Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 48. Günstigste Gewichtsverteilung. Der Schreiber sche Satz

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Überhaupt zeigen die einzelnen Glieder von (12), welchen Beitrag jeder Beobachtungsfehler $d\,l$ zu dem Funktionsfehler $d\,F$ liefert. Dieser Beitrag ist von der *Form* der Funktionsberechnung unabhängig.

§ 48. Günstigste Gewichts-Verteilung.

Der Schreiber sche Satz.

Zum Abschluss der Ausgleichung bedingter Beobachtungen behandeln wir einen von General *Schreiber* gefundenen Satz in Bezug auf die Gewichtsverteilung bei bedingten Beobachtungen. Da dieser Satz bei trigonometrischen Ausgleichungen (Göttinger Basisnetz) gefunden wurde, und bei trigonometrischen Netzen seine Hauptanwendung findet, sprechen wir, im Interesse der Anschaulichkeit, den Satz selbst in trigonometrischer Anwendung aus:

> Wenn in einem Dreiecksnetz mit Bedingungs-Gleichungen *eine* Seite mit möglichst grossem Gewicht P bei konstanter Summe $[p]$ der Winkelmessungs-Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ bestimmt werden soll, so ist unter den hierzu möglichen Verteilungen der Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte p wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung jener einen Seite unumgänglich nötigen Winkel (oder Richtungen u. s. w.) beträgt, während die übrigen Gewichte p alle $=$ Null zu setzen sind.

Der allgemeine Satz behandelt an Stelle einer Dreiecksseite irgend eine Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen.

Das allereinfachste Beispiel hiefür besteht im arithmetischen Mittel mit ungleichen Gewichten.

Man habe n unabhängige Messungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2 \ldots p_n$. Die Messungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ stehen mit einer Unbekannten x in folgenden Beziehungen:

$$x - a_1\,l_1 = 0 \qquad x - a_2\,l_2 = 0 \ldots \qquad x - a_n\,l_n = 0,$$

dann hat man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$x = \frac{[p\,a\,l]}{[p\,a\,a]} \tag{1}$$

und das Gewicht von x ist:

$$P = [p\,a\,a] = p_1\,a_1^2 + p_2\,a_2^2 + \ldots p_n\,a_n^2.$$

Fragt man nach dem Maximum von P in Hinsicht auf die Gewichte p und auf die Gewichts-*Verteilung* bei konstanter Summe $[p]$, so sieht man ohne weiteres ein, dass P am grössten wird, wenn man von allen Coefficienten $a_1,\ a_2 \ldots a_n$ den *grössten* auswählt, ihm das Gewicht $[p]$ zuteilt und alle anderen $p =$ *Null* setzt. Ist z. B. der erste Wert a_1 der grösste, so wird hiernach:

$$P = [p]\,a_1^2 \tag{2}$$

Man wird also *nur* diejenige Messung l machen, welche in günstigster Weise zur Bestimmung von x führt, und alle anderen l gar nicht messen.

(Dieses gilt natürlich nicht für den Fall, dass man zur Vermeidung einseitiger Fehler doch die anderen l auch misst. Von solchen praktischen Nebenrücksichten soll hier und bei der folgenden Aufgabe nicht die Rede sein.)

Ehe wir zu dem allgemeinen Satze übergehen, wollen wir noch ein einfaches Beispiel mit *einer* Bedingungsgleichung und 3 Beobachtungen vornehmen. Nach der Formel-Zusammenstellung von § 43. haben wir dafür folgende Gleichungen:

Bedingungsgleichung:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + w = 0 \tag{3}$$

Funktion:

$$F = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 \tag{4}$$

Übertragungs-Gleichung:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] r + \left[\frac{a\,f}{p}\right] = 0 \tag{5}$$

Gewichts-Coefficienten nach der Ausgleichung:

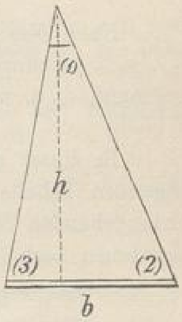
$$F_1 = f_1 + a_1 r_1 \quad , \quad F_2 = f_2 + a_2 r_2 \quad , \quad F_3 = f_3 + a_3 r_3 \tag{6}$$

Das Funktions-Gewicht nach der Ausgleichung P ist bestimmt durch:

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3} \tag{7}$$

Diese Formeln (3)—(7), welche für eine Ausgleichung mit *einer* Bedingungsgleichung gelten, wenden wir auf ein Beispiel an:

Fig. 1.



In nebenstehender Fig. 1. handelt es sich um die Bestimmung der Höhe h eines Dreiecks, in welchem die Basis b und drei Winkel (1) (2) (3) gemessen sind. Es besteht eine Bedingungs-Gleichung entsprechend der Gleichung (3):

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0$$

also: $a_1 = 1 \;\; , \;\; a_2 = 1 \;\; , \;\; a_3 = 1$

Die Funktion F ist in diesem Falle:

$$h = \frac{b}{\sin(1)} \sin(2) \sin(3)$$

Um diese Funktion linear zu machen, brauchen wir:

$$\frac{d\,h}{d\,(1)} = b \sin(2) \sin(3) \left(\frac{-\cos(1)}{\sin^2(1)}\right) = -h \operatorname{cotg}(1)$$

ebenso $$\frac{d\,h}{d\,(2)} = + h \operatorname{cotg}(2) \quad \text{und} \quad \frac{d\,h}{d\,(3)} = + h \operatorname{cotg}(3)$$

Für das Maximum der Funktion, auf das es uns hier ankommt, kann man alles Konstante bei Seite lassen, und als lineare Funktion F in dem Sinne der Gleichung (4) können wir daher nehmen:

$$F = -\operatorname{cotg}(1)\, x_1 + \operatorname{cotg}(2)\, x_2 + \operatorname{cotg}(3)\, x_3$$

Also wenn wir zur Abkürzung $\operatorname{cotg}(1) = c_1$ u. s. w. schreiben, haben wir:

$$f_1 = -c_1 \qquad f_2 = +c_2 \qquad f_3 = +c_3 \tag{8}$$

Die allgemeine Gleichung (5) giebt hiemit:

$$\left[\frac{1}{p}\right] r + \left(-\frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} + \frac{c_3}{p_3}\right) = 0$$

Auflösung:

$$r = \frac{\dfrac{c_1}{p_1} - \dfrac{c_2}{p_2} - \dfrac{c_3}{p_3}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} \tag{9}$$

Also nach (6): $$F_1 = -c_1 + r \qquad F_2 = c_2 + r \qquad F_3 = c_3 + r \tag{10}$$

und nach (7): $$\frac{1}{P} = \frac{(-c_1 + r)^2}{p_1} + \frac{(c_2 + r)^2}{p_2} + \frac{(c_3 + r)^2}{p_3} \tag{11}$$

Dieses kann mit (9) und (10) noch auf manche andere Formen gebracht werden, welche nachher bei (15) und (16) mitgeteilt werden. Die unmittelbar erhaltenen Formeln (9), (10), (11) genügen für unseren nächsten Zweck.

Es handelt sich darum, die Funktion (11) zu einem Minimum zu machen mit der Nebenbedingung:

$$[p] = p_1 + p_2 + p_3 = \text{konstant}. \tag{12}$$

Dieses wollen wir durch fortgesetzte Versuche erreichen mit einem Zahlenbeispiele, welches ungefähr der Fig. 1. entspricht, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) = 34^\circ & cotg\,34^\circ = c_1 = 1{,}483 \\ (2) = 68^\circ & cotg\,68^\circ = c_2 = 0{,}404 \\ (3) = 78^\circ & cotg\,78^\circ = c_3 = 0{,}213 \end{array}\right\} \tag{13}$$

In Betreff der Gewichte wollen wir zuerst annehmen $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $[p] = 3$, und damit geben die vorstehenden Formeln (9), (10), (11) folgendes:

$$r = 0{,}289 \qquad F_1 = -1{,}194 \qquad F_2 = +0{,}693 \qquad F_3 = +0{,}502$$

$$\frac{1}{P} = 2{,}1578. \text{ Absolute Summe } [\pm F] = 2{,}389.$$

Nach diesem haben wir eine *neue* Gewichts-Annahme gemacht, nämlich die p_1, p_2, p_3 proportional den F_1, F_2, F_3 und wieder auf die frühere Summe $[p] = 3$ gestimmt, d. h. neue Annahme:

$$p_1 = 1{,}50, \qquad p_2 = 0{,}87 \qquad p_3 = 0{,}63, \qquad [p] = 3{,}00.$$

In dieser Weise haben wir die Rechnung 6 mal wiederholt, wie aus der nachfolgenden Tabelle mit den Nummern 1. 2. 3. ... 7. zu ersehen ist; die in der Tabelle vorhergehenden Nummern 0. und 0,5. sind nachher mit neuen willkürlichen Gewichts-Annahmen noch hinzuberechnet worden.

Num.	p_1	p_2	p_3	$[p]$	r	F_1	F_2	F_3	$\left[\frac{FF}{p}\right]$
0.	0,0	1,5	1,5	3,0	1,483	0,000	1,887	1,696	5,292
0,5.	0,5	1,0	1,5	3,0	0,660	−0,823	1,064	0,873	2,995
1.	1,00	1,00	1,00	3,00	0,289	−1,194	+0,693	+0,502	2,158
2.	1,50	0,87	0,63	3,00	0,059	−1,424	+0,463	+0,272	1,715
3.	1,979	0,643	0,378	3,000	−0,0940	−1,577	+0,310	+0,119	1,443
4.	2,358	0,464	0,178	3,000	−0,1756	−1,659	+0,228	+0,037	1,287
5.	2,586	0,356	0,058	3,000	−0,2072	−1,690	+0,197	+0,006	1,214
6.	2,679	0,312	0,009	3,000	−0,2128	−1,696	+0,191	+0,000	1,191
7.	2,696	0,304	0,000	3,000	−0,2130	−1,696	+0,191	+0,000	1,187

Die Reihe 1. bis 7. zeigt ganz schöne Konvergenz, und führt schliesslich zu der günstigsten Gewichts-Verteilung:

$$p_1 = 2{,}696 \qquad p_2 = 0{,}304 \qquad p_3 = 0{,}000 \text{ mit } [p] = 3{,}000 \tag{14}$$

Es wird also $p_3 = 0$, d. h. man soll in diesem Falle den dritten Winkel (3) gar nicht messen.

Wenn wir dieses $p_3 = 0$ in (9), (10), (11) einsetzen wollen, so entsteht die formelle Schwierigkeit, dass $r = \frac{0}{0}$ erscheint, es ist deshalb nötig, zuvor (11) in andere Gestalt zu bringen. Man wird sich leicht überzeugen können, dass folgende neue Formen für (11) algebraisch richtig sind:

$$\frac{1}{P}=\frac{c_1^2}{p_1}+\frac{c_2^2}{p_2}+\frac{c_3^2}{p_3}-\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}\left(\frac{c_1}{p_1}-\frac{c_2}{p_2}-\frac{c_3}{p_3}\right)^2 \tag{15}$$

$$\frac{1}{P}=\frac{p_1\,(c_3-c_2)^2+p_2\,(c_1+c_3)^2+p_3\,(c_1+c_2)^2}{p_1\,p_2+p_1\,p_3+p_2\,p_3} \tag{16}$$

Hier kann man $p_3 = 0$ setzen, wodurch man erhält:

$$\left(\frac{1}{P}\right)_{min}=\frac{1}{P_{max}}=\frac{(c_2-c_3)^2}{p_2}+\frac{(c_1+c_3)^2}{p_2} \tag{17}$$

Damit ist unser Zweck, ein einfaches Beispiel der allgemeinen Theorie des Schreiber schen Satzes vorauszuschicken, erreicht, auch haben wir die Formeln (15)—(17) zum Teil deswegen noch zugefügt, weil wir diesen Formeln auch sonst noch in der Geodäsie begegnen werden. —

Nun zur allgemeinen Theorie des Satzes von der günstigsten Gewichts-Verteilung übergehend, benützen wir die allgemeine Formen-Zusammenstellung von § 43. und betrachten dabei n Beobachtungen mit n Gewichten $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$ und q Bedingungsgleichungen.

(Die Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche hier $= q$ gesetzt ist, war früher in § 39. S. 119 mit r bezeichnet, was aber nun vermieden wird, wegen der Kollision mit den Übertragungs-Coefficienten r.)

Eine Funktion, die wir der Kürze wegen mit y bezeichnen, soll möglichst klein gemacht werden:

$$y=\frac{1}{P}=\frac{F_1{}^2}{p_1}+\frac{F_2{}^2}{p_2}\ldots+\frac{F_n{}^2}{p_n}=\text{Minimum} \tag{18}$$

wobei die Nebenbedingung besteht:

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=[p] \doteq \text{konstant} \tag{19}$$

Die F_1, F_2 u. s. w. sind Funktionen der p nach den Gleichungen (13) und (12) § 43. S. 127, d. h. die F_1, $F_2 \ldots$ sind zunächst Funktionen der r und die r selbst sind durch ein Gleichungssystem (12) S. 127 mit den p verbunden.

Indem man nun zunächst y als Funktion der r betrachtet, hat man

$$y=\frac{(f_1+a_1\,r_1+b_1\,r_2+c_1\,r_3)^2}{p_1}+\frac{(f_2+a_2\,r_1+b_2\,r_2+c_2\,r_3)^2}{p_2}+\ldots$$

$$\frac{d\,y}{d\,r_1}=\frac{2\,(f_1+a_1\,r_1+b_1\,r_2+c_1\,r_3)}{p_1}\,a_1+\frac{2\,(f_2+a_2\,r_1+b_2\,r_2+c_2\,r_3)}{p_2}\,a_2+\ldots$$

$$\frac{d\,y}{d\,r_1}=2\left[\frac{a\,f}{p}\right]+2\left[\frac{a\,a}{p}\right]r_1+2\left[\frac{a\,b}{p}\right]r_2+\ldots$$

Dieses ist aber $= 0$ nach (12) S. 127 und ebenso verhält es sich mit den übrigen Ableitungen von y nach r; man hat also zusammen:

$$\frac{d\,y}{d\,r_1}=0 \qquad \frac{d\,y}{d\,r_2}=0 \quad \ldots \quad \frac{d\,y}{d\,r_q}=0 \tag{20}$$

Nun stellen wir die Ableitungen von (18) nach den Veränderlichen p selbst so dar:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\,y}{d p_1}&=-\frac{F_1{}^2}{p_1{}^2}+\frac{d\,y}{d\,r_1}\frac{d\,r_1}{d p_1}+\frac{d\,y}{d\,r_2}\frac{d\,r_2}{d p_1}+\frac{d\,y}{d\,r_3}\frac{d\,r_3}{d p_1}+\ldots\\
\frac{d\,y}{d p_2}&=-\frac{F_2{}^2}{p_2{}^2}+\frac{d\,y}{d\,r_1}\frac{d\,r_1}{d p_2}+\frac{d\,y}{d\,r_2}\frac{d\,r_2}{d p_2}+\frac{d\,y}{d\,r_3}\frac{d\,r_3}{d p_2}+\ldots\\
&\text{u. s. w. } \frac{d\,y}{d p_3} \text{ und } \frac{d\,y}{d p_4}\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Dieses System geht aber wegen (20) in die einfache Form über:

$$\frac{dy}{dp_1} = -\frac{F_1^2}{p_1^2}\,, \quad \frac{dy}{dp_2} = -\frac{F_2^2}{p_2^2}\,, \quad \frac{dy}{dp_3} = -\frac{F_3^2}{p_3^2}\,, \quad \frac{dy}{dp_n} = -\frac{F_n^2}{p_n^2} \tag{22}$$

Und nun erscheint das totale Differential von (18) in dieser einfachen Form:

$$dy = d\left(\frac{1}{P}\right) = -\left(\frac{F_1^2}{p_1^2}\,dp_1 + \frac{F_2^2}{p_2^2}\,dp_2 + \frac{F_n^2}{p_n^2}\,dp_n\right) \tag{23}$$

Wenn man dieses (23) mit (18) vergleicht, so kann man den darin liegenden gefundenen Satz in Worten so aussprechen: das Differential von y in Bezug auf die Gewichte p wird wegen der Ausgleichung, in Hinsicht auf die F_1, F_2, ... F_n, welche thatsächlich Funktionen der p sind, gerade so erhalten, *als ob die F_1, F_2... von den p unabhängig wären.*

Eine Nebenbemerkung ist noch zu machen zu (21) insofern, als möglicherweise einzelne der $\frac{dr}{dp}$ unendlich werden können, so dass $\frac{dy}{dr}\frac{dr}{dp} = 0 \,.\, \infty$ erscheint, und nicht ohne weiteres fortgelassen werden kann. Allein die Produkte $\frac{dy}{dr}\frac{dr}{dp}$ werden doch stets gleich Null, denn die $\frac{dy}{dr}$ sind für beliebige Werte von p gleich Null, dagegen die $\frac{dr}{dp}$ sind nicht für beliebige Werte von p unendlich, denn die r sind ja rationale Funktionen der p. Will man einen in unbestimmter Form erscheinenden Wert $\frac{dy}{dr_1}\frac{dr_1}{dp_\alpha}$ finden, so hat man den $p_1\, p_2 \ldots p_n$ kleine Änderungen zu geben, so dass $\frac{dr_1}{dp_\alpha}$ nicht mehr unendlich ist, und nun hat man diese Änderungen Null werden zu lassen und zu untersuchen, welchem Wert sich dabei das Produkt nähert. Da aber der erste Faktor $\frac{dy}{dr}$ für beliebige Werte der p verschwindet, so muss das Produkt immer Null, also auch der Grenzwert Null sein. Der besondere Fall, dass ein $\frac{dr}{dp} = \infty$ wird, tritt z. B. ein bei unserem Beispiel mit Fig. 1. S. 139. Wenn man hier r nach (9) S. 139 als Funktion der p betrachtet, etwa nach p_1 differentiiert, so wird mit $p_1 = 0$ der Wert $\frac{dr}{dp} = \infty$ werden. Trotzdem ist das Produkt $\frac{dy}{dr}\frac{dr}{dp}$ nach der vorstehenden Auseinandersetzung als verschwindend zu betrachten.

Nachdem die wichtige Beziehung (23) erkannt ist, wird alles übrige leicht. Die konstante Gewichtssumme (19) giebt $dp_1 + dp_2 + \ldots + dp_n = 0$ oder

$$dp_n = -dp_1 - dp_2 - dp_3 \ldots$$

und damit wird (23):

$$dy = \left(\frac{F_1^2}{p_1^2} - \frac{F_n^2}{p_n^2}\right)dp_1 - \left(\frac{F_2^2}{p_2^2} - \frac{F_n^2}{p_n^2}\right)dp_2 - \left(\frac{F_3^2}{p_3^2} - \frac{F_n^2}{p_n^2}\right)dp_3 - \ldots$$

und da nun die dp_1, dp_2, dp_3 unabhängig sind (nach Einführung von $[dp] = 0$), kann die letzte Gleichung nur dadurch allgemein befriedigt werden, dass die Coefficienten von dp_1, dp_2, dp_3 einzeln $= 0$ gesetzt werden; und daraus folgt:

$$\frac{F_1^2}{p_1^2} = \frac{F_2^2}{p_2^2} = \frac{F_3^2}{p_3^2} = \ldots \frac{F_n^2}{p_n^2}$$

oder auch

$$\frac{F_1}{p_1} = \frac{F_2}{p_2} = \ldots = \frac{F_n}{p_n} = k \tag{24}$$

d. h. die F müssen den p proportional sein.

Um das Minimum von y bei konstanter Gewichtssumme $[p]$ weiter zu verfolgen, führen wir für die p neue Bezeichnungen ein:

$$p_1 = x_1^2 \qquad p_2 = x_2^2 \qquad p_3 = x_3^2$$

Das geschieht, weil die p notwendig positiv sein müssen, und daher sobald sie Null sind, nicht mehr frei verändert werden können. Es besteht also die Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 - c = 0, \text{ wo } c \text{ konstant.}$$

Nach § 38. hat man diese Gleichung mit einer unbestimmten Korrelate λ multipliziert zu der ursprünglichen Funktion y in (18) hinzu zu addieren und dann alles nach $p_1\, p_2 \ldots p_n$ zu differentiieren, wie wenn die p unabhängig wären, worauf endlich alle Ableitungen nach den x einzeln $= 0$ zu setzen sind. Dieses giebt:

$$\frac{d\left(\frac{F_1^2}{x_1^2} + \lambda\, x_1^2\right)}{d\,x_1} = 0 \qquad \frac{d\left(\frac{F_2^2}{x_2^2} + \lambda\, x_2^2\right)}{d\,x_2} = 0 \text{ u. s. w.}$$

$$-2\,\frac{F_1^2}{x_1^3} + 2\,\lambda\,x_1 = 0 \qquad -2\,\frac{F_2^2}{x_2^3} + 2\,\lambda\,x_2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

oder

$$\left(\frac{F_1^2}{p_1^2} - \lambda\right) x_1 = 0 \qquad \left(\frac{F_2^2}{p_2^2} - \lambda\right) x_2 = 0 \text{ u. s. w.} \tag{25}$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn entweder $\frac{F_1^2}{p_1^2} = \lambda$ oder $x_1 = 0$ u. s. w. Dieses gilt für jeden Wert $p_1 = x_1^2$ oder $p_2 = x_2^2$ u. s. w.

Zwischen den $\frac{F_1}{p_1}, \frac{F_2}{p_2} \ldots$ bestehen lineare homogene Bedingungsgleichungen, welche nach (12) und (13) § 43. S. 127 für n Elemente $p_1\, p_2 \ldots p_n$ und für q Bedingungsgleichungen in diese Form gebracht werden können:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{F_1}{p_1}\,a_1 + \frac{F_2}{p_2}\,a_2 + \ldots \frac{F_n}{p_n}\,a_n &= 0 \\
\frac{F_1}{p_1}\,b_1 + \frac{F_2}{p_2}\,b_2 + \ldots \frac{F_n}{p_n}\,b_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\frac{F_1}{p_1}\,q_1 + \frac{F_2}{p_2}\,q_2 + \ldots \frac{F_n}{p_n}\,q_n &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Man kann also von den Gewichten $p_1\, p_2 \ldots p_n$ nur $n - q$ willkürlich annehmen, die übrigen sind dann infolge der Gleichungen (26) auch bestimmt. Es können also (spezielle Fälle ausgenommen), höchstens $n - q$ von den Gleichungen (25), mit $\frac{F^2}{p^2} = \lambda$, erfüllt sein, z. B. für $p_1\,,\, p_2 \ldots p_{n-q}$, und folglich muss für die übrigen Werte von p der *zweite* Faktor der Gleichungen (25) gleich Null sein. Es sind also nur $n - q$ Gewichte von Null verschieden, d. h. ebenso viele als zur Bestimmung der Funktion F selbst nötig sind. Da sich für die Grössen $\frac{F\alpha}{p\alpha}$ für $\alpha = n - q + 1$ bis $\alpha = n$ aus den Gleichungen (26) endliche Werte ergeben, so müssen auch die entsprechenden F_{n-q+1} bis F_n gleich Null sein. Das Minimum von $\frac{1}{P}$ ergiebt sich:

$$\left(\frac{1}{P}\right)_{min} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{F_{n-q}^2}{p_{n-q}} = \lambda\,(p_1 + p_2 + p_{n-q}) = \lambda\,c \tag{27}$$

und da zugleich der absolute Betrag von $F\alpha$ gleich $\sqrt{\lambda}\;p\alpha$ ist für $\alpha = 1, 2 \ldots n - q$, so ist die Summe der absoluten Beträge von $F_1, F_2 \ldots F_n$ gleich $\sqrt{\lambda}\; c$ und demnach die Quadratwurzel aus $\frac{c}{P}$ gleich der Summe der absoluten Beträge F.