Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 47. Verschiedene Nebenbetrachtungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Nun ist die Summe

$$[(r f + r' f')^2] = [r^2 f^2 + 2 r r' f f' + r'^2 f'^2]$$
$$= r^2 [f f] + 2 r r' [f f'] + r'^2 [f'^2] \qquad (6)$$

Dasselbe Bildungsgesetz gilt auch unmittelbar für das zweite Glied von (5), und dieses Gesetz gilt auch für alle folgenden Glieder von (5), wie man ebenso beweist, wie früher für vermittelnde Beobachtungen § 30.

Wir wollen dieses nur für $[\ldots 1]$ näher ausführen:

$$[b f . 1] = [b f] - \frac{[a b]}{[a a]} [a f] \qquad [b f' . 1] = [b f'] - \frac{[a b]}{[a a]} [a f']$$

$$[(b r f + b r' f') . 1] = [b r f + b r' f'] - \frac{[a b]}{[a a]} [a r f + a r' f']$$

$$[(b r f + b r' f') . 1] = r [b f . 1] + r' [b f' . 1]$$

Dieses entspricht völlig der zweiten Gleichung der Gruppe (6) § 30., und auch alles Übrige gestaltet sich wie dort. Wir haben also die allgemeine Regel:

Wenn für 2 Funktionen X und Y nach (1) die Gewichte in folgender Form entwickelt sind:

$$\frac{1}{P_x} = [f f] - \left\{ \frac{[a f]^2}{[a a]} + \frac{[b f . 1]^2}{[b b . 1]} + \frac{[c f . 2]^2}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \qquad (7)$$

$$\frac{1}{P_y} = [f' f'] - \left\{ \frac{[a f']^2}{[a a]} + \frac{[b f' . 1]^2}{[b b . 1]} + \frac{[c f' . 2]^2}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \qquad (8)$$

so bestimmt man für eine Funktion:

$$(F) = r X + r' Y \qquad (9)$$

das Gewicht (P) so: Man berechnet zuerst:

$$\frac{1}{P_{xy}} = [f f'] - \left\{ \frac{[a f] [a f']}{[a a]} + \frac{[b f . 1] [b f' . 1]}{[b b . 1]} + \frac{[c f . 2] [c f' . 2]}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \qquad (10)$$

und dann ist:

$$\frac{1}{(P)} = r^2 \frac{1}{P_x} + 2 r r' \frac{1}{P_{xy}} + r'^2 \frac{1}{P_y} \qquad (11)$$

Wenn $r = r' = 1$ ist, so bekommt man eine ähnliche Regel wie am Schluss von § 30. S. 95, nämlich: Wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{P_x} = [\alpha \alpha] = A A - \left\{ \frac{A_0 A_0}{[a a]} + \frac{A_1 A_1}{[b b . 1]} + \frac{A_2 A_2}{[c c . 1]} + \ldots \right\} \\
&\frac{1}{P_y} = [\beta \beta] = B B - \left\{ \frac{B_0 B_0}{[a a]} + \frac{B_1 B_1}{[b b . 1]} + \frac{B_2 B_2}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \\
&\text{dann berechnet man } [\alpha \beta] = A B - \left\{ \frac{A_0 B_0}{[a a]} + \frac{A_1 B_1}{[b b . 1]} + \frac{A_2 B_2}{[c c . 2]} + \ldots \right\} \\
&\text{und damit ist:} \\
&\frac{1}{(P)} = [\alpha \alpha] + [\beta \beta] + 2 [\alpha \beta].
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

§ 47. Verschiedene Nebenbetrachtungen.

Die Bedingungen, welchen die Ausgleichung streng genügen soll, können in sehr verschiedenen Formen ausgedrückt werden, und die Bedingungsgleichungen dürfen mehrfach umgeformt werden, wenn nur das, was sie ausdrücken, sachlich erhalten bleibt.

Man darf also die Bedingungsgleichungen mit beliebigen Zahlen multiplizieren oder dividieren (was man bei *Fehler*gleichungen nicht darf, ohne die Gewichtsverhältnisse zu verändern); man darf z. B. auch aus 2 Bedingungsgleichungen a und b mit beliebigen Faktoren $m\ n$, $m'\ n'$, 2 neue Gleichungen $m\,a + n\,b$, $m'\,a + n'\,b$ bilden, und diese an Stelle der ersten benützen.

Bei all diesen Umformungen bleiben aber doch die Hauptresultate, nämlich die Verbesserungen v der Beobachtungen l, immer dieselben, denn die Aufgabe, $[v\,v]$ zu einem Minimum zu machen mit gewissen Nebenbedingungen, ist sachlich eine eindeutig bestimmte, und kann deswegen durch die algebraische *Form* der Auflösung nicht beeinflusst werden.

Eine weitere Frage betrifft die *Unabhängigkeit und Vollständigkeit* der Bedingungsgleichungen.

Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir die Gleichungen (4) und (10) von § 39. S. 119 nochmals vor:

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 = 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + w_2 = 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Wir haben bis jetzt angenommen, dass die Bedingungsgleichungen (1) unter sich unabhängig sind, d. h. dass keine in den übrigen enthalten ist. Wir wollen nun aber untersuchen, was für Folgen entstehen, wenn dieses nicht mehr der Fall ist, und setzen hiezu:

$$c_1 = \alpha\,a_1 + \beta\,b_1 \qquad c_2 = \alpha\,a_2 + \beta\,b_2 \ldots \qquad w_3 = \alpha\,w_1 + \beta\,w_2 \qquad (3)$$

Dann werden auch die Coefficienten der Normalgleichungen nicht mehr unabhängig, nämlich es wird:

$$\left.\begin{array}{lll} [a\,c] = \alpha^2\,[a\,a] + \beta\,[a\,b] \ , & [b\,c] = \alpha\,[a\,b] + \beta\,[b\,b] \ , & w_3 = \alpha\,w_1 + \beta\,w_2 \\ [c\,c] = \alpha^2\,[a\,a] + \beta^2\,[b\,b] + 2\,\alpha\,\beta\,[a\,b] & \text{oder} & = \alpha\,[a\,c] + \beta\,[b\,c] \end{array}\right\} \quad (4)$$

Die Determinantentheorie zeigt in kurzen Sätzen, dass dann die Unbekannten k sich nicht mehr bestimmen lassen, sondern in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erhalten werden.

Wir werden dieses auch mit unseren Symbolen $[b\,b\,.\,1]$ $[b\,c\,.\,1]$ u. s. w. verfolgen.

Die reduzierten Normalgleichungen nach (2) sind:

$$\left.\begin{array}{l} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] = 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,k_2 + [c\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_3\,.\,1] = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Hiebei ist wegen (4):

$$[b\,c\,.\,1] = [b\,c] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,c] = \alpha\,[a\,b] + \beta\,[b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(\alpha\,[a\,a] + \beta\,[a\,b])$$

$$[b\,c\,.\,1] = \beta\,([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]) = \beta\,[b\,b\,.\,1]$$

Ähnlich findet sich $[c\,c\,.\,1] = \beta^2\,[b\,b\,.\,1]$ und $[w_3\,.\,1] = \beta\,[w_2\,.\,1]$, das System (5) heisst also:

$$\begin{array}{r} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + \beta\,[b\,b\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] = 0 \\ \beta\,[b\,b\,.\,1]\,k_2 + \beta^2\,[b\,b\,.\,1]\,k_3 + \beta\,[w_2\,.\,1] = 0 \end{array}$$

Die Elimination von k_2 führt auf:

$$[c\,c\,.\,2]\,k_3 + [w_3\,.\,2] = 0$$

und zwar ist:

$$[c\,c\,.\,2] = \beta^2\,[b\,b\,.\,1] - \frac{\beta\,[b\,b\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,\beta\,[b\,b\,.\,1] = 0$$

$$[w_3\,.\,2] = \beta\,[w_2\,.\,1] - \frac{\beta\,[b\,b\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[w_2\,.\,1] \quad = 0$$

also:

$$-k_3 = \frac{[w_3\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]} = \frac{0}{0} \tag{6}$$

Dasselbe gilt auch von den beiden anderen Unbekannten k_1 und k_2.

Der betrachtete Fall ist praktisch nicht unwichtig, weil es zuweilen vorkommt, dass *aus Versehen* eine Bedingungsgleichung angesetzt wird, welche in den übrigen bereits enthalten ist. Wenn z. B. in einer Nivellementsausgleichung ausser den einzelnen Polygonschlüssen auch noch der Schluss des Gesamtumfangspolygons als Bedingung angesetzt würde, so wäre das nichts anderes als die Summe der übrigen Bedingungsgleichungen, folglich nicht unabhängig.

Ob die Unbestimmtheit (6) sich in der Zahlenrechnung immer deutlich ausspricht, ist zweifelhaft; es kann wegen der Abrundungsfehler vorkommen, dass z. B. nicht genau $k = \frac{0{,}000}{0{,}000}$ entsteht,

$$\text{sondern etwa } k = \frac{0{,}002}{0{,}001} = 2$$

und wenn damit die Rechnung weiter geführt würde, so müsste etwas Widersinniges entstehen.

Ausser dem Falle nicht unabhängiger Bedingungsgleichungen, welchen wir hiemit erledigt haben, ist auch der Fall zu betrachten, dass eine Bedingungsgleichung *falsch* angesetzt, oder ganz weggelassen wird. Das hat an der Bildung und Auflösung der Normalgleichungen nichts Auffälliges zur Folge, äussert sich aber am Schlusse der ganzen Ausgleichung, nach Ausrechnung der Verbesserungen v, sehr unangenehm darin, dass die falsch angesetzte oder die vergessene Bedingungsgleichung nicht erfüllt ist.

Nach Diesem kann man noch die *Übereinstimmung verschiedener Funktionsformen und ihrer Gewichte nach der Ausgleichung* untersuchen:

Wir wollen hiebei die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit Winkelmessungen als anschauliches Beispiel benützen. Die Funktion F, von welcher in § 42. die Rede war, sei eine Dreiecksseite, welche aus der Basis auf verschiedenen Wegen berechnet werden kann.

Vor der Ausgleichung werden diese verschiedenen Berechnungswege auch verschiedene Werte F ergeben, *nach* der Ausgleichung aber müssen alle Wege auf denselben Wert F führen. Man hat:

$$\textit{vor} \text{ der Ausgleichung } (F) = f_0 + f_1\,l_1 + f_2\,l_2 + f_3\,l_3 + f_4\,l_4 \tag{7}$$

$$\textit{nach} \text{ der Ausgleichung } F = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 \tag{8}$$

und hiefür kann man auch eine andere, sehr anschauliche Form finden, nämlich nach (18) § 42. S. 125:

$$\left.\begin{aligned} F = f_0 + f_1\,l_1 + f_2\,l_2 + f_3\,l_3 + f_4\,l_4 \\ + \quad r_1\,w_1 + r_2\,w_2 + r_3\,w_3 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

d. h. man kann den ausgeglichenen Wert der Funktion F nicht bloss mittelst der ausgeglichenen Werte x berechnen, sondern auch mittelst der Beobachtungswerte l selbst, indem man in letzterem Falle noch die Ergänzungsglieder $r_1 w_1$, $r_2 w_2$, $r_3 w_3$ zufügt. Wären alle w gleich Null, d. h. wären alle Bedingungsgleichungen durch die Beobachtungen l selbst befriedigt, so wäre keine Ausgleichung nötig, die x würden den l gleich zu nehmen sein, und die Formeln (7) und (9) würden in Folge des Wegfalls der w identisch.

Die Funktion F kann man auf verschiedenen Wegen aus den ausgeglichenen Werten x berechnen. Angenommen, man hätte statt (8) die Form gewählt:

$$F = f_0' + f_1' x_1 + f_2' x_2 + f_3' x_3 + f_4' x_4 \tag{10}$$

wobei solche Glieder, welche in (8) fehlen, vorkommen, und umgekehrt Glieder, welche in (8) sich finden, nicht vorhanden sein werden; dann müssten aber doch die Formeln (8) und (10) *denselben* Wert F geben, denn (8) und (10) können nur in Beziehung stehen durch irgend welche Bedingungsgleichungen zwischen den x; solche Gleichungen sind aber nach der Ausgleichung alle streng erfüllt.

Man kann weiter fragen, ob die beiden verschiedenen Formen (8) und (10) derselben Funktion F nach der Ausgleichung auch auf gleiches Gewicht P führen.

Allerdings werden bei verschiedenen Annahmen der f auch die Coefficienten $[af]$ $[bf]$ u. s. w., und damit auch die Übertragungs-Coefficienten r verschieden, dagegen in der Formel (2) § 42. S. 123, nämlich:

$$F = F_0 + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + F_4 l_4 \tag{11}$$

werden die Coefficienten F_1 F_2 F_3 F_4 wieder immer dieselben, denn es handelt sich hier um eine Funktion *aller* Beobachtungen l, und diese Funktion kann von der *Form*, in welcher sie ursprünglich als Funktion einzelner x auftrat, ebensowenig beeinflusst sein, als die Ausgleichungsresultate v von der *Form* beeinflusst sind, in welcher die Bedingungsgleichungen in die Ausgleichung eingehen.

In dem kleinen Beispiel von § 44., Ausgleichung der 3 Winkel eines Dreiecks, finden wir dieses bestätigt:

Die erste Funktionsform giebt S. 129:	Die zweite Funktionsform giebt S. 129:
(9) $F = x_1$	(9*) $F = 180° - x_2 - x_3$
$f_1 = 1 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0$	$f_1 = 0 \quad f_2 = -1 \quad f_3 = -1$
(12) $r = -\frac{1}{3}$	(12*) $r = +\frac{2}{3}$
(13) $F_1 = +\frac{2}{3}, F_2 = -\frac{1}{3}, F_3 = -\frac{1}{3}$	(13*) $F_1 = +\frac{2}{3}, F_2 = -\frac{1}{3}, F_3 = -\frac{1}{3}$

Ein *formeller* Beweis, dass die Coefficienten F in (11) unabhängig von der ersten Form der Funktion sind, ist nicht leicht zu führen; ein formeller Beweis ist aber auch kaum nötig, wenn man einsieht, dass sachlich die ausgeglichene Funktion F, indem sie nach (11) als eine Funktion aller Originalmessungen l sich darstellt, nur *einen* mittleren Fehler haben kann.

Wir betrachten noch das totale Differential von (11):

$$d\,F = F_1\, d\,l_1 + F_2\, d\,l_2 + F_3\, d\,l_3 + F_4\, d\,l_4 \tag{12}$$

$F_1\, d\,l_1$ stellt die Änderung der Funktion F vor, welche erzeugt wird, wenn man nur die Beobachtung l_1 um $d\,l_1$ ändert, und mit Beibehaltung aller anderen Beobachtungen l das ganze Ausgleichungsverfahren wiederholt.

Überhaupt zeigen die einzelnen Glieder von (12), welchen Beitrag jeder Beobachtungsfehler $d\,l$ zu dem Funktionsfehler $d\,F$ liefert. Dieser Beitrag ist von der *Form* der Funktionsberechnung unabhängig.

§ 48. Günstigste Gewichts-Verteilung.

Der Schreiber sche Satz.

Zum Abschluss der Ausgleichung bedingter Beobachtungen behandeln wir einen von General *Schreiber* gefundenen Satz in Bezug auf die Gewichtsverteilung bei bedingten Beobachtungen. Da dieser Satz bei trigonometrischen Ausgleichungen (Göttinger Basisnetz) gefunden wurde, und bei trigonometrischen Netzen seine Hauptanwendung findet, sprechen wir, im Interesse der Anschaulichkeit, den Satz selbst in trigonometrischer Anwendung aus:

> Wenn in einem Dreiecksnetz mit Bedingungs-Gleichungen *eine* Seite mit möglichst grossem Gewicht P bei konstanter Summe $[p]$ der Winkelmessungs-Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ bestimmt werden soll, so ist unter den hierzu möglichen Verteilungen der Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte p wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung jener einen Seite unumgänglich nötigen Winkel (oder Richtungen u. s. w.) beträgt, während die übrigen Gewichte p alle $=$ Null zu setzen sind.

Der allgemeine Satz behandelt an Stelle einer Dreiecksseite irgend eine Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen.

Das allereinfachste Beispiel hiefür besteht im arithmetischen Mittel mit ungleichen Gewichten.

Man habe n unabhängige Messungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2 \ldots p_n$. Die Messungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ stehen mit einer Unbekannten x in folgenden Beziehungen:

$$x - a_1\,l_1 = 0 \qquad x - a_2\,l_2 = 0 \ldots \qquad x - a_n\,l_n = 0,$$

dann hat man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$x = \frac{[p\,a\,l]}{[p\,a\,a]} \tag{1}$$

und das Gewicht von x ist:

$$P = [p\,a\,a] = p_1\,a_1^2 + p_2\,a_2^2 + \ldots p_n\,a_n^2.$$

Fragt man nach dem Maximum von P in Hinsicht auf die Gewichte p und auf die Gewichts-*Verteilung* bei konstanter Summe $[p]$, so sieht man ohne weiteres ein, dass P am grössten wird, wenn man von allen Coefficienten $a_1, a_2 \ldots a_n$ den *grössten* auswählt, ihm das Gewicht $[p]$ zuteilt und alle anderen $p = Null$ setzt. Ist z. B. der erste Wert a_1 der grösste, so wird hiernach:

$$P = [p]\,a_1^2 \tag{2}$$

Man wird also *nur* diejenige Messung l machen, welche in günstigster Weise zur Bestimmung von x führt, und alle anderen l gar nicht messen.

(Dieses gilt natürlich nicht für den Fall, dass man zur Vermeidung einseitiger Fehler doch die anderen l auch misst. Von solchen praktischen Nebenrücksichten soll hier und bei der folgenden Aufgabe nicht die Rede sein.)