Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 46. Gewicht einer Funktion von Funktionen

Wir haben also jetzt bewiesen, dass die erste Bedingungsgleichung a von (1) mit den Korrektionen u, und die zwei *reduzierten* Gleichungen (16) mit den Korrektionen v dasselbe leisten, wie die Gesamtausgleichung von (1).

Wir wollen das gefundene Ergebnis noch für den einfachen Fall zurechtlegen, dass alle Coefficienten $a = \mathbf{1}$ sind. (Anwendung auf Polygon-Züge.)

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} \delta_1 + \quad \delta_2 + \quad \delta_3 + \ldots + \quad \delta_n + w_1 = 0 \\ b_1\,\delta_1 + b_2\,\delta_2 + b_3\,\delta_3 + \ldots + b_n\,\delta_n + w_2 = 0 \\ c_1\,\delta_1 + c_2\,\delta_2 + c_3\,\delta_3 + \ldots + c_n\,\delta_n + w_3 = 0 \end{array}\right\} \tag{23}$$

Die erste Gleichung allein giebt:

$$\text{erste Korrektionen} \quad u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = u_n = -\frac{w_1}{n} \tag{24}$$

Reduzierte Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} b_1'\,v_1 + b_2'\,v_2 + b_3'\,v_3 + \ldots + b_n'\,v_n + w_2' = 0 \\ c_1'\,v_1 + c_2'\,v_2 + c_3'\,v_3 + \ldots + c_n'\,v_n + w_3' = 0 \end{array}\right\} \tag{25}$$

wobei

$$b_1' = b_1 - \frac{[b]}{n} \qquad b_2' = b_2 - \frac{[b]}{n} \ldots \qquad w_2' = w_2 - \frac{[b]}{n}\,w_1$$

$$c_1' = c_1 - \frac{[c]}{n} \qquad c_2' = c_2 - \frac{[c]}{n} \ldots \qquad w_3' = w_3 - \frac{[c]}{n}\,w_1$$

$$\text{Probe:} \quad [b'] = 0 \qquad [c'] = 0$$

Die zwei Gleichungen (25) werden wie Originalgleichungen mit gleichgewichigen v weiter behandelt, und geben die zweiten Korrektionen v.

§ 46. Gewicht einer Funktion von Funktionen.

Als sehr selten anzuwendenden Fall betrachten wir die Aufgabe, dass man für 2 Funktionen die Gewichte berechnet habe und daraus auch das Gewicht einer neuen Funktion dieser Funktionen bestimmen will.

Der wichtigste Fall dieser Art besteht darin, dass man die Coordinaten X und Y und die Coordinatengewichte P_x und P_y eines Triangulierungspunktes berechnet hat, und damit irgend eine weitere Genauigkeitsfrage, z. B. Lage und Grösse einer Fehler-Ellipse, oder Distanz und Azimut beantworten will.

Die 2 ursprünglich betrachteten Funktionen seien:

$$X = f_1\,x_1 + f_2\,x_2 + f_3\,x_3 + f_4\,x_4 + \ldots \qquad Y = f_1'\,x_1 + f_2'\,x_2 + f_3'\,x_3 + f_4'\,x_4 \tag{1}$$

und die zugehörigen Funktionsgewichte seien nach § 42. berechnet:

$$\frac{1}{P_x} = [f\,f] - \frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,f\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \ldots \qquad \frac{1}{P_y} = [f'\,f'] - \frac{[a\,f']^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,f'\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \ldots \tag{2}$$

Nun handelt es sich um eine neue Funktion:

$$(F) = r\,X + r'\,Y \tag{3}$$

Diese Funktion kann man sich vermöge (1) als Funktion der x dargestellt denken:

$$(F) = (r\,f_1 + r'\,f_1')\,x_1 + (r\,f_2 + r'\,f_2')\,x_2 + (r\,f_3 + r'\,f_3')\,x_3 + \ldots \tag{4}$$

und dann wird das Gewicht (P) hievon nach derselben Regel bestimmt wie (2), nämlich:

$$\frac{1}{(P)} = [(r\,f + r'\,f')^2] - \frac{[a\,r\,f + a\,r'\,f']^2}{[a\,a]} - \frac{[(b\,r\,f + b\,r'\,f')\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \ldots \tag{5}$$

Nun ist die Summe

$$[(r f + r' f')^2] = [r^2 f^2 + 2 r r' f f' + r'^2 f'^2]$$
$$= r^2 [f f] + 2 r r' [f f'] + r'^2 [f'^2] \qquad (6)$$

Dasselbe Bildungsgesetz gilt auch unmittelbar für das zweite Glied von (5), und dieses Gesetz gilt auch für alle folgenden Glieder von (5), wie man ebenso beweist, wie früher für vermittelnde Beobachtungen § 30.

Wir wollen dieses nur für $[\ldots 1]$ näher ausführen:

$$[b f . 1] = [b f] - \frac{[a b]}{[a a]} [a f] \qquad [b f' . 1] = [b f'] - \frac{[a b]}{[a a]} [a f']$$

$$[(b r f + b r' f') . 1] = [b r f + b r' f'] - \frac{[a b]}{[a a]} [a r f + a r' f']$$

$$[(b r f + b r' f') . 1] = r [b f . 1] + r' [b f' . 1]$$

Dieses entspricht völlig der zweiten Gleichung der Gruppe (6) § 30., und auch alles Übrige gestaltet sich wie dort. Wir haben also die allgemeine Regel:

Wenn für 2 Funktionen X und Y nach (1) die Gewichte in folgender Form entwickelt sind:

$$\frac{1}{P_x} = [f f] - \left\{ \frac{[a f]^2}{[a a]} + \frac{[b f . 1]^2}{[b b . 1]} + \frac{[c f . 2]^2}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \qquad (7)$$

$$\frac{1}{P_y} = [f' f'] - \left\{ \frac{[a f']^2}{[a a]} + \frac{[b f' . 1]^2}{[b b . 1]} + \frac{[c f' . 2]^2}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \qquad (8)$$

so bestimmt man für eine Funktion:

$$(F) = r X + r' Y \qquad (9)$$

das Gewicht (P) so: Man berechnet zuerst:

$$\frac{1}{P_{xy}} = [f f'] - \left\{ \frac{[a f] [a f']}{[a a]} + \frac{[b f . 1] [b f' . 1]}{[b b . 1]} + \frac{[c f . 2] [c f' . 2]}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \qquad (10)$$

und dann ist:

$$\frac{1}{(P)} = r^2 \frac{1}{P_x} + 2 r r' \frac{1}{P_{xy}} + r'^2 \frac{1}{P_y} \qquad (11)$$

Wenn $r = r' = 1$ ist, so bekommt man eine ähnliche Regel wie am Schluss von § 30. S. 95, nämlich: Wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{P_x} = [\alpha \alpha] = A A - \left\{ \dfrac{A_0 A_0}{[a a]} + \dfrac{A_1 A_1}{[b b . 1]} + \dfrac{A_2 A_2}{[c c . 1]} + \ldots \right\} \\
\dfrac{1}{P_y} = [\beta \beta] = B B - \left\{ \dfrac{B_0 B_0}{[a a]} + \dfrac{B_1 B_1}{[b b . 1]} + \dfrac{B_2 B_2}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \\
\text{dann berechnet man } [\alpha \beta] = A B - \left\{ \dfrac{A_0 B_0}{[a a]} + \dfrac{A_1 B_1}{[b b . 1]} + \dfrac{A_2 B_2}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \\
\text{und damit ist:} \\
\dfrac{1}{(P)} = [\alpha \alpha] + [\beta \beta] + 2 [\alpha \beta].
\end{array}\right\} \qquad (12)$$

§ 47. Verschiedene Nebenbetrachtungen.

Die Bedingungen, welchen die Ausgleichung streng genügen soll, können in sehr verschiedenen Formen ausgedrückt werden, und die Bedingungsgleichungen dürfen mehrfach umgeformt werden, wenn nur das, was sie ausdrücken, sachlich erhalten bleibt.

Man darf also die Bedingungsgleichungen mit beliebigen Zahlen multiplizieren