Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 45. Partielle Ausgleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Nach dem zweiten Verfahren der Gewichtsberechnung haben wir mit Anwendung auf (9) zuerst das Glied zu berechnen:

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = 1^2 + 0^2 + 0^2 \tag{11}$$

Die Formel (13) § 42. S. 125 reduziert sich in unserem Falle, da nur *eine* Bedingungsgleichung da ist, auf:

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{ff}{p}\,.\,1\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{af}{p}\right] \tag{16}$$

Dieses giebt mit den Coefficienten von (5) und von (10):

$$\left[\frac{ff}{p}\,.\,1\right] = 1 - \frac{1}{3}\,1 = \frac{2}{3}$$

Dieses stimmt überein mit (14), worauf auch M ebenso wie bei (15) sich ergiebt.

§ 45. Partielle Ausgleichung.

In Ausnahmsfällen kann es nützlich sein, die Bedingungsgleichungen einer Ausgleichung nicht alle gemeinsam zu erfüllen, sondern etwa einen Teil derselben zuerst für sich zu behandeln, und die Erfüllung der übrigen Gleichungen durch eine zweite Ausgleichung zu bewirken.

Wir nehmen einen Fall mit 3 Gleichungen und 4 Beobachtungen. Die Verbesserungen, deren Quadratsumme $[\delta\,\delta]$ = Minimum werden soll, seien $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4$.

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + a_3\,\delta_3 + a_4\,\delta_4 + w_1 &= 0 \\ b_1\,\delta_1 + b_2\,\delta_2 + b_3\,\delta_3 + b_4\,\delta_4 + w_2 &= 0 \\ c_1\,\delta_1 + c_2\,\delta_2 + c_3\,\delta_3 + c_4\,\delta_4 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 &= 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + w_2 &= 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Reduzierte Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,k_2 + [c\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\ \delta_2 &= a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\ \delta_3 &= a_3\,k_1 + b_3\,k_2 + c_3\,k_3 \\ \delta_4 &= a_4\,k_1 + b_4\,k_2 + c_4\,k_3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dieses ist der normale Rechnungsgang der vollständigen Ausgleichung, ohne Trennung der Bedingungsgleichungen.

Wir wollen aber nun annehmen, man sei aus irgend einem Grunde veranlasst, die erste Bedingungsgleichung zuerst für sich zu behandeln.

Mit einer Korrelate k_1' giebt die erste Bedingungsgleichung die eine Normalgleichung:

$$[a\,a]\,k_1' + w_1 = 0 \qquad k_1' = -\frac{1}{[a\,a]}w_1 \tag{5}$$

und die entsprechenden Korrektionen, welche wir, zum Unterschied von den vollständigen Korrektionen δ, mit u bezeichnen wollen, sind:

$$u_1 = -\frac{a_1}{[a\,a]}w_1 \quad u_2 = -\frac{a_2}{[a\,a]}w_1 \quad u_3 = -\frac{a_3}{[a\,a]}w_1 \quad u_4 = -\frac{a_4}{[a\,a]}w_1 \tag{6}$$

Wir führen sogleich auch die zweiten Korrektionen v ein, so dass ist:

$$\delta_1 = u_1 + v_1 \qquad \delta_2 = u_2 + v_2 \qquad \delta_3 = u_3 + v_3 \qquad \delta_4 = u_4 + v_4 \tag{7}$$

Setzt man diese Ausdrücke (6) und (7) in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen (1), so entstehen neue Bedingungsgleichungen, welche sich nur noch auf die v beziehen:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + a_4\,v_4 + 0 \qquad &= 0 \\ b_1\,v_1 + b_2\,v_2 + b_3\,v_3 + b_4\,v_4 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ c_1\,v_1 + c_2\,v_2 + c_3\,v_3 + c_4\,v_4 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Ausrechnung mit den u nach (6) giebt hiebei:

$$\left.\begin{aligned} [w_2\,.\,1] &= w_2 - b_1\frac{a_1}{[a\,a]}w_1 - b_2\frac{a_2}{[a\,a]}w_1 - \ldots = w_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}w_1 \\ [w_3\,.\,1] &= w_3 - c_1\frac{a_1}{[a\,a]}w_1 - c_2\frac{a_2}{[a\,a]}w_1 - \ldots = w_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}w_2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

d. h. diese Glieder sind dieselben, wie in (3).

Das System (8) für sich allein behandelt würde folgende Ausgleicnung geben:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,k_1'' + [a\,b]\,k_2 \quad + [a\,c]\,k_3 \quad + 0 \qquad &= 0 \\ [a\,b]\,k_1'' + [b\,b]\,k_2 \quad + [b\,c]\,k_3 \quad + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ [a\,c]\,k_1'' + [b\,c]\,k_2 \quad + [c\,c]\,k_3 \quad + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,k_2 + [c\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10*}$$

k_2 und k_3 sind dieselben Korrelaten wie in (3), dagegen ist k_1'' gegen früher geändert. Die Weiterrechnung giebt nach (8) für v_1:

$$v_1 = a_1\,k_1'' + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{11}$$

Hiezu nehmen wir nach (6) und (4):

$$u_1 = -\frac{a_1}{[a\,a]}w_1 \tag{12}$$

$$\delta_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{13}$$

(11) und (12) zusammen geben:

$$u_1 + v_1 = a_1\left(k_1'' - \frac{1}{[a\,a]}w_1\right) + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{14}$$

Die Vergleichung von (2) und (10) giebt aber:

$$[a\,a]\,k_1 + w_1 = [a\,a]\,k_1''$$

und damit geht (14) in (13) über:

$$u_1 + v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 = \delta_1 \tag{15}$$

Dasselbe gilt auch für $\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$, und wir haben nun folgenden Satz:

Wenn man eine Bedingungsgleichung a. von (1) zuerst für sich behandelt, und daraus erste Verbesserungen u ableitet, und wenn man dann die erstmals verbesserten Beobachtungen, wie wenn sie Originalmessungen wären, nochmals mit Rücksicht auf alle Bedingungsgleichungen ausgleicht, so bekommt man dieselben Schlusswerte, wie wenn man alle Gleichungen zusammen in *einer* Ausgleichung behandelt hätte.

Dieser Satz gilt für beliebig viele Gleichungen in beliebigen Trennungen.

In dieser Form kann dieser Satz (suppl. theoriae combinationis art. 18. und 19.) z. B. auf Triangulierungen angewendet werden, indem man die leicht erfüllbaren Winkelsummengleichungen zuerst für sich behandelt (vgl. *Nell*, Schleiermachers Methode der Winkelausgleichung in einem Dreiecksnetz, Zeitschr. f. Verm. 1881, S. 1 u. ff.).

Eine Verfeinerung der partiellen Ausgleichung kann man noch erzielen durch Einführung *reduzierter Bedingungsgleichungen*, zu welchen wir nun übergehen.

Wir schreiben zunächst willkürlich:

Reduzierte Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} b_1'\,v_1 + b_2'\,v_2 + b_3'\,v_3 + b_4'\,v_4 + [w_2\,.\,1] = 0 \\ c_1'\,v_1 + c_2'\,v_2 + c_3'\,v_3 + c_4'\,v_4 + [w_3\,.\,1] = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Dabei sind die Coefficienten b' c' dieselben Werte, welche wir schon in § 26. als Coefficienten der reduzierten Fehlergleichungen kennen gelernt haben, nämlich:

$$b' = b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \qquad c' = c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \tag{17}$$

$$[b'\,b'] = [b\,b\,.\,1] \qquad [b'\,c'] = [b\,c\,.\,1] \qquad [c'\,c'] = [c\,c\,.\,1]$$

Die Absolutglieder von (16) sind dieselben wie in (3) und (10), nämlich:

$$[w_2\,.\,1] = w_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,w_1 \qquad [w_3\,.\,1] = w_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,w_1 \tag{18}$$

Die reduzierten Bedingungsgleichungen (16) geben daher dasselbe Normalgleichungssystem (3), das wir früher schon als System reduzierter Normalgleichungen kennen gelernt haben.

Denkt man sich dieses System nach k_2 und k_3 aufgelöst, und rechnet ganz formell mit den reduzierten Bedingungsgleichungen (16) weiter, so erhält man:

$$v_1 = b_1'\,k_2 + c_1'\,k_3\;,\;\; v_2 = b_2'\,k_2 + c_2'\,k_3\;,\;\; v_3 = b_3'\,k_2 + c_3'\,k_3\;,\;\; v_4 = b_4'\,k_2 + c_4'\,k_3 \tag{19}$$

und wir behaupten nun, dass diese v mit den schon oben bei (6) gegebenen u zusammen, *dieselben* Korrektionen δ geben, welche man bei der ungetrennten Ausgleichung nach (4) erhalten würde. Um dieses zu beweisen, betrachten wir den ersten Wert δ_1 von (4):

$$\delta_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{20}$$

k_1 soll durch die erste Normalgleichung von (2) eliminiert werden, nämlich:

$$k_1 = -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,k_2 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,k_3 - \frac{1}{[a\,a]}\,w_1$$

Dieses in (20) gesetzt giebt, nach w k_2 k_3 geordnet,

$$\delta_1 = -\frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 + \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right)k_2 + \left(c_1 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a_1\right)k_3 \tag{21}$$

Das erste Glied hievon ist $= u_1$ nach (6), und das übrige stimmt mit (19), es ist also in Übereinstimmung mit (7):

$$\delta_1 = u_1 + v_1 \quad \text{und ebenso} \quad \delta_2\;,\; \delta_3\;,\; \delta_4 \tag{22}$$

Wir haben also jetzt bewiesen, dass die erste Bedingungsgleichung a von (1) mit den Korrektionen u, und die zwei *reduzierten* Gleichungen (16) mit den Korrektionen v dasselbe leisten, wie die Gesamtausgleichung von (1).

Wir wollen das gefundene Ergebnis noch für den einfachen Fall zurechtlegen, dass alle Coefficienten $a = 1$ sind. (Anwendung auf Polygon-Züge.)

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n + w_1 &= 0 \\ b_1\,\delta_1 + b_2\,\delta_2 + b_3\,\delta_3 + \ldots + b_n\,\delta_n + w_2 &= 0 \\ c_1\,\delta_1 + c_2\,\delta_2 + c_3\,\delta_3 + \ldots + c_n\,\delta_n + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die erste Gleichung allein giebt:

$$\text{erste Korrektionen} \quad u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = u_n = -\frac{w_1}{n} \tag{24}$$

Reduzierte Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} b_1'\,v_1 + b_2'\,v_2 + b_3'\,v_3 + \ldots + b_n'\,v_n + w_2' &= 0 \\ c_1'\,v_1 + c_2'\,v_2 + c_3'\,v_3 + \ldots + c_n'\,v_n + w_3' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

wobei

$$b_1' = b_1 - \frac{[b]}{n} \qquad b_2' = b_2 - \frac{[b]}{n} \ldots \qquad w_2' = w_2 - \frac{[b]}{n} w_1$$

$$c_1' = c_1 - \frac{[c]}{n} \qquad c_2' = c_2 - \frac{[c]}{n} \ldots \qquad w_3' = w_3 - \frac{[c]}{n} w_1$$

$$\text{Probe:} \quad [b'] = 0 \qquad [c'] = 0$$

Die zwei Gleichungen (25) werden wie Originalgleichungen mit gleichgewichigen v weiter behandelt, und geben die zweiten Korrektionen v.

§ 46. Gewicht einer Funktion von Funktionen.

Als sehr selten anzuwendenden Fall betrachten wir die Aufgabe, dass man für 2 Funktionen die Gewichte berechnet habe und daraus auch das Gewicht einer neuen Funktion dieser Funktionen bestimmen will.

Der wichtigste Fall dieser Art besteht darin, dass man die Coordinaten X und Y und die Coordinatengewichte P_x und P_y eines Triangulierungspunktes berechnet hat, und damit irgend eine weitere Genauigkeitsfrage, z. B. Lage und Grösse einer Fehler-Ellipse, oder Distanz und Azimut beantworten will.

Die 2 ursprünglich betrachteten Funktionen seien:

$$X = f_1\,x_1 + f_2\,x_2 + f_3\,x_3 + f_4\,x_4 + \ldots \qquad Y = f_1'\,x_1 + f_2'\,x_2 + f_3'\,x_3 + f_4'\,x_4 \tag{1}$$

und die zugehörigen Funktionsgewichte seien nach § 42. berechnet:

$$\frac{1}{P_x} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} - \ldots \qquad \frac{1}{P_y} = [f'f'] - \frac{[af']^2}{[aa]} - \frac{[bf'.1]^2}{[bb.1]} - \ldots \tag{2}$$

Nun handelt es sich um eine neue Funktion:

$$(F) = r\,X + r'\,Y \tag{3}$$

Diese Funktion kann man sich vermöge (1) als Funktion der x dargestellt denken:

$$(F) = (r\,f_1 + r'\,f_1')\,x_1 + (r\,f_2 + r'\,f_2')\,x_2 + (r\,f_3 + r'\,f_3')\,x_3 + \ldots \tag{4}$$

und dann wird das Gewicht (P) hievon nach derselben Regel bestimmt wie (2), nämlich:

$$\frac{1}{(P)} = [(r\,f + r'\,f')^2] - \frac{[a\,r\,f + a\,r'\,f']^2}{[a\,a]} - \frac{[(b\,r\,f + b\,r'\,f').1]^2}{[b\,b.1]} - \ldots \tag{5}$$