Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 49. Eliminierung der Bedingungsgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

tungen mit Bedingungsgleichungen scheint zum erstenmale gelöst worden zu sein von *J. Zech* (Einladungsschrift zur Königs-Geburtstagsfeier 1857, Tübingen bei Fues). Dieses war eine theoretische Lösung; die Anwendung der Aufgabe auf Geodäsie wurde bald von den damaligen Geodäten ersten Rangs in Angriff genommen, namentlich von *Andrae* in Kopenhagen, *Hansen* *) in Gotha und in der Entstehungszeit der internationalen Erdmessung, nach 1862, spielte diese Aufgabe eine wichtige Rolle in der damaligen geodätischen (häufig polemischen) Litteratur.

In Preussen hat die fragliche Aufgabe bei der Landesaufnahme etwa von 1870—1880 wichtige Dienste geleistet, weshalb wir die entsprechenden Formeln nachher in § 55. zuziehen werden.

Unsere in den nachfolgenden §§ 49.—53. vorgetragene Behandlung der Aufgabe ist unabhängig von den zitierten Autoritäten nach eigenem Gange entwickelt.

§ 49. Eliminierung der Bedingungsgleichungen.

Eine erste Behandlung der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen besteht darin, dass man die Bedingungsgleichungen eliminiert, und da man auf diesem Wege zugleich den klarsten Einblick in die Bestimmung des mittleren Fehlers gewinnt, stellen wir diese praktisch weniger wichtige Auflösungsform voran:

Man hat n unmittelbare Beobachtungen l, welche mit u Unbekannten $x\ y\ z\ t$ durch n Fehlergleichungen verbunden sind. Ausserdem bestehen zwischen den Unbekannten streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen in der Anzahl r.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1\,t + \ldots + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2\,t + \ldots + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + d_3\,t + \ldots + l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \underbrace{a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + d_n\,t + \ldots}_{\text{Anzahl} = u} + l_n \end{array} \right\} \qquad (1)$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1\,x + A_2\,y + A_3\,z + A_4\,t + \ldots = 0 \\ B_0 + B_1\,x + B_2\,y + B_3\,z + B_4\,t + \ldots = 0 \\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = u} \end{array} \right\} \qquad 2)$$

Ausgleichungsbedingung:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + \ldots v_n^2 = \text{Minimum} \qquad (3)$$

Man kann diese Ausgleichung auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ohne Bedingungsgleichungen zurückführen, indem man mittelst der Bedingungsgleichungen (2) eine Anzahl r der u Unbekannten eliminiert. Dieses geschieht so:

Man kann die Gleichungen (2) so aufgelöst denken:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} x = A_1'\,z + A_2'\,t + \ldots \\ y = B_1'\,z + B_2'\,t + \ldots \\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = u - r} \end{array} \right\} \qquad (4)$$

*) Die Hansenschen Abhandlungen „von der Methode der kleinsten Quadrate" haben wir behandelt und kommentiert in Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882, I. S. 53—59.

Setzt man diese Ausdrücke in (1), so soll erhalten werden:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = c_1' z + d_1' t + \ldots l_1' \\ v_2 = c_2' z + d_2' t + \ldots l_2' \\ v_3 = c_3' z + d_3' t + \ldots l_3' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n = \underbrace{c_n' z + d_n' t + \ldots}_{\text{Anzahl} = u - r} l_n' \end{array} \right\} \tag{5}$$

Man hat es also nun mit einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zu thun, welche nach den früheren Regeln zu behandeln ist. Nach der Ausgleichung hat man den mittleren Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-(u-r)}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(n-u)+r}} \tag{6}$$

Zwischen n, u und r bestehen Beziehungen:

Da die Bedingungsgleichungen (2) streng erfüllt sein müssen, ohne dass dadurch die $x\ y\ z\ t$ völlig bestimmt sein dürfen, so muss sein:

$$u > r \tag{7}$$

und wenn die Gleichungen (5), welche nach der Elimination der r Unbekannten übrig bleiben, noch den Charakter von „Fehlergleichungen" haben sollen, so muss auch sein:

$$n > u - r \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) wird also der Nenner $n-(u-r)$ stets eine positive Zahl sein.

Wenn nur eine *kleine* Zahl von Bedingungsgleichungen (2) vorliegt, kann dieses Verfahren wohl am Platz sein, und die Auswahl der zu eliminierenden Unbekannten wird dann von der Natur der jeweiligen Aufgabe abhängen.

Für Triangulierungsausgleichungen im Grossen ist dagegen eine andere durchaus symmetrisch angeordnete Auflösung üblich, welche wir im folgenden behandeln werden.

Unter allen Umständen gilt aber die Fehlerformel (6), mit dem Nenner $n-u+r$, weil die Fehlerberechnung von der *Form* der Ausgleichung unabhängig ist.

§ 50. Trennung der Ausgleichung in zwei Teile, und erste Ausgleichung.

Wir nehmen die im vorigen § 49. beschriebenen Verhältnisse wieder vor, schreiben aber der Übersichtlichkeit wegen immer nur $n = 4$, $u = 3$, $r = 2$, d. h. wir nehmen 4 Beobachtungen, 3 Unbekannte $x\ y\ z$, und 2 Bedingungsgleichungen.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + l_3 \\ v_4 = \underbrace{a_4 x + b_4 y + c_4 z}_{\text{Anzahl} = u} + l_4 \end{array} \right\} \tag{1}$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0 \\ B_0 + \underbrace{B_1 x + B_2 y + B_3 z}_{\text{Anzahl} = u} = 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$