Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Die günstigste Gewichtsverteilung kann also gefunden werden, wenn man in den Gleichungen (26) von den Grössen F_1, F_2 ... F_n eine Anzahl q gleich Null setzt und daraus die übrigen F berechnet. Von den $\frac{n \,.\, n-1 \,.\,.\,.\,.\,.\, n-q+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, q}$ verschiedenen Fällen hätte man denjenigen auszuwählen, welcher die kleinste Absolutsumme der F liefert und die p, welche den gleichen Index mit den nicht verschwindenden F besitzen, den absoluten Beträgen derselben proportional zu setzen. Der Proportionalitätsfaktor ergiebt sich aus dem vorgeschriebenen Wert von $[p]$.

Was die wirkliche Ausrechnung einer Gewichtsverteilung betrifft, so wird man wohl immer am besten nach Anleitung unseres kleinen Beispiels (8)—(14) S. 139—140 so verfahren, dass man versuchsweise eine Gewichtsverteilung annimmt, die F ausrechnet und mit neuen Gewichten proportional den erstmals erhaltenen F die Rechnung wiederholt; konvergieren einzelne Glieder deutlich gegen Null, so wird man alsbald die betreffenden p völlig $=$ Null setzen u. s. w.

Wenn eine solche Aufgabe an und für sich sachlich betrachtet eine wesentlich ungleiche günstige Gewichtsverteilung vermuten lässt, so wird auch die successive Näherungsrechnung mit den F und p rasch konvergieren, auch werden dann wohl schon *vor* Beginn aller Rechnung Fingerzeige vorhanden sein, in welchem Sinne etwa Gewichtsverstärkungen oder Gewichtsverringerungen bis zur Null, am Platze sein mögen.

Wenn dagegen die Versuchsrechnungen *nicht* konvergieren, so wird man es mit einem Falle zu thun haben, in welchem ungleiche Gewichtsverteilung überhaupt nicht am Platze ist.

Der „Schreiber sche Satz" über günstigste Gewichtsverteilung ist zuerst von General Schreiber selbst mitgeteilt worden in der „Zeitschr. f. Verm. 1882, S. 129—161", insbesondere S. 141. Jene Abhandlung geht von der Anschauung aus, dass die F Funktionen der r sind und dass dem Maximum des Gewichtes P ein Minimum der absoluten Summe $[\pm F]$ entspricht. Wenn hiernach die einzelnen F bestimmt sind, werden die p proportional dieser F genommen.

Hiezu citieren wir auch „Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 641—649 und 1889, S. 57—59 und endlich 1890, S. 21—24" neuer Beweis des Satzes, von *Runge*, den wir im vorstehenden (18)—(27) mitgeteilt haben.

Früher ist auch eine andere Abhandlung über diesen Gegenstand erschienen: „Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, von *H. Bruns*, XIII. Band der Abh. d. m. ph. Cl. der Königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften Nr. VII, S. 517 bis 563, Leipzig 1886." Diese Abhandlung enthält eine Verallgemeinerung der Schreiber schen Aufgabe, sie beschäftigt sich nicht bloss mit *einer* Funktion, deren Gewicht ein Maximum werden soll bei konstanter Gewichtssumme $[p]$, sondern mit einem Komplexe von mehreren Funktionen.

§ 49—55. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Die bisher von uns behandelten Ausgleichungsformen, nämlich 1) direkte Beobachtungen mit dem arithmetischen Mittel, 2) vermittelnde Beobachtungen und 3) bedingte Beobachtungen — dieses waren in der Entstehungszeit der M. d. kl. Q. die einzigen behandelten Aufgaben. *Gauss* ging in seinem Hauptwerke der „*theoria combinationis*" 1823—1826 nicht weiter, und Gerling kennt noch 1843 in seinem Lehrbuch nichts weiteres.

Jedoch hatte inzwischen das geodätische Bedürfnis noch eine höhere Ausgleichungsform hervorgebracht: „vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen."

Bessel hat in seiner „Gradmessung in Ostpreussen" 1838 diese Aufgabe zuerst gestellt, in der Hauptsache gelöst und auf Dreiecksnetz-Ausgleichung mit unvollständigen Richtungssätzen angewendet, aber Gewichts- und Fehlerberechnungen nicht dazu gegeben.

Die ganze Aufgabe, Ausgleichung *und Genauigkeitsbestimmungen* für vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen scheint zum erstenmale gelöst worden zu sein von *J. Zech* (Einladungsschrift zur Königs-Geburtstagsfeier 1857, Tübingen bei Fues). Dieses war eine theoretische Lösung; die Anwendung der Aufgabe auf Geodäsie wurde bald von den damaligen Geodäten ersten Rangs in Angriff genommen, namentlich von *Andrae* in Kopenhagen, *Hansen* *) in Gotha und in der Entstehungszeit der internationalen Erdmessung, nach 1862, spielte diese Aufgabe eine wichtige Rolle in der damaligen geodätischen (häufig polemischen) Litteratur.

In Preussen hat die fragliche Aufgabe bei der Landesaufnahme etwa von 1870—1880 wichtige Dienste geleistet, weshalb wir die entsprechenden Formeln nachher in § 55. zuziehen werden.

Unsere in den nachfolgenden §§ 49.—53. vorgetragene Behandlung der Aufgabe ist unabhängig von den zitierten Autoritäten nach eigenem Gange entwickelt.

§ 49. Eliminierung der Bedingungsgleichungen.

Eine erste Behandlung der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen besteht darin, dass man die Bedingungsgleichungen eliminiert, und da man auf diesem Wege zugleich den klarsten Einblick in die Bestimmung des mittleren Fehlers gewinnt, stellen wir diese praktisch weniger wichtige Auflösungsform voran:

Man hat n unmittelbare Beobachtungen l, welche mit u Unbekannten $x\ y\ z\ t$ durch n Fehlergleichungen verbunden sind. Ausserdem bestehen zwischen den Unbekannten streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen in der Anzahl r.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1\,t + \ldots + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2\,t + \ldots + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + d_3\,t + \ldots + l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \underbrace{a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + d_n\,t + \ldots}_{\text{Anzahl} = u} + l_n \end{array} \right\} \qquad (1)$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1\,x + A_2\,y + A_3\,z + A_4\,t + \ldots = 0 \\ B_0 + B_1\,x + B_2\,y + B_3\,z + B_4\,t + \ldots = 0 \\ \quad \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = u} \end{array} \right\} \qquad 2)$$

Ausgleichungsbedingung:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + \ldots v_n^2 = \text{Minimum} \qquad (3)$$

Man kann diese Ausgleichung auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ohne Bedingungsgleichungen zurückführen, indem man mittelst der Bedingungsgleichungen (2) eine Anzahl r der u Unbekannten eliminiert. Dieses geschieht so:

Man kann die Gleichungen (2) so aufgelöst denken:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} x = A_1'\,z + A_2'\,t + \ldots \\ y = B_1'\,z + B_2'\,t + \ldots \\ \quad \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = u - r} \end{array} \right\} \qquad (4)$$

*) Die Hansen schen Abhandlungen „von der Methode der kleinsten Quadrate" haben wir behandelt und kommentiert in Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882, I. S. 53—59.

Setzt man diese Ausdrücke in (1), so soll erhalten werden:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = c_1'\,z + d_1'\,t + \ldots l_1' \\ v_2 = c_2'\,z + d_2'\,t + \ldots l_2' \\ v_3 = c_3'\,z + d_3'\,t + \ldots l_3' \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_n = \underbrace{c_n'\,z + d_n'\,t + \ldots}_{\text{Anzahl} = u - r} l_n' \end{array} \right\} \qquad (5)$$

Man hat es also nun mit einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zu thun, welche nach den früheren Regeln zu behandeln ist. Nach der Ausgleichung hat man den mittleren Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-(u-r)}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(n-u)+r}} \qquad (6)$$

Zwischen n, u und r bestehen Beziehungen:

Da die Bedingungsgleichungen (2) streng erfüllt sein müssen, ohne dass dadurch die $x\ y\ z\ t$ völlig bestimmt sein dürfen, so muss sein:

$$u > r \qquad (7)$$

und wenn die Gleichungen (5), welche nach der Elimination der r Unbekannten übrig bleiben, noch den Charakter von „Fehlergleichungen“ haben sollen, so muss auch sein:

$$n > u - r \qquad (8)$$

Wegen (7) und (8) wird also der Nenner $n-(u-r)$ stets eine positive Zahl sein.

Wenn nur eine *kleine* Zahl von Bedingungsgleichungen (2) vorliegt, kann dieses Verfahren wohl am Platz sein, und die Auswahl der zu eliminierenden Unbekannten wird dann von der Natur der jeweiligen Aufgabe abhängen.

Für Triangulierungsausgleichungen im Grossen ist dagegen eine andere durchaus symmetrisch angeordnete Auflösung üblich, welche wir im folgenden behandeln werden.

Unter allen Umständen gilt aber die Fehlerformel (6), mit dem Nenner $n-u+r$, weil die Fehlerberechnung von der *Form* der Ausgleichung unabhängig ist.

§ 50. Trennung der Ausgleichung in zwei Teile, und erste Ausgleichung.

Wir nehmen die im vorigen § 49. beschriebenen Verhältnisse wieder vor, schreiben aber der Übersichtlichkeit wegen immer nur $n = 4$, $u = 3$, $r = 2$, d. h. wir nehmen 4 Beobachtungen, 3 Unbekannte $x\ y\ z$, und 2 Bedingungsgleichungen.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + l_3 \\ v_4 = \underbrace{a_4\,x + b_4\,y + c_4\,z}_{\text{Anzahl} = u} + l_4 \end{array} \right\} \qquad (1)$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1\,x + A_2\,y + A_3\,z = 0 \\ B_0 + \underbrace{B_1\,x + B_2\,y + B_3\,z}_{\text{Anzahl} = u} = 0 \end{array} \right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{lll} n > u - r & \text{und} & u > r \\ (n = 4 \quad , & u = 3 \quad , & r = 2) \end{array}\right\} \tag{2}$$

Ausgleichungsprinzip:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \text{Minimum} \tag{4}$$

Wenn man die Fehlergleichungen (1) ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (2) für sich behandelt, so geben sie die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x_0 + [b\,b]\,y_0 + [b\,c]\,z_0 + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x_0 + [b\,c]\,y_0 + [c\,c]\,z_0 + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Wir haben dabei $x_0\ y_0\ z_0$ geschrieben, zur Unterscheidung von denjenigen Ergebnissen $x\ y\ z$, welche man durch die Gesamtausgleichung erhalten wird.

Diese Gleichungen (5) löst man nach $x_0\ y_0\ z_0$ auf, und zugleich kann man alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. nach § 28. oder § 33. bestimmen; diese Gewichts-Coefficienten werden im zweiten Teil der Ausgleichung gebraucht werden.

Die $x\ y\ z$ denken wir in je zwei Teile zerlegt:

$$x = x_0 + \delta\,x \qquad y = y_0 + \delta\,y \qquad z = z_0 + \delta\,z \tag{6}$$

Damit nimmt eine einzelne Fehlergleichung:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l$$

folgende Form an:

$$v = a\,(x_0 + \delta\,x) + b\,(y_0 + \delta\,y) + c\,(z_0 + \delta\,z) \quad + l$$

$$v = \underbrace{a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + l}_{v'} \quad + \underbrace{a\,\delta\,x + b\,\delta\,y + c\,\delta\,z}_{v''}$$

$$v = \qquad v' \qquad + \qquad v''$$

d. h. für den ersten Teil der Ausgleichung hat man:

$$v' = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + l \tag{7}$$

und für den zweiten Teil der Ausgleichung:

$$v'' = a\,\delta\,x + b\,\delta\,y + c\,\delta\,z \tag{8}$$

für beide Ausgleichungen zusammen:

$$v = v' + v'' \tag{9}$$

Hiernach ist:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] + 2\,[v'\,v''] \tag{10}$$

Hievon ist aber $[v'\,v''] = 0$, wie sich leicht beweist, indem man (8) mit v' multipliziert:

$$[v'\,v''] = [a\,v']\,(1) + [b\,v']\,(2) + [c\,v']\,(3) \tag{11}$$

Es ist aber nach (7) und (5):

$$[a\,v'] = [a\,a]\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0$$

und ebenso sind $[b\,v'] = 0$ und $[c\,v'] = 0$, also im ganzen $[v'\,v''] = 0$, und (10) reduziert sich auf:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] \tag{12}$$

Nachdem somit die Summe $[v\,v]$, deren Minimum erzielt werden soll, in zwei Teile $[v'\,v']$ und $[v''\,v'']$ zerlegt ist, von denen der erste Teil $[v'\,v']$ bereits ein relatives Minimum ist, handelt es sich nur noch darum, auch den zweiten Teil $[v''\,v'']$ möglichst klein zu machen.

Da $x\ y\ z$ die unabhängigen Unbekannten der Ausgleichung sind, bestehen nach (4) die Bedingungen:

$$\frac{\partial [v\,v]}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial [v\,v]}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial [v\,v]}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

Betrachten wir die erste Bedingung näher, so kann man sie so schreiben:

$$\frac{\partial [v\,v]}{\partial x} = \frac{\partial ([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial (x_0 + \delta\,x)} = 0$$

x_0 ist eine Näherungsannahme des ersten Teils, welche für den zweiten Teil als konstant gilt, folglich für den zweiten Teil:

$$0 = \frac{\partial ([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial\,\delta\,x} = \frac{\partial [v'\,v']}{\partial\,\delta\,x} + \frac{\partial [v''\,v'']}{\partial\,\delta\,x} \tag{14}$$

Der erste Teil giebt $\delta\,x = 0$, denn das Minimum von $[v'\,v']$ wurde eben dadurch erzielt, dass $x = x_0$, also $\delta\,x = 0$ gemacht wurde. Gleiches gilt bei y und z, es bleibt also nur noch das Schlussglied von (14) gleich Null zu machen, oder zugleich mit y und z:

$$0 = \frac{\partial [v''\,v'']}{\partial\,\delta\,x} \qquad 0 = \frac{\partial [v''\,v'']}{\partial\,\delta\,y} \qquad 0 = \frac{\partial [v''\,v'']}{\partial\,\delta\,z} \tag{15}$$

d. h. in Worten: Der zweite Teil der Ausgleichung wird von dem ersten Teil unabhängig, es sind aber die Beziehungen, welche zwischen den v'' und den $\delta\,x, \delta\,y, \delta\,z$ bestehen, zu berücksichtigen.

Die Trennung der $x\ y\ z$ in $x_0 + \delta\,x$, $y_0 + \delta y$, $z_0 + \delta\,z$ lässt sich auch in den Bedingungsgleichungen (2) ausdrücken. Diese geben nämlich:

$$\left.\begin{aligned} A_0 + A_1 (x_0 + \delta\,x) + A_2 (y_0 + \delta\,y) + A_3 (z_0 + \delta\,z) = 0 \\ B_0 + B_1 (x_0 + \delta\,x) + B_2 (y_0 + \delta\,y) + B_3 (z_0 + \delta\,z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Setzt man also:

$$\left.\begin{aligned} A_0 + A_1\,x_0 + A_2\,y_0 + A_3\,z_0 = w_1 \\ B_0 + B_1\,x_0 + B_2\,y_0 + B_3\,z_0 = w_2 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

so ergiebt die Vergleichung von (16) mit (2):

$$\left.\begin{aligned} A_1\,\delta\,x + A_2\,\delta\,y + A_3\,\delta\,z + w_1 = 0 \\ B_1\,\delta\,x + B_2\,\delta\,y + B_3\,\delta\,z + w_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Das sind die Bedingungsgleichungen für den zweiten Teil der Ausgleichung, zu dem wir nun übergehen.

§ 51. Korrelatenausgleichung des zweiten Teils.

Wir haben uns überzeugt, dass $[v''\,v''] =$ Minimum zu machen ist mit den Nebenbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} A_1\,\delta\,x + A_2\,\delta\,y + A_3\,\delta\,z + w_1 = 0 \\ B_1\,\delta\,x + B_2\,\delta\,y + B_3\,\delta\,z + w_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wenn diese Bedingungsgleichungen (1) sich statt auf die Verbesserungen $\delta\,x$, $\delta\,y$, $\delta\,z$ direkt auf die v'' bezögen, so *würde* man nach der Korrelatenmethode kurz so verfahren:

$$\begin{aligned} [A\,A]\,k_1 + [A\,B]\,k_2 + w_1 = 0 \\ [A\,B]\,k_1 + [B\,B]\,k_2 + w_2 = 0 \end{aligned}$$

Dieses ist aber nicht der Fall, die $\delta\,x$, $\delta\,y$, $\delta\,z$ stehen vielmehr zu den v'' in ähnlichen Beziehungen wie die $x_0\ y_0\ z_0$ zu den l.

Nun weiss man nach (6) § 28. S. 88, aus der Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, dass die allgemeine Auflösung der Normalgleichungen des ersten Teils in folgenden Formeln enthalten ist:

$$\left.\begin{aligned} -x_0 &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ -y_0 &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ -z_0 &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und zwar gehören hiezu Fehlergleichungen von dieser Form:

$$v' = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + l \tag{3}$$

Dagegen haben die Fehlergleichungen der Gesamtausgleichung diese Form:

$$v = v' + v'' = a(x_0 + \delta x) + b(y_0 + \delta y) + c(z_0 + \delta z) + l$$

oder

$$v' = a(x_0 + \delta x) + b(y_0 + \delta y) + c(z_0 + \delta z) + l - v'' \tag{3*}$$

Vergleicht man dieses (3*) mit (3), so erkennt man, dass der neuen Fehlergleichung (3*) auch ein neues System (2*) entsprechen muss, dessen erste Gleichung ist:

$$-(x_0 + \delta x) = \alpha_1 (l_1 - v_1'') + \alpha_2 (l_2 - v_2'') + \alpha_3 (l_3 - v_3'') + \alpha_4 (l_4 - v_4'') \tag{2*}$$

was mit (2) verglichen folgendes giebt:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \alpha_1 v_1'' + \alpha_2 v_2'' + \alpha_3 v_3'' + \alpha_4 v_4'' \\ \delta y &= \beta_1 v_1'' + \beta_2 v_2'' + \beta_3 v_3'' + \beta_4 v_4'' \\ \delta z &= \gamma_1 v_1'' + \gamma_2 v_2'' + \gamma_3 v_3'' + \gamma_4 v_4'' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Ausdrücke (4) hat man in die Bedingungsgleichungen (1) einzusetzen, wodurch Gleichungen entstehen, welche sich auf die Verbesserungen v'' beziehen, und folgende Form haben:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}_1 v_1'' + \mathrm{I}_2 v_2'' + \mathrm{I}_3 v_3'' + \mathrm{I}_4 v_4'' + w_1 = 0 \\ \mathrm{II}_1 v_1'' + \mathrm{II}_2 v_2'' + \mathrm{II}_3 v_3'' + \mathrm{II}_4 v_4'' + w_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Coefficienten I und II haben vermöge ihrer Entstehung aus (4) und (1) folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= A_1\alpha_1 + A_2\beta_1 + A_3\gamma_1 & \mathrm{II}_1 &= B_1\alpha_1 + B_2\beta_1 + B_3\gamma_1 \\ \mathrm{I}_2 &= A_1\alpha_2 + A_2\beta_2 + A_3\gamma_2 & \mathrm{II}_2 &= B_1\alpha_2 + B_2\beta_2 + B_3\gamma_2 \\ \mathrm{I}_3 &= A_1\alpha_3 + A_2\beta_3 + A_3\gamma_3 & \mathrm{II}_3 &= B_1\alpha_3 + B_2\beta_3 + B_3\gamma_3 \\ \mathrm{I}_4 &= A_1\alpha_4 + A_2\beta_4 + A_3\gamma_4 & \mathrm{II}_4 &= B_1\alpha_4 + B_2\beta_4 + B_3\gamma_4 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nun ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Ausgleichung direkter bedingter Beobachtungen, d. h. mit Einführung der Korrelaten k_1 und k_2 zu den Bedingungsgleichungen (5) hat man die Normalgleichungen zu bilden:

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{I\,I}]\,k_1 + [\mathrm{I\,II}]\,k_2 + w_1 = 0 \\ [\mathrm{I\,II}]\,k_1 + [\mathrm{II\,II}]\,k_2 + w_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

worauf dann die einzelnen v'' gefunden werden können, nämlich, nach Vertikalreihen in (5):

$$\left.\begin{aligned} v_1'' &= \mathrm{I}_1 k_1 + \mathrm{II}_1 k_2 \\ v_2'' &= \mathrm{I}_2 k_1 + \mathrm{II}_2 k_2 \\ v_3'' &= \mathrm{I}_3 k_1 + \mathrm{II}_3 k_2 \\ v_4'' &= \mathrm{I}_4 k_1 + \mathrm{II}_4 k_2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Verfolgt man diesen Rechnungsgang näher, so findet man durch Quadrieren und Multiplizieren der Coefficienten I und II die Summen-Coefficienten der Normalgleichungen (7) wie folgt:

$$\begin{array}{ll}
[\mathrm{I\,I}] = & [\mathrm{I\,II}] = \qquad\qquad (9\,\mathrm{a}) \\
A_1 A_1[\alpha\alpha] + 2A_1 A_2[\alpha\beta] + 2A_1 A_3[\alpha\gamma] & + A_1 B_1[\alpha\alpha] + A_1 B_2[\alpha\beta] + A_1 B_3[\alpha\gamma] \\
\quad + A_2 A_2[\beta\beta] + 2A_2 A_3[\beta\gamma] & + A_2 B_1[\alpha\beta] + A_2 B_2[\beta\beta] + A_2 B_3[\beta\gamma] \\
\quad\quad + A_3 A_3[\gamma\gamma] & + A_3 B_1[\alpha\gamma] + A_3 B_2[\beta\gamma] + A_3 B_3[\gamma\gamma] \\
 & [\mathrm{II\,II}] = \qquad\qquad (9\,\mathrm{b}) \\
 & B_1 B_1[\alpha\alpha] + 2B_1 B_2[\alpha\beta] + 2B_1 B_3[\alpha\gamma] \\
 & \quad + B_2 B_2[\beta\beta] + 2B_2 B_3[\beta\gamma] \\
 & \quad\quad + B_3 B_3[\gamma\gamma]
\end{array}$$

Führt man (6) auch in (8) ein, so erhält man zunächst:

$$\left.\begin{aligned}
v_1'' &= (A_1\,\alpha_1 + A_2\,\beta_1 + A_3\,\gamma_1)\,k_1 + (B_1\,\alpha_1 + B_2\,\beta_1 + B_3\,\gamma_1)\,k_2 \\
v_2'' &= (A_1\,\alpha_2 + A_2\,\beta_2 + A_3\,\gamma_2)\,k_1 + (B_1\,\alpha_2 + B_2\,\beta_2 + B_3\,\gamma_2)\,k_2 \\
v_3'' &= (A_1\,\alpha_3 + A_2\,\beta_3 + A_3\,\gamma_3)\,k_1 + (B_1\,\alpha_3 + B_2\,\beta_3 + B_3\,\gamma_3)\,k_2 \\
v_4'' &= (A_1\,\alpha_4 + A_2\,\beta_4 + A_3\,\gamma_4)\,k_1 + (B_1\,\alpha_4 + B_2\,\beta_4 + B_3\,\gamma_4)\,k_2
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

und setzt man diese Ausdrücke wieder in (4), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\delta x = x - x_0 = {} & [\alpha\alpha]\,A_1 k_1 + [\alpha\alpha]\,B_1 k_2 \\
& + [\alpha\beta]\,A_2 k_1 + [\alpha\beta]\,B_2 k_2 \\
& + [\alpha\gamma]\,A_3 k_1 + [\alpha\gamma]\,B_3 k_2 \\
\delta y = y - y_0 = {} & [\alpha\beta]\,A_1 k_1 + [\alpha\beta]\,B_1 k_2 \\
& + [\beta\beta]\,A_2 k_1 + [\beta\beta]\,B_2 k_2 \\
& + [\beta\gamma]\,A_3 k_1 + [\beta\gamma]\,B_3 k_2 \\
\delta z = z - z_0 = {} & [\alpha\gamma]\,A_1 k_1 + [\alpha\gamma]\,B_1 k_2 \\
& + [\beta\gamma]\,A_2 k_1 + [\beta\gamma]\,B_2 k_2 \\
& + [\gamma\gamma]\,A_3 k_1 + [\gamma\gamma]\,B_3 k_2
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Damit ist die Ausgleichung vollendet, und wir haben folgenden Rechnungsgang:

Mit den Coefficienten A, B der Bedingungsgleichungen (1) und mit den Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ . . ., welche schon bei Gelegenheit des ersten Teils der Ausgleichung (im vorigen § 50. S. 147) bestimmt worden sind, rechnet man die Coefficienten [I I], [I II] u. s. w. nach (9 a) und (9 b) aus, stellt damit die Normalgleichungen (7) auf, und löst dieselben nach den Korrelaten k_1 und k_2 auf.

Diese Korrelaten setzt man in die Gleichungen (11), und hat damit alle Verbesserungen δx, δy, δz.

Die einzelnen Verbesserungen v'' nach (10) bekommt man auf diesem Wege nicht, doch braucht man dieselben gewöhnlich auch nicht selbst, sondern nur ihre Quadratsumme $[v''\,v'']$, welche wir in § 52. behandeln werden.

Obgleich somit im Prinzip alles erledigt ist, führen wir doch noch einige Zwischen-Bezeichnungen ein, durch welche die Formeln (9) und (11) mehr übersichtlich, und zur numerischen Ausrechnung bequemer gemacht werden sollen.

Je nachdem man in (11) nach Horizontallinien oder nach Vertikallinien ordnet, bekommt man Teilsummen, für welche wir die neuen Zeichen [1] [2] [3], oder $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ . . . einführen, und welche als „Hilfsgrössen [1] [2] [3] . . .“ und „Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ . . .“ benannt werden.

Hilfsgrössen:

$$\left.\begin{aligned}[1] &= A_1 k_1 + B_1 k_2 \\ [2] &= A_2 k_1 + B_2 k_2 \\ [3] &= A_3 k_1 + B_3 k_2\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Übertragungs-Coefficienten:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= A_1 [\alpha\alpha] + A_2 [\alpha\beta] + A_3 [\alpha\gamma] & \mathfrak{B}_1 &= B_1 [\alpha\alpha] + B_2 [\alpha\beta] + B_3 [\alpha\gamma] \\ \mathfrak{A}_2 &= A_1 [\alpha\beta] + A_2 [\beta\beta] + A_3 [\beta\gamma] & \mathfrak{B}_2 &= B_1 [\alpha\beta] + B_2 [\beta\beta] + B_3 [\beta\gamma] \\ \mathfrak{A}_3 &= A_1 [\alpha\gamma] + A_2 [\beta\gamma] + A_3 [\gamma\gamma] & \mathfrak{B}_3 &= B_1 [\alpha\gamma] + B_2 [\beta\gamma] + B_3 [\gamma\gamma]\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (11) zweifach neu schreiben:

$$\begin{aligned}\delta x &= [\alpha\alpha][1] + [\alpha\beta][2] + [\alpha\gamma][3] & & \delta x = \mathfrak{A}_1 k_1 + \mathfrak{B}_1 k_2 \\ \delta y &= [\alpha\beta][1] + [\beta\beta][2] + [\beta\gamma][3] & \text{oder} \quad & \delta y = \mathfrak{A}_2 k_1 + \mathfrak{B}_2 k_2 \\ \delta z &= [\alpha\gamma][1] + [\beta\gamma][3] + [\gamma\gamma][3] & & \delta z = \mathfrak{A}_3 k_1 + \mathfrak{B}_3 k_2\end{aligned} \left.\vphantom{\begin{aligned}a\\b\\c\end{aligned}}\right\} \begin{aligned}&(14)\,\alpha \\ &\text{und} \\ &(14)\,\mathfrak{A}\end{aligned}$$

Auch die Normalgleichungs-Coefficienten in (7) lassen sich nun noch anders darstellen:

$$\left.\begin{aligned}[\mathrm{I\,I}] = [A\,\mathfrak{A}] \qquad & [\mathrm{I\,II}] = [A\,\mathfrak{B}] \text{ oder } = [\mathfrak{A}\,B] \\ & [\mathrm{II\,II}] = [B\,\mathfrak{B}]\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Die nicht quadratischen Coefficienten z. B. [I II] können doppelt erhalten werden, was als Probe dient. Im einzelnen ist hiebei:

$$\left.\begin{aligned}[A\,\mathfrak{B}] &= A_1 \mathfrak{B}_1 + A_2 \mathfrak{B}_2 + \dots \\ [\mathfrak{A}\,B] &= \mathfrak{A}_1 B_1 + \mathfrak{A}_2 B_2 + \dots\end{aligned}\right\} \qquad (15\,a)$$

Mit diesen Hilfsgrössen [1] [2] [3] und Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ nimmt die Ausgleichung folgenden Gang an:

1) Coefficienten A B . . . der Bedingungsgleichungen nach (1).
2) Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ . . . nach § 28. oder § 33.
3) Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ . . . nach (13).
4) Normalgleichungs-Coefficienten nach (15).
5) Auflösung der Normalgleichungen (7).
6) Hilfsgrössen [1] , [2] , [3] nach (12)
7) Verbesserungen δx , δy , δz nach (14) α } oder δx, δy δz nach (14) $\mathfrak{A}$.

§ 52. Fehlerquadratsummen und mittlere Fehler.

Nach (12) § 50. S. 147 haben wir:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] \qquad (1)$$

Die Bestandteile $[v'\,v']$ und $[v''\,v'']$, welche von dem ersten Teil und von dem zweiten Teil der Ausgleichung herrühren, braucht man nicht aus den einzelnen v' und v'' auszurechnen, sondern man kann sie aus den Normalgleichungen ableiten.

Was zunächst den ersten Teil betrifft, so hat man alles hiezu Nötige nach (8) § 27. S. 85, nämlich für u Unbekannte:

$$[v'\,v'] = [l\,l\,.\,u] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \dots \qquad (2)$$

und auch für den zweiten Teil der Ausgleichung haben wir in § 41. bereits alle Formen kennen gelernt, in welche $[v''\,v'']$ gebracht werden kann, denn diese Formen lassen sich alle auf den neuen Fall übertragen, wenn man nur die Bedeutung der neuen Zeichen in § 50. und § 51. berücksichtigt.

Wir haben daher nach (4) und (5) § 41. S. 122:

$$[v'' v''] = -[w k] = -w_1 k_1 - w_2 k_2 - \dots \tag{3}$$

und

$$[v'' v''] = \frac{w_1^2}{[\mathrm{I\,I}]} + \frac{[w_2 \,.\, 1]^2}{[\mathrm{II\,II}\,.\,1]} + \frac{[w_3 \,.\, 2]^2}{[\mathrm{III\,III}\,.\,2]} + \dots \tag{4}$$

Obgleich diese Formeln nach Analogie von § 41. sofort angeschrieben werden können, weil es sich um die Summe $[v'' v'']$ handelt, welche durch die Korrelatenausgleichung von § 51. zu einem Minimum gemacht wurde, mag es doch auch angenehm sein, diese Formeln unmittelbar nachzuweisen, wobei sich zugleich noch eine neue praktisch brauchbare Form (5) ergeben wird.

Die einzelnen v'', welche in (10) § 51. S. 150 gegeben sind, lassen sich mit Benützung der Hilfsgrössen [1] [2] [3] zunächst so darstellen:

$$\begin{aligned} v_1'' &= \alpha_1 [1] + \beta_1 [2] + \gamma_1 [3] \\ v_2'' &+ \alpha_2 [1] + \beta_2 [2] + \gamma_2 [3] \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} [v'' v''] = [\alpha\alpha][1][1] &+ 2[\alpha\beta][1][2] + 2[\alpha\gamma][1][3] \\ &+ \;\; [\beta\beta][2][2] + 2[\beta\gamma][2][3] \\ &\qquad\qquad + \;\; [\gamma\gamma][3][3] \end{aligned}$$

Mit Benützung von (14) α § 51 S. 151 wird dieses:

$$[v'' v''] = [1]\,\delta x + [2]\,\delta y + [3]\,\delta z \tag{5}$$

und mit (12) § 51. S. 151, wenn man zugleich nach k ordnet:

$$[v'' v''] = (A_1\,\delta x + A_2\,\delta y + A_3\,\delta z)\,k_1 + (B_1\,\delta x + B_2\,\delta y + B_3\,\delta z)\,k_2$$

Die Coefficienten von k_1 und k_2 sind hier nichts anderes, als die linken Teile der Normalgleichungen (1) § 51. S. 148, d. h. es ist nun:

$$[v'' v''] = -w_1 k_1 - w_2 k_2 = -[w k]$$

wie schon oben (3) geschrieben wurde; und daraus folgt (4) ganz ebenso wie die frühere analoge Gleichung in § 41.

Nachdem wir so die Bestandteile von $[v v]$ kennen gelernt haben, kann auch die Formel für den mittleren Fehler m zu einer mehr anschaulichen Bedeutung gebracht werden. Nach (6) § 49. ist nämlich nun:

$$m^2 = \frac{[v v]}{n - u + r} = \frac{[v' v'] + [v'' v'']}{(n - u) + r}$$

Hiebei passen die Zähler und Nenner wieder in Teilen zusammen. Es ist nämlich:

$$\frac{[v' v']}{n - u} = m_1^2 \quad \text{und} \quad \frac{[v'' v'']}{r} = m_2^2$$

wo m_1 den mittleren Fehler nur aus dem ersten Teil der Ausgleichung, und m_2 den mittleren Fehler nur aus dem zweiten Teil der Ausgleichung vorstellt.

Im allgemeinen werden m_1 und m_2 weder unter sich gleich, noch mit dem Gesamtmittelfehler m gleich ausfallen.

Wenn m_1 und m_2 sehr wesentlich verschieden ausfallen, so deutet das auf Fehlerquellen, welche in dem ersten oder in dem zweiten Teil verborgen geblieben sind.

§ 53. Funktionsgewicht nach der Ausgleichung.

Nachdem im vorigen § 52. die Korrelatenausgleichung durch die Coefficienten I, II ... auf den früheren Fall von § 39. zurückgeführt ist, können wir auch das Funktionsgewicht nach der Ausgleichung, ohne weitere Entwicklungen, nach § 42. anschreiben, wenn nur die Bedeutung der Coefficienten α β ... und I II ... richtig benützt wird.

Es soll sich um folgende Funktion handeln:

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z \tag{1}$$

deren Gewicht P bestimmt werden soll. Man zerlegt wie bisher:

$$F = f_1 (x_0 + \delta x) + f_2 (y_0 + \delta y) + f_3 (z_0 + \delta z) \tag{2}$$

Um dieses als eine Funktion von $(l - v'')$ darzustellen, hat man nach (2*) § 51. S. 149:

$$\begin{aligned}
-(x_0 + \delta x) &= \alpha_1 (l_1 - v_1'') + \alpha_2 (l_2 - v_2'') + \alpha_3 (l_3 - v_3'') + \alpha_4 (l_4 - v_4'') \\
-(y_0 + \delta y) &= \beta_1 (l_1 - v_1'') + \beta_2 (l_2 - v_2'') + \beta_3 (l_3 - v_3'') + \beta_4 (l_4 - v_4'') \\
-(z_0 + \delta z) &= \gamma_1 (l_1 - v_1'') + \gamma_2 (l_2 - v_2'') + \gamma_3 (l_3 - v_3'') + \gamma_4 (l_4 - v_4'')
\end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (2), so wird folgende Form entstehen:

$$-F = \varphi_1 (l_1 - v_1'') + \varphi_2 (l_2 - v_2'') + \varphi_3 (l_3 - v_3'') + \varphi_4 (l_4 - v_4'') \tag{3}$$

wo die Coefficienten φ folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= f_1 \alpha_1 + f_2 \beta_1 + f_3 \gamma_1 \\
\varphi_2 &= f_1 \alpha_2 + f_2 \beta_2 + f_3 \gamma_2 \\
\varphi_3 &= f_1 \alpha_3 + f_2 \beta_3 + f_3 \gamma_3 \\
\varphi_4 &= f_1 \alpha_4 + f_2 \beta_4 + f_3 \gamma_4
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Nun ist das Gewicht der Funktion (3) nach den Regeln für bedingte Beobachtungen nach (12) § 42. S. 124:

$$\frac{1}{P} = [\varphi\,\varphi] - \left\{ \frac{[\mathrm{I}\,\varphi]^2}{[\mathrm{I}\,\mathrm{I}]} + \frac{[\mathrm{II}\,\varphi\,.\,1]^2}{[\mathrm{II}\,\mathrm{II}\,.\,1]} + \frac{[\mathrm{III}\,\varphi\,.\,2]^2}{[\mathrm{III}\,\mathrm{III}\,.\,2]} + \cdots \right\} \tag{5}$$

Dabei ist der erste Teil vermöge (4):

$$\left.\begin{aligned}
[\varphi\,\varphi] = [\alpha\,\alpha] f_1^2 &+ 2 [\alpha\,\beta] f_1 f_2 + 2 [\alpha\,\gamma] f_1 f_3 \\
&+ \;\; [\beta\,\beta] f_2^2 \;\; + 2 [\beta\,\gamma] f_1 f_3 \\
&\qquad\qquad + \;\; [\gamma\,\gamma] f_3^2
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

d. h. nach (3) § 29. S. 92 ist $1 : [\varphi\,\varphi]$ das Gewicht der Funktion F nach der ersten Ausgleichung und *vor* der zweiten Ausgleichung.

Hiefür sind auch alle anderen Formen von § 29. gültig, also nach Einführung der Hilfsgrössen q, die Formel (5) S. 92:

$$[\varphi\,\varphi] = q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 = [q\,f] \tag{7}$$

und die elegante Schlussformel (13) S. 94:

$$[\varphi\,\varphi] = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[f_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} + \cdots \tag{8}$$

Was den zweiten Teil von (5) betrifft, so hat man hiezu lediglich die Bedeutungen der φ in (4) mit den Coefficienten I II III von (6) § 51. S. 149 zusammenzunehmen. Und wenn man darnach die Produktsummen $[\mathrm{I}\,\varphi]$, $[\mathrm{II}\,\varphi]$, $[\mathrm{III}\,\varphi]$ u. s. w. bildet, so sieht man alsbald, dass man wieder auf gleiche Formen kommt wie bei $[\mathrm{I}\,\mathrm{II}]$, $[\mathrm{I}\,\mathrm{III}]$ u. s. w. Die Glieder $[\mathrm{I}\,\varphi]$, $[\mathrm{II}\,\varphi]$ ... schliessen sich hieran gerade so an, wie wenn zu den Bedingungsgleichungen mit den Coefficienten $A\ B \ldots$ noch eine weitere Gleichung mit den Coefficienten $f_1\ f_2\ f_3 \ldots$ getreten wäre, und an die Reihe der Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B} \ldots$ schliessen sich noch die q so an:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 & \ldots \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_4 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \ldots \end{array}\right\} \tag{10}$$

Für die $[\mathrm{I}\,\varphi]$, $[\mathrm{II}\,\varphi]$ u. s. w. gewinnt man hiebei auch je *zwei* Formeln, ebenso wie die nichtquadratischen $[\mathrm{I\,II}]$, $[\mathrm{I\,III}] \ldots$ nach (15) § 51. S. 151 auch doppelt ausdrückbar waren. Die Ergebnisse sind:

$$\left.\begin{array}{lcl} [\mathrm{I}\ \ \varphi] = [\mathfrak{A} f] & \text{oder} & = [A\,q] \\ [\mathrm{II}\ \varphi] = [\mathfrak{B} f] & \text{oder} & = [B\,q] \\ [\mathrm{III}\,\varphi] = [\mathfrak{C} f] & \text{oder} & = [C\,q] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{11}$$

Diese Glieder hängt man an die Elimination der Normalgleichungen an, und rechnet dann genau so weiter, wie es schon in § 42. gelehrt wurde.

§ 54. Vermittelnde Beobachtungen mit partiellen Bedingungsgleichungen.

Wenn die Fehlergleichungen Unbekannte enthalten, welche in den Bedingungsgleichungen nicht vorkommen, so lassen sich die im Vorstehenden entwickelten Formeln doch anwenden, denn man kann dann annehmen, dass die betreffenden Coefficienten der Bedingungsgleichungen gleich Null sind.

Hiernach wäre es überhaupt nicht nötig, diesen Fall besonders zu behandeln; allein man kann den fraglichen Umstand schon in dem ersten Teil der Ausgleichung vorteilhaft ausnützen, indem man die in den Bedingungsgleichungen nicht auftretenden Unbekannten schon in den Normalgleichungen des ersten Teils eliminiert.

Da bei Triangulierungsausgleichungen dieser Fall von Wichtigkeit ist, gehen wir hier näher darauf ein, und nehmen zugleich Veranlassung, die Anwendung der allgemeinen Theorie auf Triangulierungsausgleichung auch sonst noch vorzubereiten.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{\begin{array}{l} v_1' = \underbrace{h_1(x) + i_1(y)} + \underbrace{a_1'\,x + b_1'\,y + c_1'\,z} + l_1' \\ v_2' = h_2(x) + i_2(y) + a_2'\,x + b_2'\,y + c_2'\,z + l_2' \\ v_3' = h_3(x) + i_3(y) + a_3'\,x + b_3'\,y + c_3'\,z + l_3' \\ v_4' = h_4(x) + i_4(y) + a_4'\,x + b_4'\,y + c_4'\,z + l_4' \\ v_5'\ \ \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = s}\ \ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = u}\ \ldots \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\text{Gesamt-Anzahl} = s + u$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{\begin{array}{l} A_0 + A_1\,x + A_2\,y + A_3\,z = 0 \\ B_0 + \underbrace{B_1\,x + B_2\,y + B_3\,z}_{\text{Anzahl} = u.} = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Die s Unbekannten (x) (y) (die Nullpunkts-Korrektionen der einzelnen Sätze) kommen nur in den Fehlergleichungen (1), nicht aber in den Bedingungsgleichungen (2) vor. Das hat auf den Beginn der ersten Ausgleichung keinen Einfluss; man stellt unbekümmert darum die zu (1) gehörigen Normalgleichungen auf, und beginnt damit, (x) und (y) zu eliminieren.

Nachdem (x) und (y) eliminiert sind, bleibt ein System übrig, welches in unseren bisherigen Bezeichnungen so geschrieben werden muss:

$$\left.\begin{aligned}\underline{[a'\,a'\,.\,2]\,x} + [a'\,b'\,.\,2]\,y + [a'\,c'\,.\,2]\,z + [a'\,l'\,.\,2] &= 0\\ \underline{[b'\,b'\,.\,2]\,y} + [b'\,c'\,.\,2]\,z + [b'\,l'\,.\,2] &= 0\\ \underline{[c'\,c'\,.\,2]\,z} + [c'\,l'\,.\,2] &= 0\\ \underline{[l'\,l'\,.\,2]} &= [v_0\,v_0]\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Nach den früheren Betrachtungen über reduzierte Fehlergleichungen § 26. haben die hier auftretenden Coefficienten $[a'\,a'\,.\,2]$ u. s. w. wieder die Bedeutungen von Summen und Produkten, wir setzen daher wieder $[a'\,a'\,.\,2] = [a\,a]$ u. s. w. und haben statt (3):

$$\left.\begin{aligned}\underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0\\ \underline{[b\,b]\,y} + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0\\ \underline{[c\,c]\,z} + [c\,l] &= 0\\ \underline{[l\,l]} &= [v_0 v_0]\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Mit diesen Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ ... rechnet man nun gerade so weiter, wie mit den früheren, ebenfalls mit $[a\,a]$ $[a\,b]$ ... bezeichneten Coefficienten des ersten Teils der Ausgleichung.

Die Quadratsumme $[v_0\,v_0]$ in (3) und (4) reduziert sich allmählich vollends auf $[v'\,v']$ in folgender Weise:

$$[v'\,v'] = [v_0\,v_0] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \cdots \qquad (5)$$

Das mittlere Fehlerquadrat der ersten Ausgleichung wird:

$$m_1^2 = \frac{[v'\,v']}{n-(s+u)} \qquad (6)$$

Wir wollen nun auch noch einen anderen Umstand hervorheben, der sich bei Triangulierungsausgleichungen von selbst einstellt, ohne die Allgemeingültigkeit der bisherigen Entwicklungen zu beeinflussen, nämlich das Zerfallen der Fehlergleichungen (1) und der Normalgleichungen (4) in verschiedene ganz unabhängige Gruppen. Diese Gleichungen gehören nämlich zu dem Inbegriff *aller* Stationsausgleichungen.

Wir wollen dieses in allgemeinen Formeln andeuten, und annehmen, es handle sich um 3 Unbekannte mit folgenden in 2 Systeme zerfallenden Fehlergleichungen, in welchen etwa gewisse andere Unbekannte (x) (z) ... bereits eliminiert sein mögen:

$$\begin{aligned}v_1 &= a_1\,x + b_1\,y \ldots + l_1\\ v_2 &= a_2\,x + b_2\,y \ldots + l_2\\ v_3 &= a_3\,x + b_3\,y \ldots + l_3\\ v_4 &= \ldots \qquad \ldots c_4\,z + l_4\\ v_5 &= \ldots \qquad \ldots c_5\,z + l_5\end{aligned}$$

Bildet man hiezu die Normalgleichungen, so werden sie:

$$\left.\begin{aligned}\underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y \ldots + [a\,l] &= 0\\ \underline{[b\,b]\,y} \ldots + [b\,l] &= 0\\ \underline{[c\,c]\,z} + [c\,l] &= 0\\ \underline{[l\,l]} &= (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + (l_4^2 + l_5^2)\\ &= [v_0\,v_0]_1 \qquad + [v_0\,v_0]_2\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Diese in 2 Systeme zerfallende Form (7) ist in der allgemeinen Form (4) inbegriffen, und der Umstand, dass ein Teil der Coefficienten in (7) gleich Null ist, macht sich in der Weiterrechnung von selbst angenehm geltend.

Auch die Formel (5) zerfällt dann von selbst in einzelne getrennte Teile:

$$[v'\,v']_1 = [v_0\,v_0]_1 - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}$$

$$[v'\,v']_2 = [v_0\,v_0]_2 + \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, - \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]}$$

Wegen des Ausfallens von $[a\,c]$ und $[b\,c]$ in (7) ist nämlich $[c\,l\,.\,2] = [c\,l]$ und $[c\,c\,.\,2] = [c\,c]$. Dann ist:

$$[v'\,v']_1 + [v'\,v']_2 = [v'\,v']$$

$[v'\,v']_1$ entspricht einer ersten Station, $[v'\,v']_2$ einer zweiten Station u. s. w.

Die Formel (6) kann man nun sowohl für jede einzelne Station, als auch für den Inbegriff aller Stationen anschreiben.

§ 55. Formel-Zusammenstellung für vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Wir stellen alle Gebrauchsformeln für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen im Folgenden zusammen, mit den bisher in diesem Buche gebrauchten Bezeichnungen. Zur Vergleichung stellen wir rechts daneben die entsprechenden Formeln der „Rechnungsvorschriften“ von S. 1—24 des Werkes: „Die Königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Erster Teil, zweite verbesserte Auflage, herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation, Berlin 1870.“ und zwar beziehen sich die römischen Nummern XVI, XVII u. s. w. auf die dort angewendete Numerierung I. bis XXIX.

Die Bezugnahme auf die Landesaufnahme ist hier deswegen sehr nützlich, weil eine andere Anwendung der vorliegenden allgemeinen Aufgabe als auf jene Triangulierungen der Landesaufnahme nach 1870, kaum noch vorkommt, und das Zurechtfinden in der Formelmenge ohne einen solchen Leitfaden nicht leicht ist.

Wir beginnen mit den reduzierten Stations-Normalgleichungen, wobei sich die Bezeichnung „reduziert“ darauf bezieht, dass die Stations-Unbekannten, welche wir in § 54. mit (x) , (y) bezeichnet haben ($x\;x,\;x_,\;x_{,,}$ der Rechnungsvorschriften S. 2), in den Stations-Normalgleichungen bereits eliminiert seien.

Formeln unseres Buches § 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Reduzierte Stations-Normalgleichungen:

$\underline{[a\,a]\,x_0} + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0$	$\underline{(a\,a)}\,A - (a\,b)\,B - (a\,c)\,C - (a\,n) = 0$
$\underline{[b\,b]\,y_0} + [b\,c]\,z_0 + [b\,l] = 0$	$+ \underline{(b\,b)}\,B - (b\,c)\,C - (b\,n) = 0$
$\underline{[c\,c]\,z_0} + [c\,l] = 0$	$+ \underline{(c\,c)}\,C - (c\,n) = 0$
$\underline{[l\,l]} = [v_0\,v_0]$	$(V_0\,V_0)$
	III. und VIII_c.

Formeln unseres Buches § 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Diese Gleichungen werden nach $x_0\ y_0\ z_0$, bzw. $A\ B\ C$, aufgelöst, man hat also nun:

die auf der Station ausgeglichenen Winkel:

$x_0 \quad y_0 \quad z_0$	$A \quad B \quad C$

Am Schluss der Elimination bekommt man hiebei gelegentlich die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler:

$[v'v']_1 = [v_0 v_0]_1 - \left\{\frac{[al]^2}{[aa]} + \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]}\right\}$	$(VV) = (V_0 V_0) - \left\{\frac{(an)^2}{(aa)} + \frac{(bn.1)^2}{(bb.1)} + \frac{(cn.2)^2}{(cc.2)}\right\}$ VIIIc.
$[v'\,v']_1$ gilt zunächst für *eine* Station; für alle Stationen zusammen hat man:	$(V\,V)$ gilt zunächst für *eine* Station; für alle Stationen zusammen hat man:
$[v'\,v']_1 + [v'\,v']_2 + [v'\,v']_3 + \ldots = [v'\,v']$	$(V\,V) + (V'\,V') + (V''\,V'') + (V'''\,V''') + \ldots$

Jede einzelne Stationsausgleichung giebt nun einen mittleren Fehler:

$m_1 = \sqrt{\frac{[v'\,v']_1}{n - u - s}}$	$\mu_1 = \sqrt{\frac{(V\,V)}{m - A, B, C - x}}$

Bezieht man die Berechnung auf alle Stationen zusammen, so wird:

$m_1 = \sqrt{\frac{[v'\,v']}{[n] - [u] - [s]}}$	$\mu_1 = \sqrt{\frac{(V\,V) + (V'\,V') + (V''\,V'')}{(m) - (A, B, C) - (x)}}$

Mit den auf den Stationen ausgeglichenen Winkeln $x_0\ y_0\ z_0$, bzw. $A\ B\ C$, bildet man die Netzbedingungsgleichungen, gerade so, wie wenn diese $x_0\ y_0\ z_0$ bzw. $A\ B\ C$ unmittelbar gemessene Winkel wären. Die Netzkorrektionen dieser Winkel werden bei Triangulierungen mit (1) (2) (3) . . . durch das ganze Netz durchlaufend numeriert.

Netzbedingungsgleichungen:

$A_1\,\delta x + A_2\,\delta y + A_3\,\delta z + \ldots + w_1 = 0$	$\mathfrak{a}_1\,(1) + \mathfrak{a}_2\,(2) + \mathfrak{a}_3\,(3) + \ldots - \mathfrak{A} = 0$
$B_1\,\delta x + B_2\,\delta y + B_3\,\delta z + \ldots + w_2 = 0$	$\mathfrak{b}_1\,(1) + \mathfrak{b}_2\,(2) + \mathfrak{b}_3\,(3) + \ldots - \mathfrak{B} = 0$
$C_1\,\delta x + C_2\,\delta y + C_3\,\delta z + \ldots + w_3 = 0$	$\mathfrak{c}_1\,(1) + \mathfrak{c}_2\,(2) + \mathfrak{c}_3\,(3) + \ldots - \mathfrak{C} = 0$
	VIII.

Nachdem so die Numerierung aller Winkel des Netzes festgestellt ist, und die Netzbedingungsgleichungen tabellarisch geordnet sind, bildet man auch eine entsprechende Tabelle der Gewichts-Coefficienten. Bei Gelegenheit der einzelnen Stations-Normalgleichungs-Auflösungen hat man (nach § 28. oder § 33.) alle diese Coefficienten bestimmt:

Gewichts-Coefficienten der einzelnen Stationen:

$[\alpha\alpha] \quad [\alpha\beta] \quad [\alpha\gamma] \quad \ldots$	$(\alpha\alpha) \quad (\alpha\beta) \quad (\alpha\gamma) \quad \ldots$
$[\beta\beta] \quad [\beta\gamma] \quad \ldots$	$(\beta\beta) \quad (\beta\gamma) \quad \ldots$
$[\gamma\gamma] \quad \ldots$	$(\gamma\gamma) \quad \ldots$

Diese Coefficienten zerfallen in so viele Einzelsysteme, als man Stationen hat. Zur tabellarischen Übersicht empfiehlt es sich, nun statt der Literierung $\alpha\ \beta \ldots$ eine den Netzkorrektionen (1) (2) (3) entsprechende Numerierung anzuwenden:

Formeln unseres Buches §. 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Gewichts-Coefficienten-Tabelle für alle Stationen:
(beispielshalber mit Gruppen von 3 2 3 Elementen)

	1]	2]	3]	4]	5]	6]	7]	8]
[1.	$[\alpha\,\alpha]$	$[\alpha\,\beta]$	$[\alpha\,\gamma]$					
[2.	$[\alpha\,\beta]$	$[\beta\,\beta]$	$[\beta\,\gamma]$					
[3.	$[\alpha\,\gamma]$	$[\beta\,\gamma]$	$[\gamma\,\gamma]$					
[4.				$[\alpha\,\alpha]$	$[\alpha\,\beta]$			
[5.				$[\alpha\,\beta]$	$[\beta\,\beta]$			
[6.						$[\alpha\,\alpha]$	$[\alpha\,\beta]$	$[\alpha\,\gamma]$
[7.						$[\alpha\,\beta]$	$[\beta\,\beta]$	$[\beta\,\gamma]$
[8.						$[\alpha\,\gamma]$	$[\beta\,\gamma]$	$[\gamma\,\gamma]$

Aus den Coefficienten der Netzbedingungsgleichungen und aus den Gewichts-Coefficienten bildet man die

Übertragungs-Coefficienten:

$$\mathfrak{A}_1 = A_1\,[\alpha\,\alpha] + A_2\,[\alpha\,\beta] + A_3\,[\alpha\,\gamma]$$
$$\mathfrak{A}_2 = A_1\,[\alpha\,\beta] + A_2\,[\beta\,\beta] + A_3\,[\beta\,\gamma]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{B}_1 = B_1\,[\alpha\,\alpha] + B_2\,[\alpha\,\beta] + B_3\,[\alpha\,\gamma]$$
$$\mathfrak{B}_2 = B_1\,[\alpha\,\beta] + B_2\,[\beta\,\beta] + B_3\,[\beta\,\gamma]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{a}_1\,(\alpha\,\alpha) + \mathfrak{a}_2\,(\alpha\,\beta) + \mathfrak{a}_3\,(\alpha\,\gamma)$$
$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{a}_1\,(\alpha\,\beta) + \mathfrak{a}_2\,(\beta\,\beta) + \mathfrak{a}_3\,(\beta\,\gamma)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{b}_1\,(\alpha\,\alpha) + \mathfrak{b}_2\,(\alpha\,\beta) + \mathfrak{b}_3\,(\alpha\,\gamma)$$
$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{b}_1\,(\alpha\,\beta) + \mathfrak{b}_2\,(\beta\,\beta) + \mathfrak{b}_3\,(\beta\,\gamma)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

XVI.

oder numeriert:

$$\mathfrak{A}_1 = A_1\,[1\,.\,1] + A_2\,[1\,.\,2] + A_3\,[1\,.\,3]$$
$$\mathfrak{A}_2 = A_1\,[2\,.\,1] + A_2\,[2\,.\,2] + A_3\,[2\,.\,3]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{B}_1 = B_1\,[1\,.\,1] + B_2\,[1\,.\,2] + B_3\,[1\,.\,3]$$
$$\mathfrak{B}_2 = B_1\,[2\,.\,1] + B_2\,[2\,.\,2] + B_3\,[2\,.\,3]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Durch Multiplikationen der Coefficienten $A\ B\ \ldots$ der Bedingungsgleichungen mit den Übertrags-Coefficienten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \ldots$ bildet man:

$$[\mathrm{I\,I}] = [A\,\mathfrak{A}] \quad [\mathrm{I\,II}] = [A\,\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}\,B] \quad [\mathrm{I\,III}] = [A\,\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\,C]$$
$$[\mathrm{II\,II}] = [A\,\mathfrak{B}] \quad [\mathrm{II\,III}] = [B\,\mathfrak{C}] = [\mathfrak{B}\,C]$$
$$[\mathrm{III\,III}] = [C\,\mathfrak{C}]$$

Dieses sind die Coefficienten der

Wenn man mit den Coefficienten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\ldots$ von XIII. die Hilfsformeln bildet:

$$[1] = \mathfrak{a}_1\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_1\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_1\,\mathrm{III}$$
$$[2] = \mathfrak{a}_2\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_2\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_2\,\mathrm{III}$$
$$[3] = \mathfrak{a}_3\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_3\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_3\,\mathrm{III}$$
$$[4] = \mathfrak{a}_4\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_4\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_4\,\mathrm{III}$$

$\mathrm{X_a}$.

und wenn man diese Ausdrücke in die unten gegebenen Gewichtsgleichungen XV. setzt, so erlangt man die ebenfalls unten mitgeteilten Korrektionsformeln XVI. Diese endlich setzt man in die Bedingungsgleichungen XIII. und erhält damit die

Formeln unseres Buches § 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Normalgleichungen:

$\underline{[\mathrm{I\,I}]\,k_1} + [\mathrm{I\,II}]\,k_2 + [\mathrm{I\,III}]\,k_3 + w_1 = 0$	$\underline{(\mathrm{I\,I})\,\mathrm{I}} + (\mathrm{I\,II})\,\mathrm{II} + (\mathrm{I\,III})\,\mathrm{III} - \mathfrak{A} = 0$
$\underline{[\mathrm{II\,II}]\,k_2} + [\mathrm{II\,III}]\,k_3 + w_2 = 0$	$\underline{(\mathrm{II\,II})\,\mathrm{II}} + (\mathrm{II\,III})\,\mathrm{III} - \mathfrak{B} = 0$
$\underline{[\mathrm{III\,III}]\,k_3} + w_3 = 0$	$\underline{(\mathrm{III\,III})\,\mathrm{III}} - \mathfrak{C} = 0$
	XVII.

Diese Normalgleichungen löst man auf, und erhält damit:

die Korrelaten:

$k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \ldots$	$\mathrm{I} \quad \mathrm{II} \quad \mathrm{III} \quad \ldots$

Indem man den Bedingungsgleichungen XIII. nach Vertikallinien folgt, bildet man die Formeln für die:

Hilfsgrössen [1] [2] [3]:

$[1] = A_1\,k_1 + B_1\,k_2 + C_1\,k_3 + \ldots$	$[1] = \mathfrak{a}_1\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_1\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_1\,\mathrm{III} + \ldots$
$[2] = A_2\,k_1 + B_2\,k_2 + C_2\,k_3 + \ldots$	$[2] = \mathfrak{a}_2\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_2\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_2\,\mathrm{III} + \ldots$
$[3] = A_3\,k_1 + B_3\,k_2 + C_3\,k_3 + \ldots$	$[3] = \mathfrak{a}_3\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_3\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_3\,\mathrm{III} + \ldots$
$[4] = A_4\,k_1 + B_4\,k_2 + C_4\,k_3 + \ldots$	$[4] = \mathfrak{a}_4\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_4\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_4\,\mathrm{III} + \ldots$
. . . .	. . . .
	$\mathrm{X_a}$.

Nachdem die Korrelaten und die Hilfsgrössen ausgerechnet sind, hat man die:

Korrektionsformeln:

$\delta x = \mathfrak{A}_1\,k_1 + \mathfrak{B}_1\,k_2 + \mathfrak{C}_1\,k_3$	$(1) = \mathfrak{A}_1\,\mathrm{I} + \mathfrak{B}_1\,\mathrm{II} + \mathfrak{C}_1\,\mathrm{III}$
$\delta y = \mathfrak{A}_2\,k_1 + \mathfrak{B}_2\,k_2 + \mathfrak{C}_2\,k_3$	$(2) = \mathfrak{A}_2\,\mathrm{I} + \mathfrak{B}_2\,\mathrm{II} + \mathfrak{C}_2\,\mathrm{III}$
$\delta z = \mathfrak{A}_3\,k_1 + \mathfrak{B}_3\,k_2 + \mathfrak{C}_3\,k_3$	$(3) = \mathfrak{A}_3\,\mathrm{I} + \mathfrak{B}_3\,\mathrm{II} + \mathfrak{C}_3\,\mathrm{III}$
	XVI.

oder zur Kontrole:

Gewichtsgleichungen:

$\delta x = [1]\,[\alpha\,\alpha] + [2]\,[\alpha\,\beta] + [3]\,[\alpha\,\gamma]$	$(1) = (\alpha\,\alpha)\,[1] + (\alpha\,\beta)\,[2] + (\alpha\,\gamma)\,[3]$
$\delta y = [1]\,[\alpha\,\beta] + [2]\,[\beta\,\beta] + [3]\,[\beta\,\gamma]$	$(2) = (\alpha\,\beta)\,[1] + (\beta\,\beta)\,[2] + (\beta\,\gamma)\,[3]$
$\delta z = [1]\,[\alpha\,\gamma] + [2]\,[\beta\,\gamma] + [3]\,[\gamma\,\gamma]$	$(3) = (\alpha\,\gamma)\,[1] + (\beta\,\gamma)\,[2] + (\gamma\,\gamma)\,[3]$
	XV.

Damit ist die Netzausgleichung vollendet. Für die Quadratsumme der bei der Netzausgleichung übrig bleibenden Fehler hat man verschiedene Formeln:

$[v''\,v''] = (1)\,[1] + (2)\,[2] + (3)\,[3]$	$[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}] = (1)\,[1] + (2)\,[2] + (3)\,[3]$ (XVIII)
$[v''\,v''] = -w_1\,k_1 - w_2\,k_2 - w_3\,k_3 = -[w\,k]$	$[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}\,\mathrm{I} + \mathfrak{B}\,\mathrm{II} + \mathfrak{C}\,\mathrm{III}$
$[v''\,v''] = \dfrac{w_1^2}{[\mathrm{I\,I}]} + \dfrac{[w_2\,.\,1]^2}{[\mathrm{II\,II}\,.\,1]} + \dfrac{[w_3\,.\,2]^2}{[\mathrm{III\,III}\,.\,2]}$	$[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}] = \dfrac{\mathfrak{A}^2}{(\mathrm{I\,I})} + \dfrac{(\mathfrak{B}\,.\,1)^2}{(\mathrm{II\,II}.1)} + \dfrac{(\mathfrak{C}\,.\,2)^2}{(\mathrm{III\,III}.2)}$ (XIX)

Hieraus berechnet sich der mittlere Gewichtseinheitsfehler für die Netzausgleichung allein:

$m_2 = \sqrt{\dfrac{[v''\,v'']}{r}}$	$\mu_2 = \sqrt{\dfrac{(\mathfrak{B}\,\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A},\,\mathfrak{B},\,\mathfrak{C})}}$

Formeln unseres Buches § 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Der mittlere *Gewichtseinheitsfehler* der Gesamtausgleichung ist:

$$m = \sqrt{\frac{[v'\,v'] + [v''\,v'']}{[n] - [u] - [s] + r}}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{(V\,V) + (V'\,V') + (V''\,V'') + (\mathfrak{B}\mathfrak{B})}{(m) - (A, B, C) - (x) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})}}$$

XXI. und XXII.

Wenn man das Gewicht P einer Funktion der ausgeglichenen Elemente bestimmen will, so bringt man diese Funktion, wenn sie nicht an und für sich schon linear ist, durch Differentiieren in die Form:

$$d\,F = \frac{\partial F}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial F}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial F}{\partial z}\,d\,z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = f_2 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = f_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial A} = l_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial B} = l_2 \qquad \frac{\partial F}{\partial C} = l_3$$

Mit diesen neuen Coefficienten f bzw. l und den schon früher bekannten Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. bildet man:

$$\begin{aligned}
[\alpha\,\alpha]\,f_1 + [\alpha\,\beta]\,f_2 + [\alpha\,\gamma]\,f_3 &= q_1 \\
[\alpha\,\beta]\,f_1 + [\beta\,\beta]\,f_2 + [\beta\,\gamma]\,f_3 &= q_2 \\
[\alpha\,\gamma]\,f_1 + [\beta\,\gamma]\,f_2 + [\gamma\,\gamma]\,f_3 &= q_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha\,\alpha)\,l_1 + (\alpha\,\beta)\,l_2 + (\alpha\,\gamma)\,l_3 &= q_1 \\
(\alpha\,\beta)\,l_1 + (\beta\,\beta)\,l_2 + (\beta\,\gamma)\,l_3 &= q_2 \\
(\alpha\,\gamma)\,l_1 + (\beta\,\gamma)\,l_2 + (\gamma\,\gamma)\,l_3 &= q_3
\end{aligned}$$

XXVIII.

Nachdem die q ausgerechnet sind, findet man den ersten Teil der gesuchten Gewichtsreciproke:

$$\frac{1}{P_0} = [f\,q] \qquad\qquad \frac{1}{P_0} = (l\,q)$$

Weiter berechnet man Ersatzglieder für die Absolutglieder der Bedingungsgleichungen, und zwar hat man dafür zweierlei Formeln:

Ersatzglieder:

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{A}\,f] &\text{ oder } = [A\,q] \\
[\mathfrak{B}\,f] &\quad\text{„}\quad = [B\,q] \\
[\mathfrak{C}\,f] &\quad\text{„}\quad = [C\,q]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}\,l) &\text{ oder } = (\mathfrak{a}\,q) \\
(\mathfrak{B}\,l) &\quad\text{„}\quad = (\mathfrak{b}\,q) \\
(\mathfrak{C}\,l) &\quad\text{„}\quad = (\mathfrak{c}\,q)
\end{aligned}$$

(Seite 20.)

Diese Ersatzglieder setzt man an Stelle der Absolutglieder $w_1\ w_2\ w_3$ bzw. $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}$ der Normalgleichungen XVII, und findet mit Zuziehung des schon vorher berechneten $[f\,q]$ durch allmähliche Elimination in üblicher Weise:

$$\frac{1}{P} = [q\,f] - \frac{[\mathfrak{A}\,f]^2}{[\mathrm{I\,I}]} - \frac{[\mathfrak{B}\,f\,.\,1]^2}{[\mathrm{II\,II}\,.\,1]} - \frac{[\mathfrak{C}\,f\,.\,2]^2}{[\mathrm{III\,III}\,.\,2]}$$

$$\frac{1}{P} = (l\,q) - \frac{(\mathfrak{A}\,l)^2}{[\mathrm{I\,I}]} - \frac{(\mathfrak{B}\,l\,.\,1)^2}{[\mathrm{II\,II}.1]} - \frac{(\mathfrak{C}\,l\,.\,2)^2}{[\mathrm{III\,III}\,.\,2]}$$

XXIX.

Mittlerer Fehler der Funktion F:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} \qquad\qquad M = \mu\sqrt{\frac{1}{P}}$$

§ 56. Zusammenfassung aller Formen von Ausgleichungsaufgaben.

Die Ausgleichungsaufgaben, welche wir bisher behandelt haben, sind in den vorgeführten Formen allmählich durch praktische Bedürfnisse einzeln erzeugt worden; es sind das aber noch nicht alle Aufgaben der Ausgleichungsrechnung, weshalb wir nun zum Schlusse daran gehen wollen, eine Systematik aller Ausgleichungsaufgaben zu bilden und dieselben in einem allgemeinsten Falle zusammenzufassen, und zwar letzteres im Anschluss an *Helmert*s Ausgleichungsrechnung nach der M. d. kl. Q., Leipzig 1872, welcher dort in § 5. zuerst eine solche Systematik und Zusammenfassung gegeben hat.

I. Direkte Beobachtungen.

Wenn *eine* Unbekannte durch mehrfache unabhängige Messungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ (von gleicher Genauigkeit) bestimmt wurde, so bestehen nach § 7. S. 20 folgende Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = x - l_1 \\ v_2 = x - l_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = x - l_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

und es ist der bestbestimmte Wert von x das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{[l]}{n} \qquad (2)$$

II. Vermittelnde Beobachtungen.

Zwischen den Unbekannten $x,\ y,\ z \ldots$ und den unabhängigen Beobachtungen $l_1\ l_2 \ldots l_n$ bestehen nach § 12. S. 41 die Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = \underbrace{a_n x + b_n y + c_n z + \ldots}_{\text{Anzahl} = u.} + l_n \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Hier ist n grösser als u oder als Grenzfall $n = u$, jedenfalls nicht n kleiner als u, und dann bekommt man die Bestimmung der Unbekannten $x,\ y,\ z$ durch Auflösung der Normalgleichungen (14) S. 44.

Man bemerkt, dass die Gleichungen (1) in den Gleichungen (3) mit enthalten sind, indem alle $a = 1$, alle $b,\ c,\ d \ldots = 0$ und $l = -l$ genommen wird. Es ist also der Fall *I.* direkte Beobachtungen mit arithmetischem Mittel, in dem Falle *II.* vermittelnde Beobachtungen mit enthalten.

An den Ausgleichungsfall *II* wollen wir noch eine etwas erweiterte Aufgabe anschliessen, welche in unserem früheren Entwicklungsgange § 12—36. noch *nicht* enthalten ist, nämlich vermittelnde Beobachtungen mit Fehler-*Differenz*-Gleichungen, in einfachster Gestalt so:

$$\begin{array}{c}\text{Anzahl} \\ = n - 1\end{array} \left\{\begin{array}{l} v_2 - v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 \\ v_3 - v_1 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 \quad (n - 1 > u) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n - v_1 = \underbrace{a_n x + b_n y + c_n z +}_{\text{Anzahl} = u} \ldots + l_n \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Hier treten nur *Differenzen* $v_2 - v_1$, $v_3 - v_1 \ldots$ als linke Seiten der Fehlergleichungen auf, niemals die $v_1, v_2 \ldots$ einzeln; man kann aber gewöhnliche Fehlergleichungen herstellen, indem man v_1 selbst als Unbekannte einführt, also so:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ v_2 = v_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_3 = v_1 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \quad (n > u + 1) \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ v_n = \underbrace{v_1 + a_n x + b_n y + c_n z}_{\text{Anzahl} = u+1} + l_n \end{array} \right\} \qquad (5)$$

Die zugehörigen Normalgleichungen werden:

$$\left. \begin{array}{l} n\, v_1 + [a]\, x + [b]\, y + [c]\, z + l = 0 \\ [a]\, v_1 + [a\,a]\, x + [a\,b]\, y + [a\,c]\, z + [a\,l] = 0 \\ [b]\, v_1 + [a\,b]\, x + [b\,b]\, y + [b\,c]\, z + [b\,l] = 0 \\ [c]\, v_1 + [a\,c]\, x + [b\,c]\, y + [c\,c]\, z + [c\,l] = 0 \end{array} \right| \qquad (6)$$

und die erste Reduktion mit Elimination von v_1 giebt:

$$\left. \begin{array}{l} \left([a\,a] - \frac{[a]}{n}[a]\right) x + \left([a\,b] - \frac{[a]}{n}[b]\right) y + \left([a\,c] - \frac{[a]}{n}[c]\right) z + \left([a\,l] - \frac{[a]}{n}[l]\right) = 0 \\ \qquad \left([b\,b] - \frac{[b]}{n}[b]\right) y + \ldots \quad \text{u. s. w.} \end{array} \right\} \qquad (7)$$

Wir werden diesen Fall in verschiedenen praktisch-geodätischen Aufgaben wieder finden (namentlich Eliminierung der Orientierungs-Unbekannten bei Richtungsmessungen). Hier kam es nur darauf an, zu zeigen, dass durch den Kunstgriff, eines der v selbst als Unbekannte zu setzen, die Aufgabe (4) mit $n - 1$ Gleichungen und u Unbekannten zurückgeführt werden konnte auf Ausgleichung mit n gewöhnlichen Fehlergleichungen und $u + 1$ Unbekannten. Das Verfahren ist auch auf mehr als *eine* Hilfsunbekannte v anwendbar.

III. Bedingte Beobachtungen.

In (3) § 37. hatten wir die Gleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots a_n v_n + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots b_n v_n + w_2 = 0 \quad (n > r) \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \underbrace{r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + \ldots r_n v_n}_{\text{Anzahl} = n} + w_r = 0 \end{array} \right\} \qquad (8)$$

Es wurde in § 37. gezeigt, dass man irgend welche r der Verbesserungen v in den $n - r$ übrigen mit Hilfe der vorstehenden Bedingungsgleichungen (8) ausdrücken und dadurch die Aufgabe der Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit n Fehlergleichungen zurückführen kann.

Man kann dieses auch noch allgemeiner so ansehen:

Wenn es gelingt, irgend welche $n - r$ unabhängige unter den v auszudrücken in irgend welchen $n - r$ unabhängigen Unbekannten $x, y, z \ldots$, so kann man mittelst der Gleichungen (8) auch die übrigen r von den v in denselben $n - r$ Unbekannten $x, y, z \ldots$ ausdrücken, und dadurch das Ganze zurückführen auf $(n - r) + r = n$ Fehlergleichungen mit $n - r$ Unbekannten (dieses ist z. B. der Fall bei Höhen-Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, Band II, 1893, §. 147. $n = 14$, $r = 8$, $n - r = 6$).

IV. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Auch diese Aufgabe lässt sich auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zurückführen, wie in § 49. gezeigt wurde. Ausserdem haben wir in § 50—51. eine zweite Lösung kennen gelernt durch Trennung in zwei Teile, deren erster Teil vermittelnde Beobachtungen und deren zweiter Teil bedingte Beobachtungen betrifft.

V. Allgemeinster Fall.

Alle bisher behandelten Ausgleichungsaufgaben können als Einzelfälle der folgenden allgemeinen Aufgabe betrachtet werden:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots a_n v_n + A_1 x + B_1 y + C_1 z + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots b_n v_n + A_2 x + B_2 y + C_2 z + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots c_n v_n + A_3 x + B_3 y + C_3 z + w_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + \ldots r_n v_n}_{\text{Anzahl} = n} + \underbrace{A_r x + B_r y + C_r z}_{\text{Anzahl} = u} + w_r = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$r > u \quad , \quad n > r - u$$

Die $v_1\ v_2 \ldots v_n$ sind Beobachtungsverbesserungen, deren Quadratsumme $[v\,v]$ ein Minimum werden soll; x, y, z sind Unbekannte.

Wenn $r = u$ ist, so hat man ohne Ausgleichung eine strenge Lösung, indem alle $v = 0$ werden und die so bleibenden n Gleichungen nach den u Unbekannten $x\ y\ z$ aufgelöst werden.

Eine Ausgleichung ist also nur möglich für $r > u$, und dann kann man die Aufgabe zurückführen auf r Bedingungsgleichungen zwischen den v ohne die x, y, z, indem man mit Hilfe von u ausgewählten Gleichungen die u Unbekannten x, y, z in den dazu gehörigen v ausdrückt und damit in den $r - u$ übrigen Gleichungen eliminiert. Es bleiben dann $r - u$ Bedingungsgleichungen zwischen den n Werthen v übrig, weshalb zu deren Ausgleichung noch nötig ist, dass $r - u < n$ ist, und der mittlere Gewichtseinheitsfehler ist dann:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r - u}} \quad (10)$$

Die in den Gleichungen (9) enthaltene Aufgabe ist also im Prinzip gelöst, und wie sich die Lösung im einzelnen Falle gestalten wird, hängt von der Verteilung der Coefficienten ab, deren ein Teil $= 0$ oder $= 1$ sein kann oder sonst einfache Werte annehmen kann.

Durch vereinfachende Annahme betreffs der Coefficienten kann man alle früheren Aufgaben I. II. III. IV. in V. wieder finden, z. B. II. Vermittelnde Beobachtungen, entstehen aus V. dadurch, dass in jeder Gleichung nur ein einzelnes v stehen bleibt, welches dann als lineare Funktion der x, y, z auftritt, dazu ist nötig, dass $r > n$ oder höchstens $r = n$ ist; wenn $r < n$ ist, so ist es nicht möglich, für jedes v eine besondere Fehlergleichung zu erlangen, man kann dann aber einzelne v als besondere Unbekannte herausheben, so wie in (5) mit einem einzelnen v_1 geschehen ist.

Der Fall III., bedingte Beobachtungen ist in V. sehr einfach dadurch enthalten, dass x, y, z gleich Null werden, und der Fall IV., vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen, ergiebt sich aus V. durch eine Zerfällung in zwei Gruppen von Gleichungen, deren erste nur je ein einzelnes v und die x, y, z und deren zweite keine v und dagegen die x, y, z allein enthält.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist auch klar geworden, dass *alle* Ausgleichungsaufgaben sich auf den Fall II. vermittelnde Beobachtungen, zurückführen lassen, wie wir schon am Anfang von § 12. S. 41 behauptet haben.

Aus diesem Grunde war es auch nur nötig, den Satz für den mittleren Fehler, betreffs der Division mit $n - u$ in (19) § 27. S. 87 für vermittelnde Beobachtungen zu beweisen; auf die übrigen Fälle könnte dieser Satz dann durch einfache Betrachtungen über die Zahl der Beobachtungen und der Unbekannten übertragen werden, wie z. B. für den allgemeinsten Fall V. in der vorstehenden Gleichung (10) geschehen ist.

Kapitel II.

Triangulierungs-Netze.

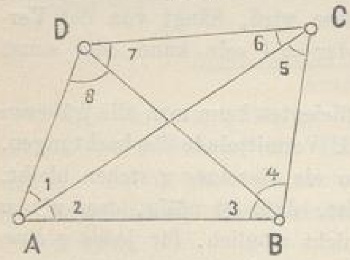
Die Ausgleichung der Triangulierungsnetze ist eine der wichtigsten Aufgaben der M. d. kl. Q. und hat durch ihre Dringlichkeit am allermeisten zur Entwicklung der Ausgleichungstheorien beigetragen. Diese Ausgleichung geschieht in den meisten Fällen nach bedingten Beobachtungen, und wurde zum erstenmale von *Gauss* gelehrt im Jahre 1826 in der Abhandlung „supplementum theoriae combinationis" (vgl. S. 4.).

Die erste Aufgabe zur Triangulierungsausgleichung besteht in der Aufstellung der Bedingungsgleichungen, mit welchen wir uns deshalb nun beschäftigen.

§ 57. Bedingungsgleichungen im Viereck.

Ehe wir für Dreiecksnetze im Allgemeinen die Bedingungen aufsuchen, welche zwischen den gemessenen Winkeln oder Richtungen bestehen, wollen wir den einfachen Fall eines Vierecks mit zwei Diagonalen vorausschicken, um an diesem Beispiele die Art der Behandlung zunächst kennen zu lernen.

Fig. 1.



In dem ebenen Viereck (Fig. 1.) seien die 8 einzelnen Winkel gemessen, welche mit 1, 2, 3 . . . 8 numeriert sind, es sei z. B. (1) der Winkel DAC und (2) sei der Winkel CAB. Es ist also angenommen, dass auf A zuerst nur AD und AC in einem Satze angezielt sind, dann in einem zweiten Satze AC und AB, oder kurz, es sind auf A die zwei *einzelnen Winkel* (1) und (2) gemessen, und nicht ein Satz mit den 3 Richtungen AD, AC und AB. (Der Fall von Richtungsmessungen wird erst nachher behandelt werden.)

Nachdem also über die Art der Messung Klarheit gegeben ist, überlegen wir, dass 8 Winkel für die eindeutige Konstruktion eines Vierecks zu viel sind; 4 Winkel würden ausreichen, um bei einer gegebenen Seite das Viereck zu konstruieren, es sind also 4 Winkel überschüssig, und diesen müssen 4 unter sich unabhängige Bedingungsgleichungen entsprechen.