Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 38. Minimum mit Nebenbedingungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Ob diese in allgemeinen Gleichungen angedeutete Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen nützlich ist, kommt auf den einzelnen Fall an. Wenn die Bedingungsgleichungen einfacher Natur sind, und wenn ihre Anzahl nicht gross ist, so wird dieses Verfahren zu empfehlen sein.

Es war uns zunächst nur darum zu thun, die Verhältnisse im ganzen zu überblicken und zugleich die Fehlerformel (8) zu finden, welche immer gilt, mag man die Ausgleichung durch Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen oder nach der nachher zu behandelnden Korrelaten-Methode ausführen.

Über das *Vorzeichen der Absolutglieder* w, welche nach (1) und (2) die Widersprüche zwischen Beobachtung und Theorie vorstellen, ist noch im allgemeinen zu bemerken, dass dasselbe sich unter allen Umständen nach der Formel bestimmt:

$$\text{Widerspruch } w = \text{Beobachtung} - \text{Theorie}$$

oder

$$w = \textit{Beobachtung} - \textit{Soll}. \tag{9}$$

§ 38. Minimum mit Nebenbedingungen.

Ehe wir zu der zweiten, wichtigsten Behandlung bedingter Beobachtungen übergehen, wollen wir in diesem § eine Einschaltung aus der Analysis machen, welche nicht nur zum allernächsten Gebrauch in § 39., sondern auch später noch in ähnlichen Fällen dienen wird.

Wir betrachten eine Funktion von n Veränderlichen $x, y, z \ldots$:

$$\Omega = F(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

Diese Funktion soll zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, wenn die Veränderlichen $x\ y\ z$ nicht unabhängig, sondern durch folgende streng zu erfüllende „Bedingungsgleichungen" verbunden sind:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{Anzahl} = r) \tag{2}$$

Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen sei r, und zwar soll n grösser als r sein.

Aus der Minimumsbedingung folgt, dass das totale Differential von Ω gleich Null werden muss, d. h.

$$d\,\Omega = \frac{\partial F}{\partial x} d\,x + \frac{\partial F}{\partial y} d\,y + \frac{\partial F}{\partial z} d\,z = 0 \tag{3}$$

Wären keine Bedingungsgleichungen da, so müssten hier die Coefficienten von $d\,x\ d\,y\ d\,z$ einzeln gleich Null gesetzt werden, um den Wert $d\,\Omega$ allgemein auf Null zu bringen. Ausser der Gleichung (3) bestehen noch folgende n durch Differentiierung der Bedingungsgleichungen (2) gewonnene Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\,x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\,y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\,z = 0 \\ \frac{\partial \psi}{d\,x} d\,x + \frac{\partial \psi}{d\,y} d\,y + \frac{\partial \psi}{d\,z} d\,z = 0 \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Mittelst der Gleichungen (4) kann man nun r einzelne von den Differentialen $d\,x\ d\,y\ d\,z$ in den $n - r$ übrigen ausdrücken und in (3) substituieren, worauf die Coefficienten der übrigen $n - r$ Differentiale, welche nun unabhängig sind, einzeln gleich Null gesetzt werden müssen. Statt dessen kann man auch die Elimination von r Differentialen, worauf es im wesentlichen ankommt, nach der Methode der unbestimmten Coefficienten ausführen, d. h. man multipliziert die Gleichungen (4) mit den vorerst unbestimmten Coefficienten $k_1\ k_2\ \ldots\ k_n$ (Korrelaten) und addiert sie dann zu (3), wodurch entsteht:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen (5) ist gleich der Anzahl der Veränderlichen $x\ y\ z$ in (1), d. h. $= n$; zieht man noch die r Bedingungsgleichungen (2) selbst zu, so hat man die nötigen $n + r$ unabhängigen Gleichungen zur Bestimmung der r Korrelaten und der n Unbekannten $x\ y\ z$. Die Aufgabe ist hiemit im Prinzip gelöst.

Man kann das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung in folgendem Satz aussprechen:

Wenn eine Funktion $\Omega = F\ (x\ y\ z)$ zu einem Minimum gemacht werden soll mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen:

$$\varphi\,(x, y, z) = 0 \qquad \psi\,(x, y, z) = 0$$

so multipliziert man die letzteren mit Korrelaten k_1, k_2 und addiert sie zu der Minimumsgleichung, d. h. man bildet:

$$\Omega' = F\,(x, y, z) + k_1\,\varphi\,(x, y, z) + k_2\,\psi\,(x, y, z)$$

dann wird das Minimum dieser neuen Funktion in Bezug auf $x\ y\ z$ bestimmt, wie wenn die früheren Bedingungsgleichungen nicht da wären.

§ 39. Bedingte Beobachtungen mit Korrelaten.

Den im vorigen § 38. behandelten allgemeinen Satz der Analysis wenden wir nun auf unsere am Anfang von § 37. aufgestellte Aufgabe an.

Wir nehmen die daselbst S. 115 aufgestellten Gleichungen wieder vor, schreiben aber der Übersicht wegen hier überall nur 4 Symbole x_1, x_2, x_3, x_4, wo im allgemeinen Falle deren n stehen, und 3 Gleichungen mit a, b, c statt allgemein r Gleichungen.

Zwischen den Unbekannten x bestehen folgende streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Setzt man an Stelle der wahrscheinlichsten Werte x die Beobachtungswerte $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$, so sind die Gleichungen (1) nicht befriedigt, sondern man erhält:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4 = w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4 = w_2 \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4 = w_3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Es sind daher an den l solche Verbesserungen anzubringen, dass die Widersprüche w verschwinden, d. h. man setzt:

$$x_1 = l_1 + v_1 \qquad x_2 = l_2 + v_2 \qquad x_3 = l_3 + v_3 \qquad x_4 = l_4 + v_4 \tag{3}$$