Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 52. Fehlerquadratsummen und mittlere Fehler

Hilfsgrössen:

$$\left.\begin{array}{l}[1] = A_1 k_1 + B_1 k_2 \\ [2] = A_2 k_1 + B_2 k_2 \\ [3] = A_3 k_1 + B_3 k_2\end{array}\right\} \tag{12}$$

Übertragungs-Coefficienten:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathfrak{A}_1 = A_1 [\alpha\alpha] + A_2 [\alpha\beta] + A_3 [\alpha\gamma] & \mathfrak{B}_1 = B_1 [\alpha\alpha] + B_2 [\alpha\beta] + B_3 [\alpha\gamma] \\ \mathfrak{A}_2 = A_1 [\alpha\beta] + A_2 [\beta\beta] + A_3 [\beta\gamma] & \mathfrak{B}_2 = B_1 [\alpha\beta] + B_2 [\beta\beta] + B_3 [\beta\gamma] \\ \mathfrak{A}_3 = A_1 [\alpha\gamma] + A_2 [\beta\gamma] + A_3 [\gamma\gamma] & \mathfrak{B}_3 = B_1 [\alpha\gamma] + B_2 [\beta\gamma] + B_3 [\gamma\gamma]\end{array}\right\} \tag{13}$$

Damit lassen sich die Gleichungen (11) zweifach neu schreiben:

$$\begin{array}{lcl}\delta x = [\alpha\alpha][1] + [\alpha\beta][2] + [\alpha\gamma][3] & & \delta x = \mathfrak{A}_1 k_1 + \mathfrak{B}_1 k_2 \\ \delta y = [\alpha\beta][1] + [\beta\beta][2] + [\beta\gamma][3] & \text{oder} & \delta y = \mathfrak{A}_2 k_1 + \mathfrak{B}_2 k_2 \\ \delta z = [\alpha\gamma][1] + [\beta\gamma][3] + [\gamma\gamma][3] & & \delta z = \mathfrak{A}_3 k_1 + \mathfrak{B}_3 k_2\end{array}\left.\right\} \begin{array}{c}(14)\,\alpha \\ \text{und} \\ (14)\,\mathfrak{A}\end{array}$$

Auch die Normalgleichungs-Coefficienten in (7) lassen sich nun noch anders darstellen:

$$\left.\begin{array}{ll}[\mathrm{I\,I}] = [A\,\mathfrak{A}] & [\mathrm{I\,II}] = [A\,\mathfrak{B}] \text{ oder } = [\mathfrak{A}\,B] \\ & [\mathrm{II\,II}] = [B\,\mathfrak{B}]\end{array}\right\} \tag{15}$$

Die nicht quadratischen Coefficienten z. B. [I II] können doppelt erhalten werden, was als Probe dient. Im einzelnen ist hiebei:

$$\left.\begin{array}{l}[A\,\mathfrak{B}] = A_1 \mathfrak{B}_1 + A_2 \mathfrak{B}_2 + \ldots \\ [\mathfrak{A}\,B] = \mathfrak{A}_1 B_1 + \mathfrak{A}_2 B_2 + \ldots\end{array}\right\} \tag{15 a}$$

Mit diesen Hilfsgrössen [1] [2] [3] und Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ nimmt die Ausgleichung folgenden Gang an:

1) Coefficienten A B . . . der Bedingungsgleichungen nach (1).
2) Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ . . . nach § 28. oder § 33.
3) Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ . . . nach (13).
4) Normalgleichungs-Coefficienten nach (15).
5) Auflösung der Normalgleichungen (7).
6) Hilfsgrössen [1] , [2] , [3] nach (12)
7) Verbesserungen δx , δy , δz nach (14) α } oder δx, δy δz nach (14) $\mathfrak{A}$.

§ 52. Fehlerquadratsummen und mittlere Fehler.

Nach (12) § 50. S. 147 haben wir:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] \tag{1}$$

Die Bestandteile $[v'\,v']$ und $[v''\,v'']$, welche von dem ersten Teil und von dem zweiten Teil der Ausgleichung herrühren, braucht man nicht aus den einzelnen v' und v'' auszurechnen, sondern man kann sie aus den Normalgleichungen ableiten.

Was zunächst den ersten Teil betrifft, so hat man alles hiezu Nötige nach (8) § 27. S. 85, nämlich für u Unbekannte:

$$[v'\,v'] = [l\,l\,.\,u] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \cdots \tag{2}$$

und auch für den zweiten Teil der Ausgleichung haben wir in § 41. bereits alle Formen kennen gelernt, in welche $[v''\,v'']$ gebracht werden kann, denn diese Formen lassen sich alle auf den neuen Fall übertragen, wenn man nur die Bedeutung der neuen Zeichen in § 50. und § 51. berücksichtigt.

Wir haben daher nach (4) und (5) § 41. S. 122:

$$[v''v''] = -[wk] = -w_1 k_1 - w_2 k_2 - \ldots \tag{3}$$

und

$$[v''v''] = \frac{w_1^2}{[\mathrm{I\,I}]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{[\mathrm{II\,II} . 1]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{[\mathrm{III\,III} . 2]} + \ldots \tag{4}$$

Obgleich diese Formeln nach Analogie von § 41. sofort angeschrieben werden können, weil es sich um die Summe $[v''v'']$ handelt, welche durch die Korrelatenausgleichung von § 51. zu einem Minimum gemacht wurde, mag es doch auch angenehm sein, diese Formeln unmittelbar nachzuweisen, wobei sich zugleich noch eine neue praktisch brauchbare Form (5) ergeben wird.

Die einzelnen v'', welche in (10) § 51. S. 150 gegeben sind, lassen sich mit Benützung der Hilfsgrössen [1] [2] [3] zunächst so darstellen:

$$v_1'' = \alpha_1 [1] + \beta_1 [2] + \gamma_1 [3]$$
$$v_2'' + \alpha_2 [1] + \beta_2 [2] + \gamma_2 [3]$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Also
$$\begin{aligned}[v''v''] = [\alpha\alpha][1][1] &+ 2[\alpha\beta][1][2] + 2[\alpha\gamma][1][3] \\ &+ [\beta\beta][2][2] + 2[\beta\gamma][2][3] \\ &+ [\gamma\gamma][3][3]\end{aligned}$$

Mit Benützung von (14) α § 51 S. 151 wird dieses:

$$[v''v''] = [1]\,\delta x + [2]\,\delta y + [3]\,\delta z \tag{5}$$

und mit (12) § 51. S. 151, wenn man zugleich nach k ordnet:

$$[v''v''] = (A_1\,\delta x + A_2\,\delta y + A_3\,\delta z)\,k_1 + (B_1\,\delta x + B_2\,\delta y + B_3\,\delta z)\,k_2$$

Die Coefficienten von k_1 und k_2 sind hier nichts anderes, als die linken Teile der Normalgleichungen (1) § 51. S. 148, d. h. es ist nun:

$$[v''v''] = -w_1 k_1 - w_2 k_2 = -[wk]$$

wie schon oben (3) geschrieben wurde; und daraus folgt (4) ganz ebenso wie die frühere analoge Gleichung in § 41.

Nachdem wir so die Bestandteile von $[vv]$ kennen gelernt haben, kann auch die Formel für den mittleren Fehler m zu einer mehr anschaulichen Bedeutung gebracht werden. Nach (6) § 49. ist nämlich nun:

$$m^2 = \frac{[vv]}{n - u + r} = \frac{[v'v'] + [v''v'']}{(n-u) + r}$$

Hiebei passen die Zähler und Nenner wieder in Teilen zusammen. Es ist nämlich:

$$\frac{[v'v']}{n-u} = m_1^2 \quad \text{und} \quad \frac{[v''v'']}{r} = m_2^2$$

wo m_1 den mittleren Fehler nur aus dem ersten Teil der Ausgleichung, und m_2 den mittleren Fehler nur aus dem zweiten Teil der Ausgleichung vorstellt.

Im allgemeinen werden m_1 und m_2 weder unter sich gleich, noch mit dem Gesamtmittelfehler m gleich ausfallen.

Wenn m_1 und m_2 sehr wesentlich verschieden ausfallen, so deutet das auf Fehlerquellen, welche in dem ersten oder in dem zweiten Teil verborgen geblieben sind.