Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 44. Ausgleichung der drei Winkel eines ebenen Dreiecks

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Bei dem zweiten oben erwähnten Berechnungsgang hängt man die Glieder (10) und (11) an die Elimination der Normalgleichungen an, und bildet der Reihe nach folgende Systeme:

$$\left.\begin{array}{lllllllll}
\left[\frac{aa}{p}\right] & \left[\frac{ab}{p}\right] & \left[\frac{ac}{p}\right] & \left[\frac{af}{p}\right] & & & & & \\
& \left[\frac{bb}{p}\right] & \left[\frac{bc}{p}\right] & \left[\frac{bf}{p}\right] & \left[\frac{bb}{p}.1\right] & \left[\frac{bc}{p}.1\right] & \left[\frac{bf}{p}\quad\right] & & \\
& & \left[\frac{cc}{p}\right] & \left[\frac{cf}{p}\right] & & \left[\frac{cc}{p}.1\right] & \left[\frac{cf}{p}.1\right] & \left[\frac{cc}{p}.2\right] & \left[\frac{c}{p}.2\right] \\
& & & \left[\frac{ff}{p}\right] & & & \left[\frac{ff}{p}.1\right] & & \left[\frac{ff}{p}.2\right] \\
& & & & & & \multicolumn{3}{r}{\left[\frac{ff}{p}.3\right]=\left[\frac{FF}{p}\right]=\frac{1}{P}}
\end{array}\right\} \quad (16)$$

Alle Glieder, in welchen f nicht vorkommt, sind hiebei dieselben, wie die schon bei der Elimination der k aus (5) gebrauchten. Wenn man nach diesem Schema verfährt, so thut man nichts anderes, als was die Formel (13) § 42. S. 124 vorschreibt.

Wenn die Gewichte p in der Form von mittleren Fehlern a priori gegeben sind, so kommen die Formen (5) bis (12) § 40. S. 121 in Anwendung.

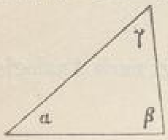
Den Funktionswert F nach der Ausgleichung rechnet man wohl immer unmittelbar nach (9), indem man die ausgeglichenen x einsetzt; indessen besteht hiefür auch die Formel (16) oder (17) von § 42. S. 125:

$$\begin{aligned} F = F_0 + f_1 l_1 + f_2 l_2 + f_3 l_3 + f_4 l_4 \\ + r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 \end{aligned} \quad (17)$$

§ 44. Ausgleichung der 3 Winkel eines ebenen Dreiecks.

Als einfaches Beispiel zur Erläuterung der im vorigen § 43. zusammengestellten Formeln nehmen wir die Ausgleichung der Winkel eines ebenen Dreiecks (welche in § 10. S. 31—35 bereits nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels behandelt worden ist).

$\alpha+\beta+\gamma-180° = w.$



Die Nummern der Gleichungen entsprechen denen des vorigen §. 43.

Gemessene Winkel	l_1	l_2	l_3	(1)
Gewichte . . .	1	1	1	
Verbesserungen .	v_1	v_2	v_3	
Resultate . . .	$x_1 = l_1 + v_1$	$x_2 = l_2 + v_2$	$x_3 = l_3 + v_3$	

Bedingungsgleichung, bezogen auf die x:

$$-180° + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (2)$$

Widerspruch:

$$-180° + l_1 + l_2 + l_3 = w \quad (3)$$

Bedingungsgleichung, bezogen auf die v:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \quad (4)$$

Coefficienten der Bedingungsgleichungen:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1 \quad \text{und} \quad w_1 = w$$

Coefficienten der Normalgleichungen:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] = 3 \qquad \left[\frac{a\,b}{p}\right] = 0 \qquad \left[\frac{a\,c}{p}\right] = 0\ldots$$

Normalgleichung: $3\,k + w = 0$

Auflösung der Normalgleichung:

$$k = -\frac{w}{3} \tag{5}$$

Verbesserungen:

$$v_1 = -\frac{w}{3} \qquad v_2 = -\frac{w}{3} \qquad v_3 = -\frac{w}{3} \tag{6}$$

Ausgeglichene Dreieckswinkel:

$$x_1 = l_1 - \frac{w}{3} \qquad x_2 = l_2 - \frac{w}{3} \qquad x_3 = l_3 - \frac{w}{3} \tag{7}$$

Mittlerer Fehler einer Messung vom Gewicht 1, d. h. eines gemessenen Winkels vor der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{1}} = \frac{w}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

Die Funktion, deren Gewicht bestimmt werden soll, sei:

$$F = x_1$$

d. h. es soll das Gewicht eines ausgeglichenen Winkels bestimmt werden; es sind also die Funktions-Coefficienten sehr einfach:

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 0 \qquad f_3 = 0 \tag{9}$$

$$\left[\frac{a\,f}{p}\right] = 3 \qquad \left[\frac{b\,f}{p}\right] = 0 \qquad \left[\frac{c\,f}{p}\right] = 0 \tag{10}$$

Die Übertragungsgleichung wird:

$$3\,r + 1 = 0$$

Die Auflösung der Übertragungsgleichung giebt also sehr einfach:

$$r = -\frac{1}{3} \tag{12}$$

Auch die Berechnung der F wird in unserem Falle sehr kurz:

$$F_1 = +\frac{2}{3} \qquad F_2 = -\frac{1}{3} \qquad F_3 = -\frac{1}{3} \tag{13}$$

$$\left[\frac{F\,F}{p}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \tag{14}$$

$$M = \frac{w}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{w}{3}\sqrt{2}. \tag{15}$$

Nun hätte man aber die Funktion F auch auf *anderem* Wege berechnen können, nämlich x_1 auf dem Umwege über x_2 und x_3 ist:

$$x_1 = F = 180^\circ - x_2 - x_3$$

womit: $$f_1 = 0 \qquad f_2 = -1 \qquad f_3 = -1 \tag{9*}$$

$$3\,r - 2 = 0 \qquad r = +\frac{2}{3} \tag{12*}$$

$$F_1 = +\frac{2}{3} \qquad F_2 = -\frac{1}{3} \qquad F_3 = -\frac{1}{3} \tag{13*}$$

Diese $F_1\ F_2\ F_3$ sind also dieselben, wie im ersten Fall bei (13), obgleich die Funktion F selbst eine andere geworden ist.

Nach dem zweiten Verfahren der Gewichtsberechnung haben wir mit Anwendung auf (9) zuerst das Glied zu berechnen:

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = 1^2 + 0^2 + 0^2 \tag{11}$$

Die Formel (13) § 42. S. 125 reduziert sich in unserem Falle, da nur *eine* Bedingungsgleichung da ist, auf:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{P} = \left[\dfrac{ff}{p}.1\right] = \left[\dfrac{ff}{p}\right] - \dfrac{\left[\dfrac{af}{p}\right]}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]}\left[\dfrac{af}{p}\right] \\ \text{Dieses giebt mit den Coefficienten von (5) und von (10):} \\ \left[\dfrac{ff}{p}.1\right] = 1 - \dfrac{1}{3}\,1 = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \tag{16}$$

Dieses stimmt überein mit (14), worauf auch M ebenso wie bei (15) sich ergiebt.

§ 45. Partielle Ausgleichung.

In Ausnahmsfällen kann es nützlich sein, die Bedingungsgleichungen einer Ausgleichung nicht alle gemeinsam zu erfüllen, sondern etwa einen Teil derselben zuerst für sich zu behandeln, und die Erfüllung der übrigen Gleichungen durch eine zweite Ausgleichung zu bewirken.

Wir nehmen einen Fall mit 3 Gleichungen und 4 Beobachtungen. Die Verbesserungen, deren Quadratsumme $[\delta\,\delta]$ = Minimum werden soll, seien $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4$.

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + a_3\,\delta_3 + a_4\,\delta_4 + w_1 = 0 \\ b_1\,\delta_1 + b_2\,\delta_2 + b_3\,\delta_3 + b_4\,\delta_4 + w_2 = 0 \\ c_1\,\delta_1 + c_2\,\delta_2 + c_3\,\delta_3 + c_4\,\delta_4 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 = 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + w_2 = 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Reduzierte Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] = 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,k_2 + [c\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_3\,.\,1] = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\ \delta_2 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\ \delta_3 = a_3\,k_1 + b_3\,k_2 + c_3\,k_3 \\ \delta_4 = a_4\,k_1 + b_4\,k_2 + c_4\,k_3 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Dieses ist der normale Rechnungsgang der vollständigen Ausgleichung, ohne Trennung der Bedingungsgleichungen.

Wir wollen aber nun annehmen, man sei aus irgend einem Grunde veranlasst, die erste Bedingungsgleichung zuerst für sich zu behandeln.