UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

# Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 51. Korrelatenausgleichung des zweiten Teils

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Visual Library

Da $x\ y\ z$ die unabhängigen Unbekannten der Ausgleichung sind, bestehen nach (4) die Bedingungen:

$$\frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,x} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,y} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,z} = 0 \tag{13}$$

Betrachten wir die erste Bedingung näher, so kann man sie so schreiben:

$$\frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,x} = \frac{\partial\,([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial\,(x_0 + \delta\,x)} = 0$$

$x_0$ ist eine Näherungsannahme des ersten Teils, welche für den zweiten Teil als konstant gilt, folglich für den zweiten Teil:

$$0 = \frac{\partial\,([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial\,\delta\,x} = \frac{\partial\,[v'\,v']}{\partial\,\delta\,x} + \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,\delta\,x} \tag{14}$$

Der erste Teil giebt $\delta\,x = 0$, denn das Minimum von $[v'\,v']$ wurde eben dadurch erzielt, dass $x = x_0$, also $\delta\,x = 0$ gemacht wurde. Gleiches gilt bei $y$ und $z$, es bleibt also nur noch das Schlussglied von (14) gleich Null zu machen, oder zugleich mit $y$ und $z$:

$$0 = \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,\delta\,x} \qquad 0 = \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,\delta\,y} \qquad 0 = \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,\delta\,z} \tag{15}$$

d. h. in Worten: Der zweite Teil der Ausgleichung wird von dem ersten Teil unabhängig, es sind aber die Beziehungen, welche zwischen den $v''$ und den $\delta\,x$, $\delta\,y$, $\delta\,z$ bestehen, zu berücksichtigen.

Die Trennung der $x\ y\ z$ in $x_0 + \delta\,x$ , $y_0 + \delta y$ , $z_0 + \delta\,z$ lässt sich auch in den Bedingungsgleichungen (2) ausdrücken. Diese geben nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} A_0 + A_1\,(x_0 + \delta\,x) + A_2\,(y_0 + \delta\,y) + A_3\,(z_0 + \delta\,z) = 0 \\ B_0 + B_1\,(x_0 + \delta\,x) + B_2\,(y_0 + \delta\,y) + B_3\,(z_0 + \delta\,z) = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Setzt man also:

$$\left.\begin{array}{l} A_0 + A_1\,x_0 + A_2\,y_0 + A_3\,z_0 = w_1 \\ B_0 + B_1\,x_0 + B_2\,y_0 + B_3\,z_0 = w_2 \end{array}\right\} \tag{17}$$

so ergiebt die Vergleichung von (16) mit (2):

$$\left.\begin{array}{l} A_1\,\delta\,x + A_2\,\delta\,y + A_3\,\delta\,z + w_1 = 0 \\ B_1\,\delta\,x + B_2\,\delta\,y + B_3\,\delta\,z + w_2 = 0 \end{array}\right\} \tag{18}$$

Das sind die Bedingungsgleichungen für den zweiten Teil der Ausgleichung, zu dem wir nun übergehen.

## § 51. Korrelatenausgleichung des zweiten Teils.

Wir haben uns überzeugt, dass $[v''\,v''] =$ Minimum zu machen ist mit den Nebenbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\,\delta\,x + A_2\,\delta\,y + A_3\,\delta\,z + w_1 = 0 \\ B_1\,\delta\,x + B_2\,\delta\,y + B_3\,\delta\,z + w_2 = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Wenn diese Bedingungsgleichungen (1) sich statt auf die Verbesserungen $\delta\,x$ , $\delta\,y$ , $\delta\,z$ direkt auf die $v''$ bezögen, so *würde* man nach der Korrelatenmethode kurz so verfahren:

$$\begin{array}{l} [A\,A]\,k_1 + [A\,B]\,k_2 + w_1 = 0 \\ [A\,B]\,k_1 + [B\,B]\,k_2 + w_2 = 0 \end{array}$$

Dieses ist aber nicht der Fall, die $\delta\,x$ , $\delta\,y$ , $\delta\,z$ stehen vielmehr zu den $v''$ in ähnlichen Beziehungen wie die $x_0\ y_0\ z_0$ zu den $l$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nun weiss man nach (6) § 28. S. 88, aus der Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, dass die allgemeine Auflösung der Normalgleichungen des ersten Teils in folgenden Formeln enthalten ist:

$$\left.\begin{aligned} -x_0 &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ -y_0 &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ -z_0 &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und zwar gehören hiezu Fehlergleichungen von dieser Form:

$$v' = a x_0 + b y_0 + c z_0 + l \tag{3}$$

Dagegen haben die Fehlergleichungen der Gesamtausgleichung diese Form:

$$v = v' + v'' = a(x_0 + \delta x) + b(y_0 + \delta y) + c(z_0 + \delta z) + l$$

oder

$$v' = a(x_0 + \delta x) + b(y_0 + \delta y) + c(z_0 + \delta z) + l - v'' \tag{3*}$$

Vergleicht man dieses (3*) mit (3), so erkennt man, dass der neuen Fehlergleichung (3*) auch ein neues System (2*) entsprechen muss, dessen erste Gleichung ist:

$$-(x_0 + \delta x) = \alpha_1 (l_1 - v_1'') + \alpha_2 (l_2 - v_2'') + \alpha_3 (l_3 - v_3'') + \alpha_4 (l_4 - v_4'') \tag{2*}$$

was mit (2) verglichen folgendes giebt:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \alpha_1 v_1'' + \alpha_2 v_2'' + \alpha_3 v_3'' + \alpha_4 v_4'' \\ \delta y &= \beta_1 v_1'' + \beta_2 v_2'' + \beta_3 v_3'' + \beta_4 v_4'' \\ \delta z &= \gamma_1 v_1'' + \gamma_2 v_2'' + \gamma_3 v_3'' + \gamma_4 v_4'' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Ausdrücke (4) hat man in die Bedingungsgleichungen (1) einzusetzen, wodurch Gleichungen entstehen, welche sich auf die Verbesserungen $v''$ beziehen, und folgende Form haben:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}_1 v_1'' + \mathrm{I}_2 v_2'' + \mathrm{I}_3 v_3'' + \mathrm{I}_4 v_4'' + w_1 &= 0 \\ \mathrm{II}_1 v_1'' + \mathrm{II}_2 v_2'' + \mathrm{II}_3 v_3'' + \mathrm{II}_4 v_4'' + w_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Coefficienten I und II haben vermöge ihrer Entstehung aus (4) und (1) folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1 + A_3 \gamma_1 & \mathrm{II}_1 &= B_1 \alpha_1 + B_2 \beta_1 + B_3 \gamma_1 \\ \mathrm{I}_2 &= A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2 + A_3 \gamma_2 & \mathrm{II}_2 &= B_1 \alpha_2 + B_2 \beta_2 + B_3 \gamma_2 \\ \mathrm{I}_3 &= A_1 \alpha_3 + A_2 \beta_3 + A_3 \gamma_3 & \mathrm{II}_3 &= B_1 \alpha_3 + B_2 \beta_3 + B_3 \gamma_3 \\ \mathrm{I}_4 &= A_1 \alpha_4 + A_2 \beta_4 + A_3 \gamma_4 & \mathrm{II}_4 &= B_1 \alpha_4 + B_2 \beta_4 + B_3 \gamma_4 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nun ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Ausgleichung direkter bedingter Beobachtungen, d. h. mit Einführung der Korrelaten $k_1$ und $k_2$ zu den Bedingungsgleichungen (5) hat man die Normalgleichungen zu bilden:

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{I\,I}]k_1 + [\mathrm{I\,II}]k_2 + w_1 &= 0 \\ [\mathrm{I\,II}]k_1 + [\mathrm{II\,II}]k_2 + w_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

worauf dann die einzelnen $v''$ gefunden werden können, nämlich, nach Vertikalreihen in (5):

$$\left.\begin{aligned} v_1'' &= \mathrm{I}_1 k_1 + \mathrm{II}_1 k_2 \\ v_2'' &= \mathrm{I}_2 k_1 + \mathrm{II}_2 k_2 \\ v_3'' &= \mathrm{I}_3 k_1 + \mathrm{II}_3 k_2 \\ v_4'' &= \mathrm{I}_4 k_1 + \mathrm{II}_4 k_2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Verfolgt man diesen Rechnungsgang näher, so findet man durch Quadrieren

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und Multiplizieren der Coefficienten I und II die Summen-Coefficienten der Normalgleichungen (7) wie folgt:

$$
\begin{array}{ll}
[\mathrm{I\,I}] = & [\mathrm{I\,II}] = \qquad (9\,\mathrm{a}) \\
A_1 A_1 [\alpha\alpha] + 2 A_1 A_2 [\alpha\beta] + 2 A_1 A_3 [\alpha\gamma] & + A_1 B_1 [\alpha\alpha] + A_1 B_2 [\alpha\beta] + A_1 B_3 [\alpha\gamma] \\
\quad + A_2 A_2 [\beta\beta] + 2 A_2 A_3 [\beta\gamma] & + A_2 B_1 [\alpha\beta] + A_2 B_2 [\beta\beta] + A_2 B_3 [\beta\gamma] \\
\quad + A_3 A_3 [\gamma\gamma] & + A_3 B_1 [\alpha\gamma] + A_3 B_2 [\beta\gamma] + A_3 B_3 [\gamma\gamma]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
[\mathrm{II\,II}] = \qquad (9\,\mathrm{b}) \\
B_1 B_1 [\alpha\alpha] + 2 B_1 B_2 [\alpha\beta] + 2 B_1 B_3 [\alpha\gamma] \\
\quad + B_2 B_2 [\beta\beta] + 2 B_2 B_3 [\beta\gamma] \\
\quad + B_3 B_3 [\gamma\gamma]
\end{array}
$$

Führt man (6) auch in (8) ein, so erhält man zunächst:

$$
\left.
\begin{array}{l}
v_1'' = (A_1\,\alpha_1 + A_2\,\beta_1 + A_3\,\gamma_1)\,k_1 + (B_1\,\alpha_1 + B_2\,\beta_1 + B_3\,\gamma_1)\,k_2 \\
v_2'' = (A_1\,\alpha_2 + A_2\,\beta_2 + A_3\,\gamma_2)\,k_1 + (B_1\,\alpha_2 + B_2\,\beta_2 + B_3\,\gamma_2)\,k_2 \\
v_3'' = (A_1\,\alpha_3 + A_2\,\beta_3 + A_3\,\gamma_3)\,k_1 + (B_1\,\alpha_3 + B_2\,\beta_3 + B_3\,\gamma_3)\,k_2 \\
v_4'' = (A_1\,\alpha_4 + A_2\,\beta_4 + A_3\,\gamma_4)\,k_1 + (B_1\,\alpha_4 + B_2\,\beta_4 + B_3\,\gamma_4)\,k_2
\end{array}
\right\} \qquad (10)
$$

und setzt man diese Ausdrücke wieder in (4), so erhält man:

$$
\left.
\begin{array}{rl}
\delta x = x - x_0 = & [\alpha\alpha]\,A_1\,k_1 + [\alpha\alpha]\,B_1\,k_2 \\
& + [\alpha\beta]\,A_2\,k_1 + [\alpha\beta]\,B_2\,k_2 \\
& + [\alpha\gamma]\,A_3\,k_1 + [\alpha\gamma]\,B_3\,k_2 \\
\delta y = y - y_0 = & [\alpha\beta]\,A_1\,k_1 + [\alpha\beta]\,B_1\,k_2 \\
& + [\beta\beta]\,A_2\,k_1 + [\beta\beta]\,B_2\,k_2 \\
& + [\beta\gamma]\,A_3\,k_1 + [\beta\gamma]\,B_3\,k_2 \\
\delta z = z - z_0 = & [\alpha\gamma]\,A_1\,k_1 + [\alpha\gamma]\,B_1\,k_2 \\
& + [\beta\gamma]\,A_2\,k_1 + [\beta\gamma]\,B_2\,k_2 \\
& + [\gamma\gamma]\,A_3\,k_1 + [\gamma\gamma]\,B_3\,k_2
\end{array}
\right\} \qquad (11)
$$

Damit ist die Ausgleichung vollendet, und wir haben folgenden Rechnungsgang:

Mit den Coefficienten $A$, $B$ der Bedingungsgleichungen (1) und mit den Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ . . ., welche schon bei Gelegenheit des ersten Teils der Ausgleichung (im vorigen § 50. S. 147) bestimmt worden sind, rechnet man die Coefficienten [I I], [I II] u. s. w. nach (9 a) und (9 b) aus, stellt damit die Normalgleichungen (7) auf, und löst dieselben nach den Korrelaten $k_1$ und $k_2$ auf.

Diese Korrelaten setzt man in die Gleichungen (11), und hat damit alle Verbesserungen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$.

Die einzelnen Verbesserungen $v''$ nach (10) bekommt man auf diesem Wege nicht, doch braucht man dieselben gewöhnlich auch nicht selbst, sondern nur ihre Quadratsumme $[v''v'']$, welche wir in § 52. behandeln werden.

Obgleich somit im Prinzip alles erledigt ist, führen wir doch noch einige Zwischen-Bezeichnungen ein, durch welche die Formeln (9) und (11) mehr übersichtlich, und zur numerischen Ausrechnung bequemer gemacht werden sollen.

Je nachdem man in (11) nach Horizontallinien oder nach Vertikallinien ordnet, bekommt man Teilsummen, für welche wir die neuen Zeichen [1] [2] [3], oder 𝔄 𝔅 . . . einführen, und welche als „Hilfsgrössen [1] [2] [3] . . .“ und „Übertragungs-Coefficienten 𝔄 𝔅 ℭ . . .“ benannt werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

*Hilfsgrössen:*

$$\left.\begin{aligned}[1] &= A_1\,k_1 + B_1\,k_2 \\ [2] &= A_2\,k_1 + B_2\,k_2 \\ [3] &= A_3\,k_1 + B_3\,k_2\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

*Übertragungs-Coefficienten:*

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= A_1\,[\alpha\,\alpha] + A_2\,[\alpha\,\beta] + A_3\,[\alpha\,\gamma] & \mathfrak{B}_1 &= B_1\,[\alpha\,\alpha] + B_2\,[\alpha\,\beta] + B_3\,[\alpha\,\gamma] \\ \mathfrak{A}_2 &= A_1\,[\alpha\,\beta] + A_2\,[\beta\,\beta] + A_3\,[\beta\,\gamma] & \mathfrak{B}_2 &= B_1\,[\alpha\,\beta] + B_2\,[\beta\,\beta] + B_3\,[\beta\,\gamma] \\ \mathfrak{A}_3 &= A_1\,[\alpha\,\gamma] + A_2\,[\beta\,\gamma] + A_3\,[\gamma\,\gamma] & \mathfrak{B}_3 &= B_1\,[\alpha\,\gamma] + B_2\,[\beta\,\gamma] + B_3\,[\gamma\,\gamma]\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (11) zweifach neu schreiben:

$$\begin{aligned}\delta\,x &= [\alpha\,\alpha]\,[1] + [\alpha\,\beta]\,[2] + [\alpha\,\gamma]\,[3] & & & \delta\,x &= \mathfrak{A}_1\,k_1 + \mathfrak{B}_1\,k_2 \\ \delta\,y &= [\alpha\,\beta]\,[1] + [\beta\,\beta]\,[2] + [\beta\,\gamma]\,[3] & &\text{oder} & \delta\,y &= \mathfrak{A}_2\,k_1 + \mathfrak{B}_2\,k_2 \\ \delta\,z &= [\alpha\,\gamma]\,[1] + [\beta\,\gamma]\,[3] + [\gamma\,\gamma]\,[3] & & & \delta\,z &= \mathfrak{A}_3\,k_1 + \mathfrak{B}_3\,k_2\end{aligned} \quad \left\}\begin{aligned}&(14)\,\alpha \\ &\text{und} \\ &(14)\,\mathfrak{A}\end{aligned}\right.$$

Auch die Normalgleichungs-Coefficienten in (7) lassen sich nun noch anders darstellen:

$$\left.\begin{aligned}[\mathrm{I\,I}] &= [A\,\mathfrak{A}] \qquad [\mathrm{I\,II}] = [A\,\mathfrak{B}] \text{ oder } = [\mathfrak{A}\,B] \\ & \qquad\qquad [\mathrm{II\,II}] = [B\,\mathfrak{B}]\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Die nicht quadratischen Coefficienten z. B. [I II] können doppelt erhalten werden, was als Probe dient. Im einzelnen ist hiebei:

$$\left.\begin{aligned}[A\,\mathfrak{B}] &= A_1\,\mathfrak{B}_1 + A_2\,\mathfrak{B}_2 + \ldots \\ [\mathfrak{A}\,B] &= \mathfrak{A}_1\,B_1 + \mathfrak{A}_2\,B_2 + \ldots\end{aligned}\right\} \quad (15\,a)$$

Mit diesen Hilfsgrössen [1] [2] [3] und Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ nimmt die Ausgleichung folgenden Gang an:

1) Coefficienten $A$ $B$ ... der Bedingungsgleichungen nach (1).
2) Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ ... nach § 28. oder § 33.
3) Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ ... nach (13).
4) Normalgleichungs-Coefficienten nach (15).
5) Auflösung der Normalgleichungen (7).
6) Hilfsgrössen [1] , [2] , [3] nach (12) } oder $\delta\,x$, $\delta\,y$ $\delta\,z$ nach (14) $\mathfrak{A}$.
7) Verbesserungen $\delta\,x$ , $\delta\,y$ , $\delta\,z$ nach (14) $\alpha$ }

## § 52. Fehlerquadratsummen und mittlere Fehler.

Nach (12) § 50. S. 147 haben wir:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] \quad (1)$$

Die Bestandteile $[v'\,v']$ und $[v''\,v'']$, welche von dem ersten Teil und von dem zweiten Teil der Ausgleichung herrühren, braucht man nicht aus den einzelnen $v'$ und $v''$ auszurechnen, sondern man kann sie aus den Normalgleichungen ableiten.

Was zunächst den ersten Teil betrifft, so hat man alles hiezu Nötige nach (8) § 27. S. 85, nämlich für $u$ Unbekannte:

$$[v'\,v'] = [l\,l\,.\,u] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \cdots \quad (2)$$

und auch für den zweiten Teil der Ausgleichung haben wir in § 41. bereits alle Formen kennen gelernt, in welche $[v''\,v'']$ gebracht werden kann, denn diese Formen lassen sich alle auf den neuen Fall übertragen, wenn man nur die Bedeutung der neuen Zeichen in § 50. und § 51. berücksichtigt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN