Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 43. Zusammenstellung der Formeln für Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

§ 43. Zusammenstellung der Formeln für Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

$$\left.\begin{array}{llllll}
\text{Gemessene Grössen} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \; \ldots & l_n \\
\text{Gewichte} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \; \ldots & p_n \\
\text{Verbesserungen} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \; \ldots & v_n \\
\text{Resultate} & x_1 = l_1 + v_1 & x_2 = l_2 + v_2 & x_3 = l_3 + v_3 & x_4 = l_4 + v_4 \ldots & x_n = l_n + v_n
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Bedingungsgleichungen, bezogen auf die Unbekannten x:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l}
a_0 + \underbrace{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \ldots a_n x}\ = 0 \\
b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \ldots b_n x_n = 0 \\
c_0 + \underbrace{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + \ldots c_n x_n}_{\text{Anzahl} = n} = 0
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Von hier an schreiben wir immer $n = 4$, $r = 3$ und haben damit:

Widersprüche:

$$\left.\begin{array}{l}
a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4 = w_1 \\
b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4 = w_2 \\
c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4 = w_3
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Das Vorzeichen der Widersprüche w bestimmt sich durch die Formel:

$$w = \textit{Beobachtung} - \textit{Soll}. \quad (3^*)$$

Bedingungsgleichungen, bezogen auf die Verbesserungen v:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + w_1 = 0 \\
b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + w_2 = 0 \\
c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + w_3 = 0
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + w_1 = 0 \\
\left[\frac{a\,b}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_3 + w_2 = 0 \\
\left[\frac{a\,c}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right] k_3 + w_3 = 0
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Diese Normalgleichungen werden nach k_1 k_2 k_3 aufgelöst, dann werden die v berechnet mittelst der Formeln:

$$\left.\begin{array}{l}
p_1 v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \\
p_2 v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \\
p_3 v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3
\end{array}\right\} \quad (6$$

Beim Anschreiben dieser Gleichungen folgt man den Bedingungsgleichungen (4) nach Vertikalreihen.

Indem man die v zu den Beobachtungen l hinzufügt, erhält man die x, nämlich:

$$x_1 = l_1 + v_1 \qquad x_2 = l_2 + v_2 \qquad x_3 = l_3 + v_3 \qquad x_4 = l_4 + v_4 \quad (7)$$

Mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{r}} \tag{8}$$

Die hiezu nötige Summe $[p\,v\,v]$ kann man unmittelbar aus den einzelnen v berechnen; ausserdem hat man die Kontrolformeln:

$$[p\,v\,v] = -[w\,k] \tag{8*}$$

oder

$$[p\,v\,v] = \frac{w_1^2}{[a\,a]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[w_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{8**}$$

Man betrachtet nun eine Funktion der ausgeglichenen x:

$$F = f_1\,x_1 + f_2\,x_2 + f_3\,x_3 + f_4\,x_4 \tag{9}$$

welche jedoch nicht alle x enthalten kann.

Es soll das Gewicht P dieser Funktion bestimmt werden.

Zu diesem Zweck berechnet man die Summen

$$\left[\frac{a\,f}{p}\right] \qquad \left[\frac{b\,f}{p}\right] \qquad \left[\frac{c\,f}{p}\right] \tag{10}$$

und

$$\left[\frac{f\,f}{p}\right] \tag{11}$$

Zur Weiterrechnung hat man nun zwei Wege, einen praktisch umständlicheren mit den Übertragungs-Coefficienten und einen kürzeren durch Eliminationserweiterung.

Die Methode der Übertragungs-Coefficienten, welche theoretisch übersichtlicher ist, bedarf des Quadratgliedes (11) nicht, sondern bildet aus den ursprünglichen Coefficienten der Normalgleichungen (5) und den neu berechneten Coefficienten (10) die Übertragungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{a\,a}{p}\right] r_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] r_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] r_3 + \left[\frac{a\,f}{p}\right] &= 0 \\
\left[\frac{a\,b}{p}\right] r_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] r_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] r_3 + \left[\frac{b\,f}{p}\right] &= 0 \\
\left[\frac{a\,c}{p}\right] r_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] r_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right] r_3 + \left[\frac{c\,f}{p}\right] &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Diese Gleichungen werden nach $r_1\ r_2\ r_3$ aufgelöst, und dann folgt nach Analogie der v in (6):

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= f_1 + a_1\,r_1 + b_1\,r_2 + c_1\,r_3 \\
F_2 &= f_2 + a_2\,r_1 + b_2\,r_2 + c_2\,r_3 \\
F_3 &= f_3 + a_3\,r_1 + b_3\,r_2 + c_3\,r_3 \\
F_4 &= f_4 + a_4\,r_1 + b_4\,r_2 + c_4\,r_3
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Aus diesen einzelnen F bildet man:

$$\frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3} + \frac{F_4^2}{p_4} = \left[\frac{F\,F}{p}\right] = \frac{1}{P} \tag{14}$$

damit hat man die Reciproke des gesuchten Gewichtes P, und den mittleren Fehler M der betrachteten Funktion F:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} \tag{15}$$

Bei dem zweiten oben erwähnten Berechnungsgang hängt man die Glieder (10) und (11) an die Elimination der Normalgleichungen an, und bildet der Reihe nach folgende Systeme:

$$\left.\begin{array}{llllllll}
\left[\frac{aa}{p}\right] & \left[\frac{ab}{p}\right] & \left[\frac{ac}{p}\right] & \left[\frac{af}{p}\right] & & & & \\
 & \left[\frac{bb}{p}\right] & \left[\frac{bc}{p}\right] & \left[\frac{bf}{p}\right] & \left[\frac{bb}{p}.1\right] & \left[\frac{bc}{p}.1\right] & \left[\frac{bf}{p}\;\right] & \\
 & & \left[\frac{cc}{p}\right] & \left[\frac{cf}{p}\right] & \left[\frac{cc}{p}.1\right] & \left[\frac{cf}{p}.1\right] & \left[\frac{cc}{p}.2\right] & \left[\frac{c}{p}.2\right] \\
 & & & \left[\frac{ff}{p}\right] & & \left[\frac{ff}{p}.1\right] & & \left[\frac{ff}{p}.2\right] \\
 & & & & & & \multicolumn{2}{r}{\left[\frac{ff}{p}.3\right] = \left[\frac{FF}{p}\right] = \frac{1}{P}}
\end{array}\right\} \quad (16)$$

Alle Glieder, in welchen f nicht vorkommt, sind hiebei dieselben, wie die schon bei der Elimination der k aus (5) gebrauchten. Wenn man nach diesem Schema verfährt, so thut man nichts anderes, als was die Formel (13) § 42. S. 124 vorschreibt.

Wenn die Gewichte p in der Form von mittleren Fehlern a priori gegeben sind, so kommen die Formen (5) bis (12) § 40. S. 121 in Anwendung.

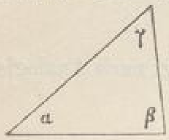
Den Funktionswert F nach der Ausgleichung rechnet man wohl immer unmittelbar nach (9), indem man die ausgeglichenen x einsetzt; indessen besteht hiefür auch die Formel (16) oder (17) von § 42. S. 125:

$$\begin{aligned} F = F_0 + f_1 l_1 + f_2 l_2 + f_3 l_3 + f_4 l_4 \\ + r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 \end{aligned} \qquad (17)$$

§ 44. Ausgleichung der 3 Winkel eines ebenen Dreiecks.

Als einfaches Beispiel zur Erläuterung der im vorigen § 43. zusammengestellten Formeln nehmen wir die Ausgleichung der Winkel eines ebenen Dreiecks (welche in § 10. S. 31—35 bereits nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels behandelt worden ist).

$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=w.$



Die Nummern der Gleichungen entsprechen denen des vorigen §. 43.

Gemessene Winkel	l_1	l_2	l_3	(1)
Gewichte . . .	1	1	1	
Verbesserungen .	v_1	v_2	v_3	
Resultate . . .	$x_1 = l_1 + v_1$	$x_2 = l_2 + v_2$	$x_3 = l_3 + v_3$	

Bedingungsgleichung, bezogen auf die x:

$$-180^\circ + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad (2)$$

Widerspruch:

$$-180^\circ + l_1 + l_2 + l_3 = w \qquad (3)$$

Bedingungsgleichung, bezogen auf die v:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \qquad (4)$$

Coefficienten der Bedingungsgleichungen:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1 \quad \text{und} \quad w_1 = w$$