Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 42. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Elemente

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

schehen ist, d. h. man fügt den Normalgleichungen das Schlussglied 0 zu, und erhält dann folgendes System der allmählich reduzierten Normalgleichungen:

$$
\begin{array}{lr}
\underline{[a\,a]\,k_1} + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 & \\
\qquad\qquad \underline{[b\,b]\,k_2} + [b\,c]\,k_3 + w_2 & \underline{[b\,b\,.\,1]\,k_2} + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{[c\,c]\,k_3} + w_3 & \underline{[c\,c\,.\,1]\,k_3} + [w_3\,.\,1] \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{0} & \underline{[0\,.\,1]} \\
 & \underline{[c\,c\,.\,1]\,k_2} + [w_3\,.\,2] \\
 & \underline{[0\,.\,2]} \\
 & \underline{[0\,.\,3]}
\end{array}
$$

Das Schlussglied $[0\,.\,3]$ ist dann $= -[v\,v]$.

§ 42. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Elemente.

Mit der Theorie von § 39. und § 41. kann man bereits die gewöhnlichen Ausgleichungen bedingter Beobachtungen machen, wozu der erste Teil (1)—(8) der Formelzusammenstellung von § 43. gehört. Namentlich für Geodäsie-Studium ist zu raten, nach Betrachtung des ersten Teiles von § 44. (1)—(8) nun sofort zu den Triangulierungsausgleichungen unseres II. Kapitels überzugehen. Indessen der deduktive Gang unserer Gesamt-Theorie führt uns zum Funktions-Gewicht.

Wir betrachten eine Funktion F der ausgeglichenen Beobachtungen x, nämlich:

$$F = f_0 + f_1\,x_1 + f_2\,x_2 + f_3\,x_3 + f_4\,x_4 \tag{1}$$

Die Funktion F (welche z. B. bei einer Triangulierung eine Dreiecksseite vorstellt) kann nicht alle x enthalten, sondern höchstens so viele, als deren unabhängig sind, es muss also immer ein Teil der Coefficienten f gleich Null sein.

Es wird nun darauf ankommen, F als eine Funktion der Beobachtungen l darzustellen, etwa in dieser Form:

$$F = F_0 + F_1\,l_1 + F_2\,l_2 + F_3\,l_3 + F_4\,l_4 \tag{2}$$

und zwar kommen hierin *alle* l vor.

Indem wir die Gewichte der l als gleich, $= 1$, annehmen, erhalten wir aus (2) das Gewicht von F nach dem Gesetz von § 5. durch die Gleichung:

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{1} + \frac{F_2^2}{1} + \frac{F_3^2}{1} + \frac{F_4^2}{1} = \Big[F\,F\Big] \tag{3}$$

Um eine Beziehung zwischen (1) und (2) zu gewinnen, und zwar vor Allem eine Beziehung zwischen x und l, haben wir nach (3) und (9) § 39. S. 119:

$$\left.\begin{array}{ll}
x_1 = l_1 + v_1 & v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\
x_2 = l_2 + v_2 & v_2 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\
x_3 = l_3 + v_3 & v_3 = a_3\,k_1 + b_3\,k_2 + c_3\,k_3 \\
x_4 = l_4 + v_4 & v_4 = a_4\,k_1 + b_4\,k_2 + c_4\,k_3
\end{array}\right\} \tag{4}$$

Damit wird (1) zunächst:

$$\left.\begin{array}{l}
F = f_0 + f_1\,l_1 + f_2\,l_2 + f_3\,l_3 + f_4\,l_4 \\
\qquad + f_1\,v_1 + f_2\,v_2 + f_3\,v_3 + f_4\,v_4
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Wenn man auch den zweiten Teil (rechts) von (4) berücksichtigt, und alles Gleichartige in Summenklammern fasst, so wird (5):

$$\left.\begin{array}{l}
F = \quad f_0 + [f\,l] \\
\qquad + [a\,f]\,k_1 + [b\,f]\,k_2 + [c\,f]\,k_3
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Die Korrelaten k müssen eliminiert werden, und dazu dienen die früheren Normalgleichungen (10) § 39. S. 119, welche wir mit Rücksicht auf (5) § 39. S. 119 so schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} r_1) & [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + [a\,l] + a_0 = 0 \\ r_2) & [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + [b\,l] + b_0 = 0 \\ r_3) & [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + [c\,l] + c_0 = 0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Um nun $k_1\ k_2\ k_3$ aus (6) und (7) zu eliminieren, multiplizieren wir die (7) mit vorerst unbestimmt gelassenen neuen Coefficienten $r_1\ r_2\ r_3$, und addieren hiezu (6). Denken wir das ausgeführt, so verfügen wir über die zunächst unbestimmt gelassenen $r_1\ r_2\ r_3$ so, dass die Glieder mit $k_1\ k_2\ k_3$ verschwinden, d. h. wir haben die

Übertragsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,r_1 + [a\,b]\,r_2 + [a\,c]\,r_3 + [a\,f] = 0 \\ [a\,b]\,r_1 + [b\,b]\,r_2 + [b\,c]\,r_3 + [b\,f] = 0 \\ [a\,c]\,r_1 + [b\,c]\,r_2 + [c\,c]\,r_3 + [c\,f] = 0 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Die Weiterführung der angegebenen Operation mit (6) und (7) giebt, nachdem (8) festgestellt ist, vollends:

$$\left.\begin{array}{rl} F = & f_0 + [f\,l] \\ & + (a_0 + [a\,l])\,r_1 + (b_0 + [b\,l])\,r_2 + (c_0 + [c\,l])\,r_3 \end{array}\right\} \quad (9)$$

oder durch Ordnen nach l, wie es (2) verlangt:

$$\left.\begin{array}{rl} F = & f_0 + a_0\,r_1 + b_0\,r_2 + c_0\,r_3 \\ & + (f_1 + a_1\,r_1 + b_1\,r_2 + c_1\,r_3)\,l_1 \\ & + (f_2 + a_2\,r_1 + b_2\,r_2 + c_2\,r_3)\,l_2 \\ & + (f_3 + a_3\,r_1 + b_3\,r_2 + c_3\,r_3)\,l_3 \\ & + (f_4 + a_4\,r_1 + b_4\,r_2 + c_4\,r_3)\,l_4 \end{array}\right\} \quad (10)$$

Damit ist erreicht, was in (2) erstrebt wurde, nämlich die Entwicklung von F als lineare Funktion der l, wobei die Coefficienten sind:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = f_1 + a_1\,r_1 + b_1\,r_2 + c_1\,r_3 \\ F_2 = f_2 + a_2\,r_1 + b_2\,r_2 + c_2\,r_3 \\ F_3 = f_3 + a_3\,r_1 + b_3\,r_2 + c_3\,r_3 \\ F_4 = f_4 + a_4\,r_1 + b_4\,r_2 + c_4\,r_3 \end{array}\right\} \quad (11)$$

Wir haben nun also folgendes Verfahren:

Nachdem die Coefficienten $f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ der Funktion (1), deren Gewicht bestimmt werden soll, festgestellt sind, bildet man die Summen $[a\,f]\ [b\,f]\ [c\,f]$, welche als Absolutglieder an die Normalgleichungen angehängt, die Übertragungsgleichungen (8) geben. Diese löst man nach $r_1\ r_2\ r_3$ auf, setzt diese r in (11), und kann damit alle F ausrechnen, deren Quadrierung nach (3) die gesuchte Gewichts-Reciproke giebt.

In einzelnen Fällen mag dieses Verfahren am Platz sein, jedenfalls ist es insofern anschaulich, als es genau dem Wege der Ausgleichung selbst folgt, denn die Übertragungs-Coefficienten r treten an Stelle der Korrelaten k, und die F spielen die Rolle der v.

Indessen sind wir gar nicht genötigt, die einzelnen F auszurechnen, um zu $[F\,F]$ zu gelangen, ebensowenig, als es in § 28. nötig war, die einzelnen $\alpha\ \beta\ \ldots$ aufzufinden, um $[\alpha\,\alpha]\ [\alpha\,\beta]\ \ldots$ zu bestimmen, oder in § 27. die einzelnen v zu haben, um $[v\,v]$ zu erhalten. Genau nach Analogie dieser letzteren Umformung (8) § 27. S. 85 können wir aus (11) und (8) folgendes ableiten:

$$\frac{1}{P} = (F\,F) = [f\,f] - \left\{ \frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} + \frac{[b\,f\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[c\,f\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \right\} \quad (12)$$

Die Ausrechnung hievon wird einfach an die Korrelaten-Elimination angehängt, ebenso wie früher bei (10) § 29. S. 93.

Die Gleichung (12) zeigt deutlich, wie durch den Zutritt der überschüssigen Beobachtungen das Gewicht P gewachsen ist. Es ist nämlich $[ff]$ der reciproke Wert des Gewichtes einer Funktion *nicht* ausgeglichener Beobachtungen, welche zur Berechnung der Funktion gerade hinreichend wären, alle Glieder der Klammer $\{\ldots\}$ sind positiv, es wird also $\frac{1}{P}$ durch den Zutritt dieser Klammer verkleinert, oder P vergrössert.

Wenn die Beobachtungsgewichte *nicht* alle $= 1$ sind, wie bisher angenommen ist, so treten die schon in § 40. erwähnten Änderungen ein, und die Schlussformel wird dann statt (12):

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{FF}{p}\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \left\{ \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{bf}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} + \frac{\left[\frac{cf}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]} \right\} \tag{13}$$

Alles, was die Formel (12) bzw. (13) verlangt, kann man auch in eine mechanische Regel fassen, welche so lautet:

Man fügt zu dem System der Bedingungsgleichungen eine fingierte Gleichung mit den Coefficienten f hinzu, also:

$$\left.\begin{array}{ll} k_1) & a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 \ldots + w_1 = 0 \\ k_2) & b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 \ldots + w_2 = 0 \\ k_3) & c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 \ldots + w_3 = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Zusatz} & f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + f_4 v_4 \ldots\ldots \quad = 0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Nun rechnet man gerade so weiter, wie wenn man statt der Absolutglieder w die Coefficienten $[af]$ $[bf]$ . . . $[ff]$ als Schlussglieder hätte:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{[a\,a]\,k_1} + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + \ldots [a\,f] = 0 \\ \underline{[b\,b]\,k_2} + [b\,c]\,k_3 + \ldots [b\,f] = 0 \\ \underline{[c\,c]\,k_3} + \ldots [c\,f] = 0 \\ \ldots\ldots \\ \underline{[f\,f]} \quad \end{array}\right\} \tag{15}$$

Eliminiert man nun allmählich k_1 k_2 k_3, so bleibt ein Schlussglied übrig, welches $= \frac{1}{P}$ nach (12) ist.

Für die Funktion F nach der Ausgleichung kann man noch eine neue Form herstellen, indem man (9) mit (5) § 39. S. 119 verbindet, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{array}{rl} F = & F_0 + f_1\, l_1 + f_2\, l_2 + f_3\, l_3 + f_4\, l_4 \\ & + r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 \end{array}\right\} \tag{16}$$

$$\text{oder } F = (F) + r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 \tag{17}$$

$$F = (F) + [r\,w]$$

Wenn also (F) der Funktionswert *vor* der Ausgleichung war, so erhält man F *nach* der Ausgleichung durch Zufügung von $r_1\, w_1 + r_2\, w_2 + r_3\, w_3$, d. h. Zufügung solcher Teile, welche verschwinden, bzw. unnötig werden, wenn keine Widersprüche w zu tilgen sind.