Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 50. Trennung der Ausgleichung in zwei Teile, und erste Ausgleichung

Setzt man diese Ausdrücke in (1), so soll erhalten werden:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = c_1' z + d_1' t + \ldots l_1' \\ v_2 = c_2' z + d_2' t + \ldots l_2' \\ v_3 = c_3' z + d_3' t + \ldots l_3' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n = \underbrace{c_n' z + d_n' t + \ldots}_{\text{Anzahl} = u - r} l_n' \end{array} \right\} \tag{5}$$

Man hat es also nun mit einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zu thun, welche nach den früheren Regeln zu behandeln ist. Nach der Ausgleichung hat man den mittleren Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-(u-r)}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(n-u)+r}} \tag{6}$$

Zwischen n, u und r bestehen Beziehungen:

Da die Bedingungsgleichungen (2) streng erfüllt sein müssen, ohne dass dadurch die $x \; y \; z \; t$ völlig bestimmt sein dürfen, so muss sein:

$$u > r \tag{7}$$

und wenn die Gleichungen (5), welche nach der Elimination der r Unbekannten übrig bleiben, noch den Charakter von „Fehlergleichungen" haben sollen, so muss auch sein:

$$n > u - r \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) wird also der Nenner $n - (u - r)$ stets eine positive Zahl sein.

Wenn nur eine *kleine* Zahl von Bedingungsgleichungen (2) vorliegt, kann dieses Verfahren wohl am Platz sein, und die Auswahl der zu eliminierenden Unbekannten wird dann von der Natur der jeweiligen Aufgabe abhängen.

Für Triangulierungsausgleichungen im Grossen ist dagegen eine andere durchaus symmetrisch angeordnete Auflösung üblich, welche wir im folgenden behandeln werden.

Unter allen Umständen gilt aber die Fehlerformel (6), mit dem Nenner $n - u + r$, weil die Fehlerberechnung von der *Form* der Ausgleichung unabhängig ist.

§ 50. Trennung der Ausgleichung in zwei Teile, und erste Ausgleichung.

Wir nehmen die im vorigen § 49. beschriebenen Verhältnisse wieder vor, schreiben aber der Übersichtlichkeit wegen immer nur $n = 4$, $u = 3$, $r = 2$, d. h. wir nehmen 4 Beobachtungen, 3 Unbekannte $x \; y \; z$, und 2 Bedingungsgleichungen.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + l_3 \\ v_4 = \underbrace{a_4 x + b_4 y + c_4 z}_{\text{Anzahl} = u} + l_4 \end{array} \right\} \tag{1}$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0 \\ B_0 + \underbrace{B_1 x + B_2 y + B_3 z}_{\text{Anzahl} = u} = 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{lll} n > u - r & \text{und} & u > r \\ (n = 4 \quad , & u = 3 \quad , & r = 2) \end{array}\right\} \tag{2}$$

Ausgleichungsprinzip:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \text{Minimum} \tag{4}$$

Wenn man die Fehlergleichungen (1) ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (2) für sich behandelt, so geben sie die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x_0 + [b\,b]\,y_0 + [b\,c]\,z_0 + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x_0 + [b\,c]\,y_0 + [c\,c]\,z_0 + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Wir haben dabei $x_0\ y_0\ z_0$ geschrieben, zur Unterscheidung von denjenigen Ergebnissen $x\ y\ z$, welche man durch die Gesamtausgleichung erhalten wird.

Diese Gleichungen (5) löst man nach $x_0\ y_0\ z_0$ auf, und zugleich kann man alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. nach § 28. oder § 33. bestimmen; diese Gewichts-Coefficienten werden im zweiten Teil der Ausgleichung gebraucht werden.

Die $x\ y\ z$ denken wir in je zwei Teile zerlegt:

$$x = x_0 + \delta\,x \qquad y = y_0 + \delta\,y \qquad z = z_0 + \delta\,z \tag{6}$$

Damit nimmt eine einzelne Fehlergleichung:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l$$

folgende Form an:

$$v = a\,(x_0 + \delta\,x) + b\,(y_0 + \delta\,y) + c\,(z_0 + \delta\,z) \;\; + l$$

$$v = \underbrace{a\;x_0 + b\,y_0 + c\;z_0 + l}_{v'} \quad + \underbrace{a\,\delta\,x + b\;\delta\;y + c\,\delta\,z}_{v''}$$

$$v = \qquad v' \qquad + \qquad v''$$

d. h. für den ersten Teil der Ausgleichung hat man:

$$v' = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + l \tag{7}$$

und für den zweiten Teil der Ausgleichung:

$$v'' = a\,\delta\,x + b\,\delta\,y + c\,\delta\,z \tag{8}$$

für beide Ausgleichungen zusammen:

$$v = v' + v'' \tag{9}$$

Hiernach ist:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] + 2\,[v'\,v''] \tag{10}$$

Hievon ist aber $[v'\,v''] = 0$, wie sich leicht beweist, indem man (8) mit v' multipliziert:

$$[v'\,v''] = [a\,v']\,(1) + [b\,v']\,(2) + [c\,v']\,(3) \tag{11}$$

Es ist aber nach (7) und (5):

$$[a\,v'] = [a\,a]\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0$$

und ebenso sind $[b\,v'] = 0$ und $[c\,v'] = 0$, also im ganzen $[v'\,v''] = 0$, und (10) reduziert sich auf:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] \tag{12}$$

Nachdem somit die Summe $[v\,v]$, deren Minimum erzielt werden soll, in zwei Teile $[v'\,v']$ und $[v''\,v'']$ zerlegt ist, von denen der erste Teil $[v'\,v']$ bereits ein relatives Minimum ist, handelt es sich nur noch darum, auch den zweiten Teil $[v''\,v'']$ möglichst klein zu machen.

Da $x\ y\ z$ die unabhängigen Unbekannten der Ausgleichung sind, bestehen nach (4) die Bedingungen:

$$\frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,x} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,y} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,z} = 0 \tag{13}$$

Betrachten wir die erste Bedingung näher, so kann man sie so schreiben:

$$\frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,x} = \frac{\partial\,([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial\,(x_0 + \delta\,x)} = 0$$

x_0 ist eine Näherungsannahme des ersten Teils, welche für den zweiten Teil als konstant gilt, folglich für den zweiten Teil:

$$0 = \frac{\partial\,([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial\,\delta\,x} = \frac{\partial\,[v'\,v']}{\partial\,\delta\,x} + \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,\delta\,x} \tag{14}$$

Der erste Teil giebt $\delta\,x = 0$, denn das Minimum von $[v'\,v']$ wurde eben dadurch erzielt, dass $x = x_0$, also $\delta\,x = 0$ gemacht wurde. Gleiches gilt bei y und z, es bleibt also nur noch das Schlussglied von (14) gleich Null zu machen, oder zugleich mit y und z:

$$0 = \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,\delta\,x} \qquad 0 = \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,\delta\,y} \qquad 0 = \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,\delta\,z} \tag{15}$$

d. h. in Worten: Der zweite Teil der Ausgleichung wird von dem ersten Teil unabhängig, es sind aber die Beziehungen, welche zwischen den v'' und den $\delta\,x, \delta\,y, \delta\,z$ bestehen, zu berücksichtigen.

Die Trennung der $x\ y\ z$ in $x_0 + \delta\,x$, $y_0 + \delta y$, $z_0 + \delta\,z$ lässt sich auch in den Bedingungsgleichungen (2) ausdrücken. Diese geben nämlich:

$$\left.\begin{aligned} A_0 + A_1\,(x_0 + \delta\,x) + A_2\,(y_0 + \delta\,y) + A_3\,(z_0 + \delta\,z) = 0 \\ B_0 + B_1\,(x_0 + \delta\,x) + B_2\,(y_0 + \delta\,y) + B_3\,(z_0 + \delta\,z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Setzt man also:

$$\left.\begin{aligned} A_0 + A_1\,x_0 + A_2\,y_0 + A_3\,z_0 = w_1 \\ B_0 + B_1\,x_0 + B_2\,y_0 + B_3\,z_0 = w_2 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

so ergiebt die Vergleichung von (16) mit (2):

$$\left.\begin{aligned} A_1\,\delta\,x + A_2\,\delta\,y + A_3\,\delta\,z + w_1 = 0 \\ B_1\,\delta\,x + B_2\,\delta\,y + B_3\,\delta\,z + w_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Das sind die Bedingungsgleichungen für den zweiten Teil der Ausgleichung, zu dem wir nun übergehen.

§ 51. Korrelatenausgleichung des zweiten Teils.

Wir haben uns überzeugt, dass $[v''\,v''] =$ Minimum zu machen ist mit den Nebenbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} A_1\,\delta\,x + A_2\,\delta\,y + A_3\,\delta\,z + w_1 = 0 \\ B_1\,\delta\,x + B_2\,\delta\,y + B_3\,\delta\,z + w_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wenn diese Bedingungsgleichungen (1) sich statt auf die Verbesserungen $\delta\,x$, $\delta\,y$, $\delta\,z$ direkt auf die v'' bezögen, so *würde* man nach der Korrelatenmethode kurz so verfahren:

$$\begin{aligned} [A\,A]\,k_1 + [A\,B]\,k_2 + w_1 = 0 \\ [A\,B]\,k_1 + [B\,B]\,k_2 + w_2 = 0 \end{aligned}$$

Dieses ist aber nicht der Fall, die $\delta\,x$, $\delta\,y$, $\delta\,z$ stehen vielmehr zu den v'' in ähnlichen Beziehungen wie die $x_0\ y_0\ z_0$ zu den l.