Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 41. Fehlerquadratsumme [vv]

Wenn die mittleren Fehler $m_1\ m_2\ m_3$ [s. o. bei (8)] *vor* der Ausgleichung richtig bemessen waren, so muss *nach* der Ausgleichung vermöge (12), $m = 1$ werden.

Die Werte $v_1'\ v_2'\ v_3' \ldots$ sind reine Verhältniszahlen, deren mehr oder minder bedeutende Abweichung von 1 einen bequemen Einblick in die Fehlerverteilung und in die Brauchbarkeit der a priori geschätzten $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$ giebt.

Wenn die Ausgleichung nicht das erwartete $m = 1$ giebt, sondern wenn aus der Formel (12) etwa $m = M$ hervorgeht, so ist es angezeigt, alle a priori geschätzten mittleren Fehler im Verhältnis $M : m$ zu ändern.

§ 41. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$.

Die Berechnung des mittleren Gewichtseinheitsfehlers geschieht nach (8) § 37. S. 116, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \text{ bzw. } \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{r}} \tag{1}$$

Wir werden für die Folge in der Regel nur von der Summe $[v\,v]$ reden, weil im Falle ungleicher Gewichte die Summe $[p\,v\,v]$ nach § 40. leicht an die Stelle von $[v\,v]$ gesetzt werden kann.

Nach Vollendung der Ausgleichung kann man die einzelnen v quadrieren und addieren, und hat damit unmittelbar $[v\,v]$.

Statt $[v\,v]$ aus den einzelnen v zu bilden, kann man, wie auch früher bei vermittelnden Beobachtungen, noch andere Wege einschlagen.

Hiezu nehmen wir vor Allem die Ausdrücke für die einzelnen v nach (9) § 39. S. 119 nochmals vor:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \\ v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \\ v_3 &= a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 \\ v_4 &= a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus findet man:

$$\left.\begin{aligned} [v\,v] = [a\,a]\,k_1 k_1 &+ 2\,[a\,b]\,k_1 k_2 + 2\,[a\,c]\,k_1 k_3 \\ &+ \quad [b\,b]\,k_2 k_2 + 2\,[b\,c]\,k_2 k_3 \\ &+ \quad [c\,c]\,k_3 k_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und vergleicht man dieses mit den Normalgleichungen (10) § 39. S. 119, so hat man sofort:

$$[v\,v] = -k_1 w_1 - k_2 w_2 - k_3 w_3 = -[w\,k] \tag{4}$$

Ausserdem kann man die allgemeine Umformung (20) am Schluss von § 27. S. 87 anwenden, welche für (3) ergiebt:

$$[v\,v] = \frac{([a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3)^2}{[a\,a]} + \frac{([b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3)^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{([c\,c\,.\,2]\,k_3)^2}{[c\,c\,.\,2]}$$

d. h. mit Einsetzung der w nach (10) § 39. S. 119 und entsprechend $[w_2\,.\,1]$ u. s. w.:

$$[v\,v] = \frac{w_1^2}{[a\,a]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[w_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{5}$$

Diese Berechnung kann man ebenso an die Elimination der Normalgleichungen anhängen, wie dieses mit $[v\,v] = [l\,l\,.\,u]$ bei den vermittelnden Beobachtungen geschehen ist, d. h. man fügt den Normalgleichungen das Schlussglied 0 zu, und erhält dann folgendes System der allmählich reduzierten Normalgleichungen:

$$\begin{array}{rr}
\underline{[a\,a]\,k_1} + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 & \\
\underline{[b\,b]\,k_2} + [b\,c]\,k_3 + w_2 & \underline{[b\,b\,.\,1]\,k_2} + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] \\
\underline{[c\,c]\,k_3} + w_3 & \underline{[c\,c\,.\,1]\,k_3} + [w_3\,.\,1] \\
\underline{0} & \underline{[0\,.\,1]} \\
 & \underline{[c\,c\,.\,1]\,k_2} + [w_3\,.\,2] \\
 & \underline{[0\,.\,2]} \\
 & \underline{[0\,.\,3]}
\end{array}$$

Das Schlussglied $[0\,.\,3]$ ist dann $= -[v\,v]$.

§ 42. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Elemente.

Mit der Theorie von § 39. und § 41. kann man bereits die gewöhnlichen Ausgleichungen bedingter Beobachtungen machen, wozu der erste Teil (1)—(8) der Formelzusammenstellung von § 43. gehört. Namentlich für Geodäsie-Studium ist zu raten, nach Betrachtung des ersten Teiles von § 44. (1)—(8) nun sofort zu den Triangulierungsausgleichungen unseres II. Kapitels überzugehen. Indessen der deduktive Gang unserer Gesamt-Theorie führt uns zum Funktions-Gewicht.

Wir betrachten eine Funktion F der ausgeglichenen Beobachtungen x, nämlich:

$$F = f_0 + f_1\,x_1 + f_2\,x_2 + f_3\,x_3 + f_4\,x_4 \tag{1}$$

Die Funktion F (welche z. B. bei einer Triangulierung eine Dreiecksseite vorstellt) kann nicht alle x enthalten, sondern höchstens so viele, als deren unabhängig sind, es muss also immer ein Teil der Coefficienten f gleich Null sein.

Es wird nun darauf ankommen, F als eine Funktion der Beobachtungen l darzustellen, etwa in dieser Form:

$$F = F_0 + F_1\,l_1 + F_2\,l_2 + F_3\,l_3 + F_4\,l_4 \tag{2}$$

und zwar kommen hierin *alle* l vor.

Indem wir die Gewichte der l als gleich, $= 1$, annehmen, erhalten wir aus (2) das Gewicht von F nach dem Gesetz von § 5. durch die Gleichung:

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{1} + \frac{F_2^2}{1} + \frac{F_3^2}{1} + \frac{F_4^2}{1} = \left[F\,F\right] \tag{3}$$

Um eine Beziehung zwischen (1) und (2) zu gewinnen, und zwar vor Allem eine Beziehung zwischen x und l, haben wir nach (3) und (9) § 39. S. 119:

$$\left.\begin{array}{ll}
x_1 = l_1 + v_1 & v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\
x_2 = l_2 + v_2 & v_2 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\
x_3 = l_3 + v_3 & v_3 = a_3\,k_1 + b_3\,k_2 + c_3\,k_3 \\
x_4 = l_4 + v_4 & v_4 = a_4\,k_1 + b_4\,k_2 + c_4\,k_3
\end{array}\right\} \tag{4}$$

Damit wird (1) zunächst:

$$\left.\begin{array}{l}
F = f_0 + f_1\,l_1 + f_2\,l_2 + f_3\,l_3 + f_4\,l_4 \\
\qquad + f_1\,v_1 + f_2\,v_2 + f_3\,v_3 + f_4\,v_4
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Wenn man auch den zweiten Teil (rechts) von (4) berücksichtigt, und alles Gleichartige in Summenklammern fasst, so wird (5):

$$\left.\begin{array}{l}
F = \ f_0 + [f\,l] \\
\qquad + [a\,f]\,k_1 + [b\,f]\,k_2 + [c\,f]\,k_3
\end{array}\right\} \tag{6}$$