + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} d\,y + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} d\,z = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{d\,x} d\,x + \dfrac{\partial \psi}{d\,y} d\,y + \dfrac{\partial \psi}{d\,z} d\,z = 0 \end{array}\right| \tag{4}$$

Mittelst der Gleichungen (4) kann man nun r einzelne von den Differentialen $d\,x\ d\,y\ d\,z$ in den $n - r$ übrigen ausdrücken und in (3) substituieren, worauf die Coefficienten der übrigen $n - r$ Differentiale, welche nun unabhängig sind, einzeln gleich Null gesetzt werden müssen. Statt dessen kann man auch die Elimination von r Differentialen, worauf es im wesentlichen ankommt, nach der Methode der un-