



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

Kapitel II. Triangulierungs-Netze.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist auch klar geworden, dass *alle* Ausgleichungsaufgaben sich auf den Fall II. vermittelnde Beobachtungen, zurückführen lassen, wie wir schon am Anfang von § 12. S. 41 behauptet haben.

Aus diesem Grunde war es auch nur nötig, den Satz für den mittleren Fehler, betreffs der Division mit $n - u$ in (19) § 27. S. 87 für vermittelnde Beobachtungen zu beweisen; auf die übrigen Fälle könnte dieser Satz dann durch einfache Betrachtungen über die Zahl der Beobachtungen und der Unbekannten übertragen werden, wie z. B. für den allgemeinsten Fall V. in der vorstehenden Gleichung (10) geschehen ist.

Kapitel II.

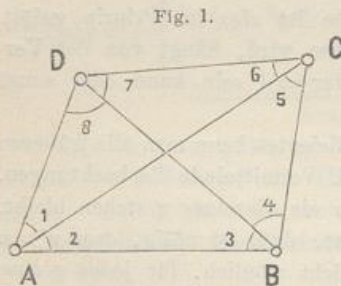
Triangulierungs-Netze.

Die Ausgleichung der Triangulierungsnetze ist eine der wichtigsten Aufgaben der M. d. kl. Q. und hat durch ihre Dringlichkeit am allermeisten zur Entwicklung der Ausgleichungstheorien beigetragen. Diese Ausgleichung geschieht in den meisten Fällen nach bedingten Beobachtungen, und wurde zum erstenmale von *Gauss* gelehrt im Jahre 1826 in der Abhandlung „supplementum theoriae combinationis“ (vgl. S. 4.).

Die erste Aufgabe zur Triangulierungsausgleichung besteht in der Aufstellung der Bedingungsgleichungen, mit welchen wir uns deshalb nun beschäftigen.

§ 57. Bedingungsgleichungen im Viereck.

Ehe wir für Dreiecksnetze im Allgemeinen die Bedingungen aufsuchen, welche zwischen den gemessenen Winkeln oder Richtungen bestehen, wollen wir den einfachen Fall eines Vierecks mit zwei Diagonalen vorausschicken, um an diesem Beispiele die Art der Behandlung zunächst kennen zu lernen.



In dem ebenen Viereck (Fig. 1.) seien die 8 einzelnen Winkel gemessen, welche mit 1, 2, 3...8 numeriert sind, es sei z. B. (1) der Winkel DAC und (2) sei der Winkel CAB . Es ist also angenommen, dass auf A zuerst nur AD und AC in einem Satze angezielt sind, dann in einem zweiten Satze AC und AB , oder kurz, es sind auf A die zwei *einzelnen Winkel* (1) und (2) gemessen, und nicht ein Satz mit den 3 Richtungen AD , AC und AB . (Der Fall von Richtungsmessungen wird erst nachher behandelt werden.)

Nachdem also über die Art der Messung Klarheit gegeben ist, überlegen wir, dass 8 Winkel für die eindeutige Konstruktion eines Vierecks zu viel sind; 4 Winkel würden ausreichen, um bei einer gegebenen Seite das Viereck zu konstruieren, es sind also 4 Winkel überschüssig, und diesen müssen 4 unter sich unabhängige Bedingungsgleichungen entsprechen.

Suchen wir diese Bedingungen auf, so sieht man zuerst, dass 4 geschlossene Dreiecke da sind, welche geben:

$$\text{Dreieck } A B D \quad (1) + (2) + (3) + (8) = 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{„ } B C D \quad (4) + (5) + (6) + (7) = 180^\circ \quad (2)$$

$$\text{„ } A D C \quad (1) + (6) + (7) + (8) = 180^\circ \quad (3)$$

$$\text{„ } A B C \quad (2) + (3) + (4) + (5) = 180^\circ \quad (4)$$

Diese 4 Gleichungen sind aber nicht von einander unabhängig; z. B. wenn man (1) und (2) addiert und (3) subtrahiert, so erhält man (4), oder allgemeiner, wenn 3 Dreiecke schliessen, so schliesst das 4te von selbst.

Man bemerkt auch, dass wenn die einzelnen Dreiecke auf 180° schliessen, auch von selbst das ganze Viereck auf 360° schliesst, d. h.:

$$(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) = 360^\circ \quad (5)$$

Durch diese letzte Gleichung in Verbindung mit irgend welchen zweien der Gleichungen (1)–(4) wird ebenfalls alles ausgedrückt, was über Winkelsummen in dem ebenen Viereck (Fig. 1.) gesagt werden kann.

Da wir also nur 3 unabhängige Winkelsummengleichungen gefunden haben, aber im Ganzen bei 8 Winkeln 4 Bedingungen bestehen müssen, müssen wir noch eine 4te Gleichung suchen, welche auch bald durch die Konstruktion nach Fig. 2. angedeutet wird.

Wenn nämlich auch die 4 Dreiecke in ihren Winkelsummen je auf 180° schliessen, so ist damit noch nicht gesichert, dass das Viereck als Ganzes schliesst, denn es kann bei der Konstruktion von der Basis $A B$ aus, etwa bei D ein fehlerzeigendes Dreieck $D_1 D_2 D_3$ entstehen, indem mit dem Dreieck $A B C$ begonnen wird, und dann die drei Strahlen $A D$, $B D$, $C D$ gezogen werden, welche im Allgemeinen sich nicht in einem Punkte schneiden werden.

Um auszudrücken, dass das fehlerzeigende Dreieck auf einen Punkt zusammen-schrumpft, kann man z. B. $B D_1 = B D_3$ setzen, d. h.:

$$B D_1 = \frac{A B \sin(1+2)}{\sin(8)}$$

$$B D_3 = \frac{A B \sin(2) \sin(5+6)}{\sin(5) \sin(7)}$$

Diese beiden einander gleich gesetzt geben:

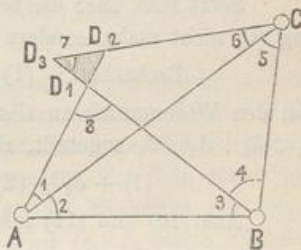
$$(B) \quad \frac{\sin(1+2) \sin(5) \sin(7)}{\sin(8) \sin(2) \sin(5+6)} = 1 \quad (6)$$

Dieses nennt man eine *Seitengleichung*, und zwar für B als Zentralpunkt, weil nach Fig. 1. die Gleichung (6) ausdrückt, dass $B A$ über $B D$ und $B C$ in sich selbst zurückgerechnet stimmen muss.

Dieses (6) ist nicht die einzige Form, in welcher das Schliessen des fehlerzeigenden Dreiecks ausgedrückt werden kann; man kann z. B. auch A als Zentralpunkt nehmen und ausdrücken, dass $A D_1 = A D_2$ werden soll, und das giebt:

$$(A) \quad \frac{\sin(3) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(6) \sin(8) \sin(3+4)} = 1 \quad (7)$$

Fig. 2.



Später werden wir sehen, dass es sogar 7 verschiedene Formen von Seitengleichungen in einem Viereck giebt, jedoch mag es hier genügen, wenigstens die nötige und genügende Zahl von Gleichungen gefunden zu haben, indem wir etwa (1) (2) (3) nebst (6) auswählen, und damit die schon zu Anfang erkannte Zahl von 4 unabhängigen Gleichungen haben.

Umformung der Bedingungsgleichungen.

In den bisherigen Gleichungen mögen (1), (2), (3) ... die Winkel überhaupt bezeichnen und z. B. die Gleichung (1) sagt, dass die Summe (1) + (2) + (3) + (8) den Betrag 180° erfüllen soll, was bei beobachteten Winkeln wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler nicht der Fall ist. Wir werden deshalb nun unterscheiden zwischen beobachteten Winkeln (1), (2), (3) ... und ausgeglichenen Winkeln [1], [2], [3] ... und Winkel-Verbesserungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3^*)$... in dieser Weise:

$$(1) + \delta_1 = [1] \quad , \quad (2) + \delta_2 = [2] \quad , \quad (3) + \delta_3 = [3] \dots \quad (8)$$

Als Vergleichung mit den allgemeinen Formeln von § 37. haben wir also die (1), (2), (3) entsprechend den dortigen l_1, l_2, l_3 und die [1], [2], [3] entsprechend den x_1, x_2, x_3 .

Die Summengleichung für (1), (2), (3), (8) giebt also nun:

$$\text{Ausgeglichen: } [1] + [2] + [3] + [8] - 180^\circ = 0 \quad (9)$$

Setzt man aber die beobachteten (1), (2), (3), (8) ein, so stimmt die Gleichung (9) nicht mehr, sondern es entsteht ein Widerspruch w :

$$\text{Beobachtet: } (1) + (2) + (3) + (8) - 180^\circ = w \quad (10)$$

Um den Widerspruch zu tilgen, werden den Beobachtungen gewisse Verbesserungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_8$ zugeteilt, also:

$$(1) + \delta_1 + (2) + \delta_2 + (3) + \delta_3 + (8) + \delta_8 - 180^\circ = 0 \quad (11)$$

Aus (10) und (11) folgt:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_8 + w = 180^\circ \quad (12)$$

Als Zahlenbeispiel wollen wir zu Fig. 1. folgende 8 Winkel als beobachtet annehmen, welche wir nach den 4 Dreiecken gruppieren:

$\begin{array}{rcl} (1) = 37^\circ 26' 41'' & & \\ (2) = 34 \quad 35 \quad 25 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}} \right\} 72^\circ 2' 6'' & \\ (3) = 41 \quad 17 \quad 34 & & \\ (8) = 66 \quad 40 \quad 24 & & \\ \hline 180^\circ 00' 04'' & & \\ w = + 4'' & & \end{array}$	$\begin{array}{rcl} (2) = 34^\circ 35' 25'' & & \\ (3) = 41 \quad 17 \quad 34 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} (2) \\ (3) \end{array}} \right\} 96^\circ 75' 36'' & \\ (4) = 55 \quad 58 \quad 2 & & \\ (5) = 48 \quad 9 \quad 2 & & \\ \hline 180^\circ 00' 03'' & & \\ w = + 3'' & & \end{array}$	$\left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (8) \end{array}} \right\} \quad (13)$
$\begin{array}{rcl} (4) = 55^\circ 58' 2'' & & \\ (5) = 48 \quad 9 \quad 2 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array}} \right\} 78^\circ 0' 28'' & \\ (6) = 29 \quad 51 \quad 26 & & \\ (7) = 46 \quad 1 \quad 27 & & \\ \hline 179^\circ 59' 57'' & & \\ w = - 3'' & & \end{array}$	$\begin{array}{rcl} (1) = 37^\circ 26' 41'' & & \\ (8) = 66 \quad 40 \quad 27 & \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (8) \end{array}} \right\} 112^\circ 41' 54'' & \\ (7) = 46 \quad 1 \quad 27 & & \\ (6) = 29 \quad 51 \quad 26 & & \\ \hline 180^\circ 00' 01'' & & \\ w = + 1'' & & \end{array}$	

*) Die Winkelverbesserungen werden hier δ genannt, weil das sonst für Beobachtungsverbesserungen von uns benützte Zeichen e für die nachher folgenden Richtungsverbesserungen vorbehalten werden soll.

Diesen 4 Dreiecken entsprechen nach (12) folgende 4 Bedingungsgleichungen:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_8 + 4'' = 0 \quad (14)$$

$$\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + 3'' = 0 \quad (15)$$

$$\delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7 - 3'' = 0 \quad (16)$$

$$(\delta_1 + \delta_6 + \delta_7 + \delta_8 + 1'' = 0) \quad (17)$$

davon sind aber, wie wir schon zu Anfang gesehen haben, nur 3 Gleichungen unabhängig (was wir dadurch angedeutet haben, dass die letzte (17) in Klammer gesetzt wurde).

Nach diesem müssen wir auch die Seitengleichung (6) auf lineare Form bringen, und rechnen dazu zunächst logarithmisch aus:

	<i>log sin</i>	Diff. für 10''	
(5) = 48° 09' 02''	9.872 0983	189	(18)
(7) = 46 01 27	9.857 1109	203	
(1 + 2) = 72 2 6	9.978 2924	69	
	9.707 5016		
(8) = 66° 40' 27''	9.962 9694	90	(19)
(2) = 34 35 25	9.754 1220	306	
(5 + 6) = 78 00 28	9.990 4169	45	
	9.707 5083		

$$\text{Probe } 9.707 5016 - 9.707 5083 = -0.000 0067$$

$$\text{oder in Einheiten der 7. Stelle: } w = -67 \quad (19)$$

Um eine Beziehung zwischen diesem logarithmischen Widerspruche und den Winkelverbesserungen δ herzustellen, haben wir bei der logarithmischen Rechnung (18) die logarithmischen Differenzen für 10'' aus der dabei benützten logarithmisch-trigonometrischen Tafel notiert, z. B. 189 für den Winkel (5) = 48° 9'. Wir wissen also, dass eine Änderung dieses Winkels um 1'' den Betrag 18,9 Einheiten der letzten Stelle giebt, oder eine Winkeländerung = δ_5 Sekunden wird 18,9 δ_5 letzte Einheiten bringen. Ebenso verhält es sich bei den anderen Winkeln, und man kommt daher bald zu dem Schluss, dass die Winkeländerungen $\delta_5, \delta_7, \delta_1 + \delta_2, \dots$ den Widerspruch $w = -67$ in folgender Weise zusammenbringen müssen:

$$+18,9 \delta_5 + 20,3 \delta_7 + 6,9 (\delta_1 + \delta_2) - 9,0 \delta_8 - 30,6 \delta_2 - 4,5 (\delta_5 + \delta_6) - 67 = 0 \quad (20)$$

Dabei ist in Einheiten der 7. Logarithmenstelle gerechnet, was aber nicht wesentlich ist; rechnet man in Einheiten der 6. Stelle, so erhält man:

$$+1,89 \delta_5 + 2,03 \delta_7 + 0,69 (\delta_1 + \delta_2) - 0,90 \delta_8 - 3,06 \delta_2 - 0,45 (\delta_5 + \delta_6) - 6,7 = 0 \quad (21)$$

Wenn man dieses zusammenfasst und ordnet, so erhält man:

$$+0,69 \delta_1 - 2,37 \delta_2 + 1,44 \delta_5 - 0,45 \delta_6 + 2,03 \delta_7 - 0,90 \delta_8 - 6,70 = 0 \quad (22)$$

Man kann überhaupt eine solche Gleichung mit jeder beliebigen Zahl multiplizieren oder dividieren, ohne deren sachliche Bedeutung für die Ausgleichung zu ändern, und aus formellen Gründen ist es sehr nützlich, die Coefficienten der Seitengleichungen möglichst nahe = 1 zu machen, weil auch die Summengleichungs-Coefficienten in (14)–(17) alle = 1 sind.

Rechenprobe für das Absolutglied der Seitengleichung.

Die logarithmisch-trigonometrische Rechnung (18) lässt man nicht gern ohne Probe, weil ein Fehler im Absolutgliede w sich durch die ganze Rechnung fort-

pflanzen und erst am Schlusse in schlimmer Weise zu Tage treten würde. Abgesehen von der unmittelbaren Doppelrechnung nach demselben Verfahren hat man hier bei *sphärischen* Dreiecken die erwünschte Probe, dass die Seitengleichung sowohl für die unmittelbaren Dreieckswinkel gilt, als auch für die nach dem Legendreschen Satze um je $\frac{1}{3}$ Excess verminderten Dreieckswinkel. Da in unserem Falle (13)–(18) nur ein *ebenes* Viereck angenommen ist, können wir diese Probe hier nicht zeigen, behalten uns aber vor, dieselbe später zu behandeln (§ 59.).

Theoretische Berechnung der Seitengleichungs-Coefficienten.

Obgleich die Coefficienten 18,9, 20,3 u. s. w. der linearen Seitengleichung (20) sich unmittelbar empirisch als logarithmische Sinusdifferenzen ergeben haben, ist es doch nicht überflüssig, diese Coefficienten auch theoretisch zu berechnen.

Wir wollen dazu etwas allgemeiner eine Seitengleichung so annehmen:

$$\frac{\sin(1)}{\sin(2)} \frac{\sin(3)}{\sin(4)} \dots = 1 \quad (23)$$

oder in logarithmischer Form:

$$\log \sin(1) - \log \sin(2) + \log \sin(3) - \log \sin(4) \dots = 0$$

Dieses soll sein, ist aber im Allgemeinen nicht erfüllt, sondern giebt einen logarithmischen Widerspruch w :

$$\log \sin(1) - \log \sin(2) + \log \sin(3) - \log \sin(4) \dots = w \quad (24)$$

Der Widerspruch w soll durch Zufügung der Verbesserungen $\delta_1, \delta_2 \dots$ zu den beobachteten Winkeln (1), (2) ... getilgt werden, d. h. es soll werden:

$$\log \sin((1) + \delta_1) - \log \sin((2) + \delta_2) + \dots = 0$$

Hiezu findet man nach dem Taylorschen Satze:

$$\log \sin((1) + \delta_1) = \log \sin(1) + \mu \cotg(1) \frac{\delta_1}{\rho} \quad (25)$$

Hiebei bedeutet $\mu = 0,43429 \dots$ den logarithmischen Modulus und der Nenner $\rho = 206\,265''$ ist zugesetzt, damit δ_1 im letzten Gliede in Sekunden gerechnet werden kann. Durch Ausrechnung findet man:

$$\begin{aligned} \log \frac{\mu}{\rho} &= 4,32336 - 10 & \frac{\mu}{\rho} &= 0,0000021\,055 \\ \text{oder} \quad \log \frac{\mu}{\rho} &= 1,32336 & \frac{\mu}{\rho} &= 21,055 \text{ für 7. log. Stelle} \\ &0,3236 & 2,1055 & \text{ „ 6. „ „ } \end{aligned} \quad (26)$$

Wir wollen den Coefficienten von δ_1 in (25) kurz mit a_1 bezeichnen, und haben dann:

$$\log \sin((1) + \delta_1) - \log \sin(1) = a_1 \delta_1 \text{ mit } a_1 = \frac{\mu}{\rho} \cotg(1) \quad (27)$$

Nehmen wir als Beispiel die Berechnung (18), so ist:

$$\begin{aligned} (5) &= 48^\circ 09' 02'' & \log \cotg(5) &= 9,95214 \\ \log(\mu : \rho) &= 1,32336 & \text{für 7. Stelle} \\ \log a_5 &= 1,27550 \\ a_5 &= 18,858 & \text{für 7. Stelle.} \end{aligned}$$

Dieses ist mit 18,9 in (20) hinreichend übereinstimmend.

Wenn man alle Coefficienten so ausrechnet, so erhält man statt (20):

$$+18,858 \delta_5 + 20,222 \delta_7 + 6,827(\delta_1 + \delta_2) - 9,079 \delta_8 - 30,532 \delta_2 - 4,472(\delta_5 + \delta_6) - 67,0 \quad (28)$$

Offenbar ist es streng genommen überflüssig, in solcher Weise die Coefficienten genauer zu berechnen als sie diejenige Logarithmentafel liefert, mit welcher man den Widerspruch w rechnet, oder mit welcher man nachher das Dreiecksnetz selbst zu rechnen beabsichtigt; indessen da man wegen der vielen im Laufe der langen Rechnung sich häufenden Abrundungsfehler die Coefficienten oft am Anfang mit mehr Stellen schreibt, als man schliesslich braucht, so kann man bei sehr ausgedehnten Netzen wohl lieber die Coefficienten nach (26) ausrechnen, als die weiteren Stellen mit Nullen ausfüllen.

Richtungs-Beobachtungen.

Bisher haben wir angenommen, man habe reine *Winkelmessungen*, d. h. in jedem Messungssatze nur *zwei* Sichten, so dass in Fig. 3. die 8 einzelnen Winkel $DAC = (1)$, $CAB = (2)$ u. s. w. gemessen sind.

Statt dessen wollen wir nun die neue Annahme machen, es sei auf jedem Punkte ein voller Satz von Richtungen gemessen, also z. B. in A seien die drei Sichten AD , AC , AB gleichartig eingeschnitten. (Natürlich kann man auch annehmen, es seien mehrere solche Sätze gemessen, und in ein Mittel vereinigt.)

Dann hat man statt 8 Winkeln 12 Richtungen, wie in Fig. 3. an den Pfeilspitzen angeschrieben ist.

Wenn man wie bisher eine Winkelverbesserung mit δ bezeichnet und die Richtungsverbesserungen der beiden Winkelschenkel nun mit v_1 und v_2 bezeichnet, so ist lediglich δ der Differenz $v_2 - v_1$ gleich zu setzen, also in Fig. 3.:

$$\delta_1 = v_2 - v_1, \quad \delta_2 = v_3 - v_2, \quad \delta_1 + \delta_2 = v_3 - v_1 \text{ u. s. w.}$$

Auf diese Weise gehen die früheren Gleichungen (14)–(16) und (21) in folgende über:

$$(v_3 - v_1) + (v_5 - v_4) + (v_{12} - v_{11}) + 4'' = 0$$

$$(v_3 - v_2) + (v_6 - v_4) + (v_8 - v_7) + 3'' = 0$$

$$(v_6 - v_5) + (v_9 - v_7) + (v_{11} - v_{10}) - 3'' = 0$$

$$1,89(v_3 - v_7) + 2,03(v_{11} - v_{10}) + 0,69(v_3 - v_1) - 0,90(v_{12} - v_{11}) - 3,06(v_3 - v_2) - 0,45(v_9 - v_7) - 6,7 = 0$$

Nach den Nummern geordnet und bzw. zusammengefasst giebt dieses:

$$-v_1 + v_3 - v_4 + v_5 - v_{11} + v_{12} + 4'' = 0 \quad (29)$$

$$-v_2 + v_3 - v_4 + v_6 - v_7 + v_8 + 3'' = 0 \quad (30)$$

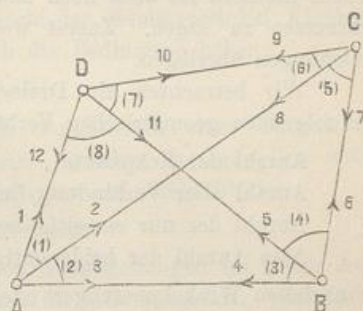
$$-v_5 + v_6 - v_7 + v_9 - v_{10} + v_{11} - 3'' = 0 \quad (31)$$

$$-0,69v_1 + 3,06v_2 - 2,37v_3 - 1,44v_7 + 1,89v_8 - 0,45v_9 - 2,03v_{10} + 2,93v_{11} - 0,90v_{12} - 6,7 = 0 \quad (32)$$

Diese 4 Gleichungen (29)–(32) sind der Richtungs-Ausgleichung des Vierecks (Fig. 3.) zu Grunde zu legen.

In jeder dieser Gleichungen (29)–(32) ist die algebraische Summe aller Coefficienten gleich Null, nämlich in (29) bis (31): $3 - 3 = 0$ und in (32): $+7,88 - 7,88 = 0$.

Fig. 3.



Dieses ist nicht zufällig, sondern tritt bei Bedingungsgleichungen für Richtungs-
messungen immer ein, wie aus der Entstehung der Gleichungen leicht zu ersehen
ist. Auch die Richtungsverbesserungen v selbst geben, bei gleichen Gewichten, stations-
weise addiert stets die Summen Null, wie am Schluss des nächsten § 58. S. 176—177
ausführlicher gezeigt werden wird.

§ 58. Allgemeine Betrachtung der Bedingungsgleichungen.

Mit dem was im vorhergehenden § 57. über Bedingungsgleichungen gelehrt wurde, kann man bereits an die Ausgleichung kleiner Netze, wie in § 59. oder § 60. gehen, indessen ist doch noch manches weitere über Bedingungsgleichungen in Dreiecksnetzen zu sagen. Zuerst wollen wir die *Zahl* der unabhängigen Bedingungsgleichungen überlegen.

Wir betrachten ein Dreiecksnetz, in welchem *eine* Grundlinie gemessen ist, mit folgenden geometrischen Verhältnissen:

Anzahl der Eckpunkte	p	} (1)
Anzahl aller Verbindungslinien	l	
Anzahl der nur <i>einseitig</i> beobachteten Verbindungslinien . . .	l'	
Also Anzahl der beiderseitig beobachteten Verbindungslinien	$l - l'$	

Je nachdem Winkelmessungen oder Richtungsmessungen vorliegen, habe man:

Anzahl der Winkelmessungen W (2)

oder Anzahl der Richtungsmessungen R (3)

Die Richtungsmessungen sollen hierbei für jede Station in je einem vollen Satze ausgeführt sein.

Wir wollen nun zuerst annehmen, dass man Winkelmessungen habe, und nachher den Fall der Richtungsmessungen behandeln.

I. Winkelmessungen.

Die Anzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen ist gleich der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen, denn jede überschüssige Beobachtung giebt eine selbständige Messungsprobe. Wir bezeichnen:

Anzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen r (4)

Die Anzahl der notwendigen Winkel findet man so: Unter Annahme einer Basis liegen die zwei ersten Punkte, nämlich die beiden Basis-Endpunkte, ohne Winkelmessungen fest, und jeder weitere Punkt braucht zur Anfügung an die gegebenen Punkte 2 Winkel, also:

		Basis mit 2 Punkten verlangt	0 Winkel
(p - 2) Punkte	{	der 3te Punkt verlangt	2 "
		" 4te " "	2 "
		"	
		" pte " "	2 "
		Summe	0 + (p - 2) 2 = 2 p - 4 Winkel

Wenn also W Winkel gemessen sind, so sind $W - (2p - 4)$ überschüssig oder man hat:

$$r = W - 2p + 4 \text{ Bedingungsgleichungen.} \quad (5)$$

Diese Bedingungsgleichungen teilen sich in zwei wesentlich verschiedene Gattungen, nämlich Winkelgleichungen und Seitengleichungen.

Die Winkelgleichungen zerfallen abermals in zwei verschiedene Arten, nämlich 1) Horizontgleichungen oder Stationsgleichungen, und 2) Dreiecksgleichungen oder allgemeiner Polyongleichungen.

Als Beispiele von Horizontgleichungen haben wir in der nachfolgenden Fig. 3. S. 174 die zwei Horizonte um Oggersheim und um Speyer; es sind auf Speyer die 5 einzelnen Winkel (12), (15), (16), (19), (22) gemessen, woraus die Probe entsteht:

$$(12) + (15) + (16) + (19) + (22) = 360^\circ$$

und ähnlich bei Oggersheim.

Oder wenn z. B. in demselben Netze (Fig. 3. S. 174) auf Donnersberg ausser den zwei einzelnen Winkeln (1) und (27) auch noch der Summenwinkel Klobberg-Calmit = (28) gemessen wäre, so würde man noch die Bedingung haben:

$$(1) + (27) - (28) = 0$$

Allgemeiner kann man über Horizontgleichungen sagen: Auf einer Station mit s Strahlen sind $s - 1$ Winkel zur Festlegung dieser Strahlen unumgänglich nötig; sind mehr Winkel, etwa n Winkel gemessen, so hat man auf dieser Station

$$n - s + 1 \text{ Stationsgleichungen.} \quad (6)$$

Diese Art von Gleichungen tritt bei grossen Ausgleichungen im Netze meist nicht auf, da man sie auf den einzelnen Stationen für sich behandelt. (Bei Richtungsbeobachtungen in ganzen Sätzen giebt es überhaupt keine Stationsgleichungen.) Die zweite Art der Winkelgleichungen betrifft zuerst die Summen $(1) + (2) + (3) = 180^\circ$ bzw. $180^\circ + \text{sphär. Excess}$, in den einzelnen Dreiecken, dann aber auch Viereckssummen $(1) + (2) + (3) + (4) = 360^\circ$ und allgemeiner $(1) + (2) + \dots + (n) = (n - 2) 180^\circ$ u. s. w.

Wenn man die Zahl dieser Gleichungen aufsuchen will, so bemerkt man zuerst, dass *einseitig* beobachtete Linien hier nicht in Betracht kommen, z. B. in einem Dreieck, in welchem nur auf zwei Ecken Messungen gemacht sind, hat man nur zwei Winkel, folglich keine Summenprobe u. s. w.

Daraus folgt weiter, dass auch solche *Punkte*, welche nur durch *einseitig* beobachtete Linien mit anderen Punkten zusammenhängen, d. h. die entweder nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnittenen Punkte, bei der Abzählung der Winkelgleichungen nicht in Betracht kommen.

Die Anzahl der unabhängigen Dreiecksgleichungen ist im allgemeinen *nicht* schlechthin gleich der Anzahl der Dreiecke selbst, auch wenn die *einseitig* beobachteten Seiten ausgeschieden sind, denn eine Dreiecksgleichung kann in der Summe oder Differenz anderer solcher Gleichungen bereits enthalten sein, wie wir schon im vorigen § 57. bei (1)–(4) S. 165 gesehen haben. Auch hat sich dort gezeigt, dass eine Vierecksgleichung (5) in Verbindung mit 2 Dreiecksgleichungen dasselbe ausdrücken kann, wie 3 einzelne Dreiecksgleichungen.

Wenn man sich nach diesem Beispiele überzeugt hat, dass jede Polyongleichung denselben Dienst leistet, wie eine Dreiecksgleichung, insofern verschiedenartige Formierung der fraglichen Polyongleichungen möglich ist, so kommt man auch zur Bestimmung der Anzahl der unabhängigen Polyongleichungen in folgender Weise: Man denkt sich einen geschlossenen Zug über alle p Punkte gelegt. Dieser Zug umfasst auch p Linien. Wenn man l Linien hat, so sind $l - p$ Linien von dem Zuge noch nicht getroffen, und jede dieser Linien giebt eine neue Gleichung. Also ein

Polygonzug mit p Linien giebt eine Gleichung, die übrigen $l - p$ Linien geben $l - p$ Gleichungen, man hat also im ganzen:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + l - p \text{ Dreiecksgleichungen} \\ \text{(allgemeine Polyongleichungen)} \end{array} \right\} \quad (7)$$

Dieses gilt, wenn die l Linien alle hin und her gemessen sind, wenn darunter l' einseitig gemessene Linien sind, so hat man statt (7):

$$1 + (l - l') - p \text{ Dreiecksgleichungen oder Polyongleichungen.} \quad (8)$$

Dabei sind aber auch etwaige nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnittene Punkte unter den p Punkten nicht mitzuzählen.

Wir fanden noch ein zweites Verfahren zum Ab-

zählen der Dreiecksgleichungen, nämlich so: Man zählt die Anzahl \mathcal{A} aller geschlossenen Dreiecke und dann die Anzahl S aller Diagonalschnitte, dann ist die Anzahl der unabhängigen Dreiecksgleichungen:

$$(\mathcal{A} - S) \text{ Dreiecksgleichungen} \quad (9)$$

Z. B. in Fig. 1. hat man 11 geschlossene Dreiecke und 2 Diagonalschnitte, also $11 - 2 = 9$ unabhängige Dreiecksgleichungen, was auch mit der Regel (7) stimmt, indem $l = 15$ und $p = 7$ also $1 + l - p = 9$.

Oder wenn man in Fig. 2. auch noch AG zieht, so wird die Anzahl der geschlossenen Dreiecke um 3 vermehrt (EAG , FAG , BAG) und es kommen noch zwei Diagonalschnitte auf EF und DF hinzu,

es wird also dann $\mathcal{A} = 14$, $S = 4$ also $\mathcal{A} - S = 10$ Dreiecksgleichungen, was mit $16 + 1 - 7 = 10$ nach (7) stimmt.

Die Regel (9), deren Begründung nach dem Anblick von Fig. 2. sich leicht allgemein geben lässt, ist namentlich bei den gewöhnlichen Dreiecksnetzen der Praxis, wo man die einzelnen Dreiecke ohnehin alle aufsuchen muss, sehr bequem.

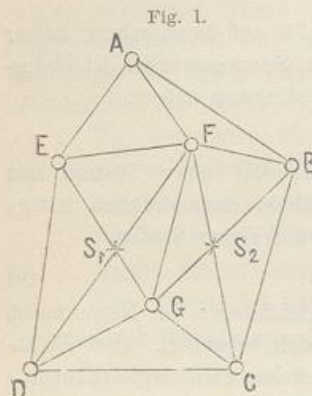
Wir gehen über zu den Seitengleichungen.

Die Zahl der Seitengleichungen erhält am besten aus folgender Betrachtung: Man unterscheidet „Dreiecksnetz“ und „Dreieckskette“, indem man Dreieckskette eine solche Aneinanderreihung von Dreiecken nennt, bei welcher man von irgend einem Dreieck zu einem andern nur auf *einem* bestimmten Weg gelangen kann, während bei einem Dreiecksnetz verschiedene Wege möglich sind. Nach dieser Auffassung ist ein Viereck mit einer Diagonale eine Kette, ein Viereck mit zwei Diagonalen ein Netz. Ob die Seiten sich schneiden oder nicht, ist nicht entscheidend; wenn die Seiten sich schneiden, hat man jedenfalls ein „Netz“, es giebt aber auch „Netze“, ohne Diagonalschnitte, z. B. mit Centralsystemen, vgl. die nachfolgende Fig. 3.

Wenn man in einer Kette noch *einen* weiteren Winkel misst, wodurch eine Sicht eingefügt wird, welcher die Kette zum Netz macht, so entsteht insofern eine neue Bedingungsgleichung, als man die Länge der neu eingefügten Seite nun zweifach ausdrücken kann. Jede nicht zum Zusammenhang der Kette nötige Seite giebt eine solche Seitengleichung. Eine Dreieckskette hat keine Seitengleichungen, es folgt also die Regel:

Die Anzahl der Seitengleichungen eines Dreiecksnetzes ist gleich der Anzahl von Seiten, welche gestrichen werden müssen, damit das Netz in eine Kette übergeht.

Um eine Formel hiefür zu bilden, überlegt man, dass zum Zusammenhang der



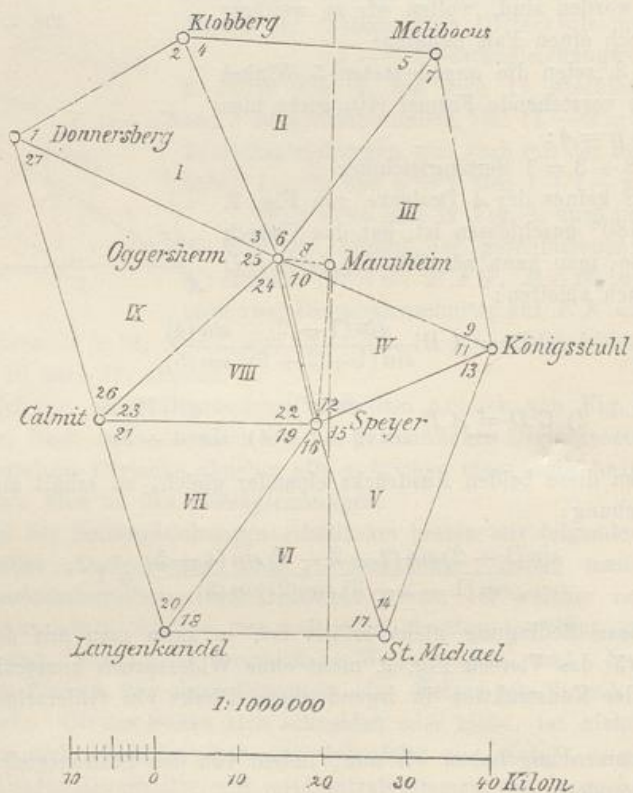
unter den p Punkten eine Anzahl p' nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, so hat man:

$$\left. \begin{array}{l} l - 2p + 3 \text{ Seitengleichungen,} \\ l - l' - (p - p') + 1 \text{ Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ r = 2l - l' - 3p + p' + 4 \\ r = W - 2p + 4 \end{array} \right\} \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \quad (12)$$

Beispiel eines Dreiecksnetzes mit Winkelbeobachtungen.

In der nachstehenden Fig. 3., welche ein badisches Dreiecksnetz vorstellt, sind 27 einzelne Winkel gemessen, und es handelt sich um die Aufsuchung der Bedingungsgleichungen.

Fig. 3.
(Der Punkt Mannheim gehört nicht zu dem Netze.)



$W = 27$ Winkel,
 $p = 9$ Punkte,
 $l = 17$ Linien;

$l - 2p + 3 = 2$ Seitengleichungen,
 $l - p + 1 = 9$ Dreiecksgleichungen,
Ogg. u. Sp. = 2 Horizonte
 $W - 2p + 4 = 13$ Gleichungen.

Nach den Regeln (11) haben wir in diesem Netze 2 Seitengleichungen und 9 Dreiecksgleichungen, ferner noch den unmittelbaren Anblick in Oggersheim und Speyer je eine Horizontgleichung.

Es ist auch nicht schwer, diese $2 + 9 + 2$ Gleichungen wirklich aufzustellen:

Die Horizonte in Oggersheim und in Speyer geben:

$$\left. \begin{aligned} (3) + (6) + (8) + (10) + (24) + (25) - 360^\circ &= 0 \\ (12) + (15) + (16) + (19) + (22) - 360^\circ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die 9 Dreieckswinkelgleichungen entsprechen einfach den 9 Dreiecken I, II, III ... IX, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} (1) + (2) + (3) - (180^\circ + \text{sphär. Excess}) &= 0 \\ (4) + (5) + (6) - \dots &= 0 \\ \dots &\dots \\ (25) + (26) + (27) - (180^\circ + \text{sphär. Excess}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die zwei Seitengleichungen beziehen sich auf die Centralpunkte Oggersheim und Speyer, es wird z. B. ausgedrückt, dass von der Basis Oggersheim-Speyer mit Sinusrechnung über die Dreiecke VIII, IX, I, II, III, IV die Basis wieder herauskommen muss, also:

$$\frac{\text{Ogg.-Sp. } \sin(22) \sin(26) \sin(1) \sin(4) \sin(7) \sin(11)}{\sin(23) \sin(27) \sin(2) \sin(5) \sin(9) \sin(12)} = \text{Ogg.-Sp.},$$

in gleicher Weise behandelt man auch die Dreiecke um den Centralpunkt Speyer, und die beiden so entstehenden Seitengleichungen sind:

$$\left. \begin{aligned} (O) \quad \frac{\sin(12) \sin(9) \sin(5) \sin(2) \sin(27) \sin(23)}{\sin(11) \sin(7) \sin(4) \sin(1) \sin(26) \sin(22)} &= 1 \\ (S) \quad \frac{\sin(10) \sin(13) \sin(17) \sin(20) \sin(23)}{\sin(11) \sin(14) \sin(18) \sin(21) \sin(24)} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Damit haben wir in (13), (14), (15) die $2 + 9 + 2 = 13$ Gleichungen, welche der Ausgleichung des Netzes mit den 27 einzelnen Winkelmessungen zu Grunde zu legen sind.

(Die vollständig durchgeführte Ausgleichung dieses Beispiels war in unseren 3 früheren Auflagen enthalten. Diesemal haben wir die Durchrechnung des Beispiels nicht mehr aufgenommen, weil Ausgleichungen mit einzelnen Winkelmessungen in diesem Sinne, in neuerer Zeit immer mehr in Abgang kommen.)

II. Richtungsmessungen.

Nachdem wir im Vorstehenden die Aufstellung der Bedingungsgleichungen für Winkelmessungen behandelt haben, ist es nicht schwer, davon auch auf Richtungsmessungen überzugehen, welche in der heutigen trigonometrischen Praxis die Hauptrolle spielen. Trotzdem ist beim Aufstellen der Bedingungsgleichungen immer (wenigstens in Gedanken) die Winkelform massgebend, und erst von da geht man auf Richtungen über.

Da wir den Grundgedanken des Übergangs von Winkelverbesserungen δ auf Richtungsverbesserungen v bereits an dem Vierecksbeispiel des vorigen § 57. S. 169 gezeigt haben, nämlich Zerlegung $\delta = v_2 - v_1$ u. s. w., so brauchen wir nicht mehr viel dazu zu sagen, sondern nur die Sache noch etwas allgemeiner aufzufassen.

Wir setzen volle Richtungssätze voraus, (oder Mittelbildung aus mehrfachen vollen Richtungssatzmessungen, was offenbar hier dasselbe ist), und zwar auf allen Stationen gleichgewichtig. Etwaige ungleiche Wiederholungen der Sätze auf verschiedenen Stationen würde verschiedene Gewichte in die Ausgleichung einführen, wovon aber jetzt nicht die Rede sein soll.

Bei solcher Messungsart fallen die Horizontgleichungen, mit welchen wir es bei der Ausgleichung von Winkelmessungen zu thun hatten, einfach weg.

Wir denken uns eine Station einerseits mit W Winkelmessungen, ohne Horizontproben, und andererseits dieselben Sichten mit R Richtungsmessungen. Dann ist offenbar $R = W + 1$, d. h. auf jeder Station ist eine Richtung mehr als die unabhängigen Winkel und in einem ganzen Netze mit p Punkten und W Winkeln, ohne Horizontproben, oder R Richtungen ist offenbar

$$W = R - p \quad (16)$$

dabei sind aber etwaige nur *vorwärts* eingeschnittene Punkte unter p nicht mitzuzählen.

Bedingungsgleichungen für Richtungsmessungen.

R Richtungen, p Punkte, l Linien hin und her beobachtet. Mit (16) geht (11) über in:

$$\left. \begin{array}{l} l - 2p + 3 \text{ Seitengleichungen,} \\ l - p + 1 \text{ Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ r = 2l - 3p + 4 \\ r = R - 3p + 4 \end{array} \right\} \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \quad (17)$$

Dabei ist $2l = R$, denn wenn alle Linien hin und her gemessen sind, so hat man doppelt so viel Richtungen als Linien.

Wenn unter den l Linien eine Anzahl l' nur einseitig beobachtet ist, und unter den p Punkten eine Anzahl p' nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, so hat man:

$$\left. \begin{array}{l} l - 2p + 3 \text{ Seitengleichungen,} \\ (l - l') - (p - p') + 1 \text{ Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ r = 2l - l' - 3p + p' + 4 \text{ Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array} \right\} \quad (18)$$

Die beiden Abzählungsformeln $l - p + 1$ Dreiecksgleichungen und $l - 2p + 3$ Seitengleichungen werden als „Gauss'sche Lehrsätze“ mitgeteilt und bewiesen in Gerlings Ausgleichungsrechnungen, Hamburg 1843, S. 273 und S. 277 unter Citat von „Beiträge zur Geographie Kurhessens u. s. w.“ von Gerling, Cassel 1839, S. 166.“

Eine andere Anleitung zur Abzählung der Bedingungsgleichungen nach geometrischer Anschauung, speziell für Richtungsmessungen, giebt Bessel auf S. 139 und 140 der Gradmessung in Ostpreussen.

Zur besonderen Behandlung der nur *einseitig* eingeschnittenen Linien und Punkte in (12) und (17) wurden wir durch entstandenes Bedürfnis geführt.

Wenn die Dreiecksnetz-Bedingungen sich auf Richtungen beziehen, so ist in jeder Bedingungsgleichung die algebraische Summe der Coefficienten gleich Null, und die Richtungsverbesserungen v geben stationsweise addiert ebenfalls je die Summe gleich Null; vorausgesetzt dass alle Messungsgewichte *gleich* sind.

Diese zwei Sätze lassen sich nach §. 57 und 58 und nach §. 39 sofort einsehen: Wenn eine auf Winkel bezogene Bedingungsgleichung etwa heisst:

$$a\delta + a'\delta' + a''\delta'' + \dots = 0$$

wo $\delta, \delta', \delta'' \dots$ Winkelverbesserungen sind, so lautet die entsprechende Gleichung für Richtungsverbesserungen v_l und v_r :

$$a(v_r - v_l) + a'(v_r' - v_l') + a''(v_r'' - v_l'') + \dots = 0$$

$$a v_r - a v_l + a' v_r' - a' v_l' + a'' v_r'' - a'' v_l'' + \dots = 0$$

$$\text{hier ist: } a - a + a' - a' + a'' - a'' + \dots = 0$$

Was die v betrifft, so sind deren Formeln in (9) § 39. S. 119 gegeben; wenn man dort addiert, so bekommt man:

$$[v] = [a] k_1 + [b] k_2 + [c] k_3$$

Versteht man nun unter $[v]$ die Summierung für je eine Station, so gelten auch $[a]$ $[b]$ $[c]$ nur stationsweise, sind also = Null, folglich auch stationsweise $[v] = \text{Null}$.

Was die wirkliche Aufstellung der Bedingungsgleichungen betrifft, so werden die verschiedenen Winkelsummen-Gleichungen niemals Schwierigkeiten bereiten, und wenn das Netz sich in lauter einzelne Dreiecke zerlegen lässt, so werden auch die Seitengleichungen als Sinusprodukte für Vierecksdiagonalen oder Centralsysteme nach Anleitung von § 57. S. 167 und des vorstehenden Beispiels (Fig. 3. S. 174) sich leicht ergeben. Etwas schwieriger kann die Sache werden bei Punkten, welche entweder nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, doch kann darüber hier nichts allgemeines gesagt werden; auch wird es sich oft empfehlen, solche Punkte von der Gesamtausgleichung auszuschliessen, und nur nachher einzuschalten.

Dagegen ist hier noch ein allgemeines Wort zu sagen über *Kranz-Systeme*, d. h. solche von Dreiecksketten umschlossene Polygone, welche einen leeren Raum zwischen sich fassen. In der Gesamtausgleichung der Preussischen Landesaufnahme haben solche Systeme eine wichtige Rolle gespielt, und wir wollen daher die geschichtliche Entwicklung, welche diese Anlage und die zugehörigen Ausgleichungen genommen haben, vorführen nach einer Mitteilung von Major *Haupt* in den „astron. Nachrichten“ 107. Band, Nr. 2549—2550, (Sept. 1883):

Als in den 60er Jahren dieses Jahrhunderts bei der preussischen Landes-Triangulierung Ketten, welche einen von Dreiecken freien Landesteil umspannten, wieder in sich zusammen schlossen, stellte sich der Übelstand heraus, dass trotz der Aufstellung aller vorhandenen und notwendigen Winkelgleichungen und Seitengleichungen identische Punkte, von verschiedenen Seiten her berechnet, *nicht* dieselben geographischen Coordinaten erhielten, und dass der von Dreiecken freie innere Raum, das Polygon *nicht* die seinem Inhalt entsprechende Winkelsumme erhielt, denn es fehlten die drei sogenannten Polygonegleichungen.

Der erste, welcher eine Methode zur Aufstellung dieser Polygon-Gleichungen gab, war der Premier-Lieutenant v. *Prondzynski* („Astr. Nachr.“ Nr. 1690, 71. Band, 1868, S. 145—154 und Nr. 1782, 75. Band, 1869, S. 81—90). Er zog Richtungskorrekturen der jüngsten Kette durch die ganzen Längen-, Breiten- und Azimut-Rechnungen hindurch, und bildete so drei neue Gleichungen.

Demnächst gab Professor *Börsch* eine andere, aber im allgemeinen nicht einfachere Methode an („Astr. Nachr.“ Nr. 1697 und 1704, 71. Band (1868), S. 265—268 und S. 379—380), welche darauf gegründet ist, den inneren freien Raum zwischen den verschiedenen Ketten mit zu rechnenden Dreiecken zu überspannen und so die fehlenden Gleichungen aufzustellen.

Hier ist auch *Zachariae*: „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten“ deutsch von Lamp, Berlin 1878) S. 156, zu zitieren, wo für „Kranz-Systeme“ die nötigen Gleichungen durch Einführung fingierter Messungen und Wiederelimination derselben gewonnen werden.

Diese Methoden wurden bei der preussischen Landes-Triangulation nicht benutzt; das in Wirklichkeit von dieser Behörde angewandte Verfahren wurde von dem damaligen Hauptmann *Schreiber* (jetzigen General) angegeben, dasselbe liefert zwei

Gleichungen durch die Projektion der inneren Polygonkranz-Begrenzung auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges, sphäroidisches Koordinaten-System.

Diese Schreiber'sche Methode des Polygonkranz-Anschlusses durch rechtwinklige Koordinaten ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation: Hauptdreiecke. Erster Teil, Berlin 1870, S. 421 und Hauptdreiecke II. Teil, Berlin 1874, S. 605*.

Wir haben einen Bericht hierüber mit einem Beispiele gegeben in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen“, 1882, S. 81–85 und S. 103, und bemerken hiezu, dass die ersten Schreiber'schen Formeln von 1870 („Hauptdreiecke I, S. 421“) sich rein sphärisch mit einem mittleren Krümmungs-Halbmesser entwickeln lassen, und so mit den bekannten Soldner'schen Koordinaten-Formeln zusammenfallen, während die zweiten Schreiber'schen Formeln von 1874 („Hauptdreiecke II, S. 605“) noch höhere Glieder hinzufügen, entsprechend der Gauss'schen Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas“.

Es giebt noch eine Frage, betreffend die günstigste Form der Seitengleichung in einem Viereck, welche hier angeschlossen werden könnte, jedoch wollen wir dieses auf den Schluss dieses Kapitels verschieben, um den Übergang zu praktischen Ausgleichungsrechnungen nicht zu lange aufzuhalten.

§ 59. Ausgleichung eines Vierecks mit 4 vollen Richtungssätzen.

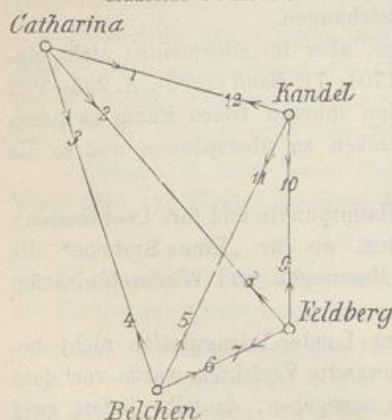
Als erstes Beispiel zur rechnerischen Durchführung nehmen wir ein Viereck der badischen Triangulierung mit 4 vollen gleichgewichtigen Richtungssätzen.

Die Ergebnisse der Messungen, jeweils auf einen Anfangsstrahl als Nullrichtung bezogen, sollen sein:

Station Catharina.		Station Kandel.	
Kandel . . .	(1) = $0^{\circ} 0' 0,00''$	Feldberg . .	(10) = $0^{\circ} 0' 0,00''$
Feldberg . .	(2) = $34^{\circ} 52' 27,44''$	Belchen . .	(11) = $25^{\circ} 9' 9,67''$
Belchen . . .	(3) = $57^{\circ} 49' 20,90''$	Catharina . .	(12) = $102^{\circ} 43' 24,53''$
Station Belchen		Station Feldberg	
Catharina . .	(4) = $0^{\circ} 0' 0,00''$	Belchen . .	(7) = $0^{\circ} 0' 0,00''$
Kandel . . .	(5) = $44^{\circ} 36' 27,07''$	Catharina . .	(8) = $72^{\circ} 58' 55,84''$
Feldberg . .	(6) = $84^{\circ} 04' 12,94''$	Kandel . . .	(9) = $115^{\circ} 23' 06,40''$

(1)

Fig. 1.
Viereck mit vollen Richtungssätzen.
Maassstab 1 : 400 000.



Hier ist jeweils eine beliebige Sicht als Nullstrahl mit $0^{\circ} 0' 0,00''$ angenommen, doch ist das unwesentlich, und man soll sich sehr hüten, der so formell bevorzugten Richtung irgend eine sachlich besondere Bedeutung beizulegen. Namentlich darf man nicht glauben, man habe damit Winkel vor sich in dem Sinne, wie er in § 57. und § 58. im Gegensatz zu Richtungen aufgestellt wurde. Der Anfangswert $0^{\circ} 0' 0,00''$ muss vielmehr gerade ebenso eine Ausgleichungsverbesserung erhalten, wie der zweite Richtungswert $34^{\circ} 52' 27,44''$ u. s. w., und man ändert an der Sache gar nichts, wenn man alle Richtungen eines Satzes um ein beliebiges Maass verschiebt.

Aus diesem Grunde macht man sich häufig

die Sache möglichst bequem für spätere Zwecke, indem man alle Richtungssätze schon von Anfang an in Form von genäherten trigonometrischen Richtungswinkeln aufstellt. (Katasterbezeichnung „Neigungen“.) Die Orientierung für solche trigonometrische Richtungswinkel hat man stets aus genäherten Anschlussrechnungen.

Um die Vorteile solcher Orientierung sofort ins richtige Licht zu stellen, wollen wir gleich bei diesem unserem ersten Beispiel davon Gebrauch machen und die unter (1) mitgeteilten Richtungsmessungssätze nochmals schreiben in genäherter Orientierung (mit $+$ x nach Norden und Richtungswinkelzählung von Nord über Ost).

Catharina.	Kandel.	}	(2)
(1) = $104^{\circ} 33' 24,00''$	(10) = $181^{\circ} 49' 59,47''$		
(2) = $139 25 51,44$	(11) = $206 59 9,14$		
(3) = $162 22 44,90$	(12) = $284 33 24,00$		
Belchen.	Feldberg.		
(4) = $342^{\circ} 22' 40,13''$	(7) = $246^{\circ} 26' 53,07''$		
(5) = $126 59 7,20$	(8) = $319 25 48,91$		
(6) = $166 26 53,07$	(9) = $1 49 59,47$		

Die Richtung (1) stimmt mit der Gegenrichtung (12), ebenso stimmt (10) mit (9), (7) mit (6) überein, weil dieses bei der willkürlichen Festsetzung der Anfangsrichtungen so angenommen worden ist; dass die übrigen Richtungen, z. B. (5) und (11) nicht stimmen, hat seinen Grund theils in den Beobachtungsfehlern, theils aber auch in dem Umstand, dass die Dreiecke nicht eben, sondern sphärisch sind.

Zur Netzausgleichung braucht man zuerst die sphärischen Excesse, und hiezu eine Seite des Netzes. Z. B. Catharina—Belchen = 34433^m , $\log = 4.53697$. Die geographische Breite ist ungefähr 48° , und der Logarithmus des Erdhalbmessers daher $\log r = 6.80479$, womit man in bekannter Weise berechnet aus der Dreiecksfläche \triangle :

$$\text{Sphär. Excess } \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2} \varrho \quad \text{mit } \log \frac{\varrho}{r^2} = 1.70485$$

Z. B. das erste Dreieck Catharina—Belchen—Kandel hat genähert:

Catharina	(1,3)	= $57^{\circ} 49'$	$\log \sin$	9.92755
Belchen	(4,5)	= $44 36'$	"	9.84643
Kandel	(11,12)	= $77 34'$	"	9.98969

womit unter Zugrundlegung von $\log CB = 4.53697$ berechnet wird $\log CK = 4.39371$

und dann $\triangle = \frac{1}{2} CB \cdot CK \sin C$, $\log \triangle = 8.55720$ und $\varepsilon = 1.828''$. Oder kurz, man berechnet mit vorläufigen Seiten und Winkeln die Excesse, wie sie in folgender alle 4 Summenproben enthaltenden Zusammenstellung angegeben sind:

C. (1,3) = $57^{\circ} 49' 20,90''$	C. (2,3) = $22^{\circ} 56' 53,46''$	}	(3)
B. (4,5) = $44 36 27,07$	F. (7,8) = $72 58 55,84$		
K. (11,12) = $77 34 14,86$	B. (4,6) = $84 4 12,94$		
Summe $180^{\circ} 0' 2,83''$	Summe $180^{\circ} 0' 2,24''$		
soll $180 0 1,83$	soll $180 0 1,22$		
$w = + 1,00''$	$w = + 1,02''$		
B. (5,6) = $39^{\circ} 27' 45,87''$	F. (8,9) = $42^{\circ} 24' 10,56''$	}	(3)
F. (7,9) = $115 23 6,40$	K. (10,12) = $102 43 24,53$		
K. (10,11) = $25 9 9,67$	C. (1,2) = $34 52 27,44$		
Summe $180^{\circ} 0' 1,94''$	Summe $180^{\circ} 0' 2,53''$		
soll $180 0 0,67$	soll $180 0 1,28$		
$w = + 1,27''$	$w = + 1,25''$		

Bezeichnet man die Richtungs-Verbesserungen mit $v_1 v_2 \dots v_{12}$, so folgen aus diesen Probesummen folgende 4 Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} v_8 - v_1 + v_5 - v_4 + v_{12} - v_{11} + 1,00'' &= 0 \\ v_3 - v_2 + v_8 - v_7 + v_6 - v_4 + 1,02'' &= 0 \\ v_6 - v_5 + v_9 - v_7 + v_{11} - v_{10} + 1,27'' &= 0 \\ v_9 - v_8 + v_{12} - v_{10} + v_2 - v_1 + 1,25'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

In jeder dieser Gleichungen ist die Summe der Coefficienten = Null, wie sich aus der Entstehung dieser Gleichungen unmittelbar ergibt (vgl. die Anmerkung am Schluss von § 57. und S. 176—177).

Wenn irgend welche 3 von diesen 4 Bedingungsgleichungen (4) erfüllt sind, so ist die 4te von selbst erfüllt, man hat daher nur 3 von den Gleichungen (4) in die Ausgleichung einzuführen.

Es besteht ferner eine Seitenbedingungsgleichung (Centralpunkt Feldberg):

$$\text{Es soll sein } \frac{\sin(1,2) \sin(4,6) \sin(10,11)}{\sin(2,3) \sin(5,6) \sin(10,12)} = 1 \quad (5)$$

Diese Gleichung ist allerdings zunächst dem *ebenen* Viereck entsprechend, ebenso wie in § 57. S. 165 gelehrt wurde, allein die Gleichung (5) gilt ebenso auch für ein *sphärisches* Viereck, weil der Sinussatz, insofern er die *Winkel* eines Dreiecks betrifft, für ein ebenes und für ein sphärisches Dreieck gleichlautend ist (und die Sinus der Centriwinkel am Erdmittelpunkt für die Dreiecksseiten hier nicht auftreten, ev. durch die „Additamentenmethode“ der sphärischen Dreiecksberechnung berücksichtigt würden; vgl. unseren III. Band, 1890, § 42).

Der Seitengleichung (5) entspricht folgende logarithmisch-trigonometrische Ausrechnung mit 7 stelligen Logarithmen:

			Diff. für 10''		
(1,2) = 34° 52' 27,44''	$\log \sin(1,2)$	9.757 2273	+	302	}
(4,6) = 84 4 12,94	$\log \sin(4,6)$	9.997 6699	+	22	
(10,11) = 25 9 9,67	$\log \sin(10,11)$	9.628 4216	+	449	
			9.383 3188		
(2,3) = 22° 56' 53,46''	$\log \sin(2,3)$	9.590 9515	+	498	
(5,6) = 39 27 45,87	$\log \sin(5,6)$	9.803 1677	+	256	
(10,12) = 102 43 24,53	$\log \sin(10,12)$	9.989 2025	—	48	
			9.383 3217		
			9.383 3188		
			9.383 3217		

$$\text{Widerspruch } 9.383 3188 - 9.383 3217 = -0.000 0029 = w$$

Um für diese sehr wichtige logarithmisch-trigonometrische Berechnung des Fehlergliedes w eine Probe zu erlangen, kann man sich der sphärischen Excesse bedienen, welche in (3) bereits angegeben sind, indem man nach dem Legendreschen Satze rechnend, jeden Dreieckswinkel um ein Drittel des sphärischen Excesses vermindert. So erhält man aus (3):

C. (1,3) = 57° 49' 20,29''	C. (2,3) = 22° 56' 53,05''	}	
B. (4,5) = 44 36 26,46	F. (7,8) = 72 58 55,43		
K. (11,12) = 77 34 14,25	B. (4,6) = 84 4 12,53		
	+ 1,00		+ 1,01
B. (5,6) = 39° 27' 45,65''	F. (8,9) = 42° 24' 10,13''		
F. (7,9) = 115 23 6,18	K. (10,12) = 102 43 24,10		
K. (10,11) = 25 9 9,45	C. (1,2) = 34 52 27,01		
	+ 1,28		+ 1,24

Die Summen $+1,00$ u. s. w. sollen den entsprechenden w in (3) gleich sein, und wenn das nicht völlig der Fall ist, so rührt es nur von der Abrundung bei der Bildung der Drittel-Excesse her. Nun macht man mit den Winkeln (7) abermals eine logarithmisch-trigonometrische Ausrechnung von der Form (6):

			Diff. für 10"		
(1,2)	=	34° 52' 27,01"	$\log \sin$	(1,2)	
(4,6)	=	84 4 12,53	$\log \sin$	(4,6)	
(10,11)	=	25 9 9,45	$\log \sin$	(10,11)	
(2,3)	=	22° 56' 53,05"	$\log \sin$	(2,3)	
(5,6)	=	39 27 45,65	$\log \sin$	(5,6)	
(10,12)	=	102 43 24,10	$\log \sin$	(10,12)	

$$\text{Widerspruch } 9.383\,3165 - 9.383\,3194 = -0.000\,0029 = w$$

Nun bekommt man aus (6) und (8) übereinstimmend die lineare Seitengleichung in Einheiten der 7ten Logarithmendecimale:

$$\begin{aligned} &+ 30,2 (v_2 - v_1) + 2,2 (v_6 - v_4) + 44,9 (v_{11} - v_{10}) \\ &- 49,8 (v_8 - v_2) - 25,6 (v_6 - v_5) + 4,8 (v_{12} - v_{11}) - 29 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Diese Gleichung kann man so weiter benutzen, aber im Vergleich mit den Winkelsummengleichungen (4) hat die Gleichung (9) zu grosse Coefficienten, was formell störend für die weitere Rechnung ist, und wir wollen deshalb lieber die Gleichung (9) durchaus mit 10 dividieren, d. h. in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale rechnen:

$$\begin{aligned} &+ 3,02 (v_2 - v_1) + 0,22 (v_6 - v_4) + 4,49 (v_{11} - v_{10}) \\ &- 4,98 (v_8 - v_2) - 2,56 (v_6 - v_5) + 0,48 (v_{12} - v_{11}) - 2,9 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Man kann eine solche Bedingungsgleichung (9) oder (10) mit jeder beliebigen Zahl multiplizieren oder dividieren, ohne ihre Bedeutung für die Ausgleichung zu ändern, (während man *Fehler*gleichungen nicht multiplizieren darf, ohne die Gewichtsverhältnisse zu ändern, vgl. (6) § 21. S. 68. Am besten ist es, wenn die Coefficienten der linearen Seitengleichungen im Mittel ungefähr den Wert 1 haben, weil auch die Winkelsummengleichungen (4) alle die Coefficienten 1 haben; man könnte daher daran denken, die Gleichung (10) nochmals mit 2 oder 3 zu dividieren, indessen mit der bequemen Rechnung in Einheiten der 6ten Stelle nach (10) kommt man gewöhnlich gut durch, und wir bleiben daher bei (10) stehen, und finden daraus durch Ordnen nach $v_1, v_2, v_3 \dots$:

$$\begin{aligned} &- 3,02 v_1 + 8,00 v_2 - 4,98 v_3 - 0,22 v_4 + 2,56 v_5 - 2,34 v_6 - 4,97 v_{10} \\ &\quad + 4,49 v_{11} + 0,48 v_{12} - 2,9 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Die Coefficienten-Summe $-3,02 + 8,00 \dots + 0,48$ ist auch wieder $= 0$, wie bei den Gleichungen (4).

Die lineare Seitengleichung (11), nebst *dreien* von den 4 Winkelgleichungen der Gruppe (4) bilden das vollständige System der Bedingungsgleichungen. Mit Ausscheidung der dritten Gleichung der Gruppe (4) bilden wir die Tabelle der Coefficienten der Bedingungsgleichungen:

Coefficienten der Bedingungsgleichungen:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
$k_1 a$	-3,02	+8,00	-4,98	-0,22	+2,56	-2,34	-4,97	+4,49	+0,48	-2,90
$k_2 b$	-1	...	+1	-1	+1	-1	+1	+1,00
$k_3 c$...	-1	+1	-1	...	+1	-1	+1	+1,02
$k_4 d$	-1	+1	-1	+1	-1	...	+1	+1,25

Die Bildung der Summen-Coefficienten ist sehr einfach, es ist z. B.:

$$[a a] = 3,02^2 + 8,00^2 + 4,98^2 + \dots + 0,48^2 = 155,09$$

$$[a b] = +3,02 - 4,98 + 0,22 + 2,56 - 4,49 + 0,48 = -3,19 \text{ u. s. w.}$$

$$[a c] = -8,00 + 4,98 + 0,22 - 2,34 = -15,10$$

$$[a d] = +3,02 + 8,00 + 4,97 + 0,48 = +16,47$$

$$[b b] = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 6$$

$$[b c] = +1 + 1 = +2$$

$$[b d] = +1 + 1 = +2$$

$$[c c] = 1^2 + \dots = 6$$

$$[c d] = +1 + 1 = 2$$

$$[d d] = 1^2 + \dots = 6$$

Die Normalgleichungen sind also in abgekürzter Schreibweise:

$$\left. \begin{array}{l} [a \quad 155,09 k_1 - 3,19 k_2 - 15,10 k_3 + 16,47 k_4 - 2,90 = 0 \\ [b \quad 6,00 k_2 + 2,00 k_3 + 2,00 k_4 + 1,00 = 0 \\ [c \quad 6,00 k_3 - 2,00 k_4 + 1,02 = 0 \\ [d \quad 6,00 k_4 + 1,25 = 0 \end{array} \right\} \quad (13)$$

Die Elimination und Auflösung giebt:

$$k_1 = +0,044 \quad k_2 = +0,078 \quad k_3 = -0,232 \quad k_4 = -0,431 \quad (14)$$

Nach Anleitung der Tabelle der Bedingungsgleichungen (12) macht man folgende tabellarische Berechnung der Verbesserungen v :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+0,044	-0,132	+0,352	-0,218	-0,010	+0,112	-0,103	-0,217	+0,197	+0,021
+0,078	-0,078	...	+0,078	-0,078	+0,078	-0,078	+0,078
-0,232	...	+0,232	-0,232	+0,232	...	-0,232	+0,232	-0,232
-0,431	+0,431	-0,431	+0,431	-0,431	+0,431	...	-0,431
v	+0,221	+0,153	-0,372	+0,144	+0,190	-0,335	+0,232	+0,199	-0,431	+0,214	+0,119	-0,332
Summe	-0,002			-0,001			0,000			+0,001		

Diese Werte v geben stationsweise je die Summe 0,000'', abgesehen von kleinen Abrundungsunsicherheiten 0,002'' u. s. w.

Fügt man die so erhaltenen v zu den beobachteten Richtungen (2) hinzu, wobei wir auf 0,01'' abrunden, so erhält man folgendes:

Beobachtet	v	Ausgeglichen	v^2
(1) = $104^\circ 33' 24,00''$	+ 0,22''	[1] = $104^\circ 33' 24,22''$	0,0484
(2) = $139 25 51,44$	+ 0,15	[2] = $139 25 51,59$	0,0225
(3) = $162 22 44,90$	- 0,37	[3] = $162 22 44,53$	0,1369
(4) = $342^\circ 22' 40,13''$	+ 0,14''	[4] = $342^\circ 22' 40,27''$	0,0196
(5) = $26 59 7,20$	- 0,19	[5] = $26 59 7,39$	0,0361
(6) = $66 26 53,07$	- 0,33	[6] = $66 26 52,74$	0,1089
(7) = $246^\circ 26' 53,07''$	+ 0,23''	[7] = $246^\circ 26' 53,30''$	0,0529
(8) = $319 25 48,91$	+ 0,20	[8] = $319 25 49,11$	0,0400
(9) = $1 49 59,47$	- 0,43	[9] = $1 49 59,04$	0,1849
(10) = $181^\circ 49' 59,47''$	+ 0,21''	[10] = $181^\circ 49' 59,68''$	0,0441
(11) = $206 59 9,14$	- 0,12	[11] = $206 59 9,26$	0,0144
(12) = $284 33 24,00$	- 0,33	[12] = $284 33 23,67$	0,1089
$[v v] = 0,8176$			

Durch Subtraktionen dieser ausgeglichenen Richtungen bildet man die ausgeglichenen Winkel und stellt dieselben abermals wie früher bei (3) in Dreiecken zusammen. Zur Unterscheidung von den gemessenen Winkeln, welche mit (1,3), (4,5) ... bezeichnet waren, bezeichnen wir die ausgeglichenen Winkel mit [1,3], [4,5] ...:

C. [1,3] = $57^\circ 49' 20,31''$	C. [2,3] = $22^\circ 56' 52,94''$
B. [4,5] = $44 36 27,12$	F. [7,8] = $72 58 55,81$
K. [11,12] = $77 34 14,41$	B. [4,6] = $84 4 12,47$
Summe $180^\circ 0' 1,84''$	Summe $180^\circ 0' 1,22''$
soll $1,83$	soll $1,22$
B. [5,6] = $39^\circ 27' 45,35''$	F. [8,9] = $42^\circ 24' 9,93''$
F. [7,9] = $115 23 5,74$	K. [10,12] = $102 43 23,99$
K. [10,11] = $25 9 9,58$	C. [1,2] = $34 52 27,37$
Summe $180^\circ 0' 0,67''$	Summe $180^\circ 0' 1,29''$
soll $0,67$	soll $1,28$

Zur Untersuchung, ob die Seitengleichung stimmt, macht man statt der früheren logarithmischen Rechnung (6) die folgende neue logarithmische Rechnung:

[1,2] = $34^\circ 52' 27,37''$	$\log \sin [1,2]$	9,757 2271
[4,6] = $84 4 12,47$	$\log \sin [4,6]$	9,997 6699
[10,11] = $25 9 9,58$	$\log \sin [10,11]$	9,628 4212
		9,383 3181
[2,3] = $22^\circ 56' 52,94''$	$\log \sin [2,3]$	9,590 9490
[5,6] = $39 27 45,35$	$\log \sin [5,6]$	9,803 1664
[10,12] = $102 43 23,99$	$\log \sin [10,12]$	9,989 2028
		9,383 3182

Mit den ausgeglichenen Richtungen berechnet man alle Dreiecksseiten auf allen Wegen übereinstimmend. Als Basis nehmen wir hiezu die Seite Catharina—Belchen nach Angabe der badischen Landestriangulierung:

$$\text{Catharina—Belchen} = 34\,432,57^m \quad (19)$$

Unter Annahme dieser Länge wurden mit den ausgeglichenen Winkeln und Sinuslogarithmen (18) nach der Additamentenmethode folgende Entfernungen widerspruchsfrei berechnet:

Catharina—Belchen . . .	= 34 432,57 ^m	$\log = 4.536\ 9695$	} (20)
Catharina—Feldberg . . .	= 35 816,62	4.554 0846	
Catharina—Kandel . . .	= 24 760,43	4.393 7582	
Belchen—Feldberg . . .	= 14 039,83	4.147 3617	
Belchen—Kandel . . .	= 29 843,17	4.474 8450	
Feldberg—Kandel . . .	= 20 994,59	4.322 1074	

Man kann auch entsprechend (7) und (8) nach dem Legendreschen Satze rechnen, was dieselben Werte geben muss wie (20).

In Bezug auf Genauigkeitsbestimmung hat man zuerst die Summe $[v v] = 0,8176$ nach (16) ins Auge zu fassen. Eine Probe dafür bekommt man durch die Formel $[v v] = -[w k]$, nach (4) § 41. S. 122. Die Ausrechnung hiezu ist:

$$\begin{array}{rclcl}
 w_1 = -2,90 & k_1 = +0,044 & -w_1 k_1 = +0,1276 & & \\
 w_2 = +1,00 & k_2 = +0,078 & -w_2 k_2 & -0,0780 & \\
 w_3 = +1,02 & k_3 = -0,232 & -w_3 k_3 = +0,2366 & & \\
 w_4 = +1,25 & k_4 = -0,431 & -w_4 k_4 = +0,5388 & & \\
 & & +0,9030 & -0,0780 & \\
 & & -[w k] = +0,8250 & & (21)
 \end{array}$$

Man kann auch noch die Formel (5) § 41. S. 122 zuziehen, was wir aber hier unterlassen, da wir auch die Elimination (13)–(14) nicht im Einzelnen vorgeführt haben, und weil die Probe (21) neben der unmittelbaren Ausrechnung der einzelnen v^2 in (16) vollauf genügt.

Wir nehmen im Mittel $[v v] = 0,82$, und haben damit den mittleren Fehler einer beobachteten Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{0,82}{4}} = \pm 0,45'' \quad (22)$$

und den mittleren Fehler eines Winkels vor der Ausgleichung:

$$= m \sqrt{2} = \pm 0,64'' \quad (23)$$

Damit ist die Ausgleichung vollendet, und mit den Dreiecksseiten (20) nebst den Winkeln (18) kann man nun auch die Coordinaten der Viereckspunkte in jedem System berechnen, das in Frage kommt.

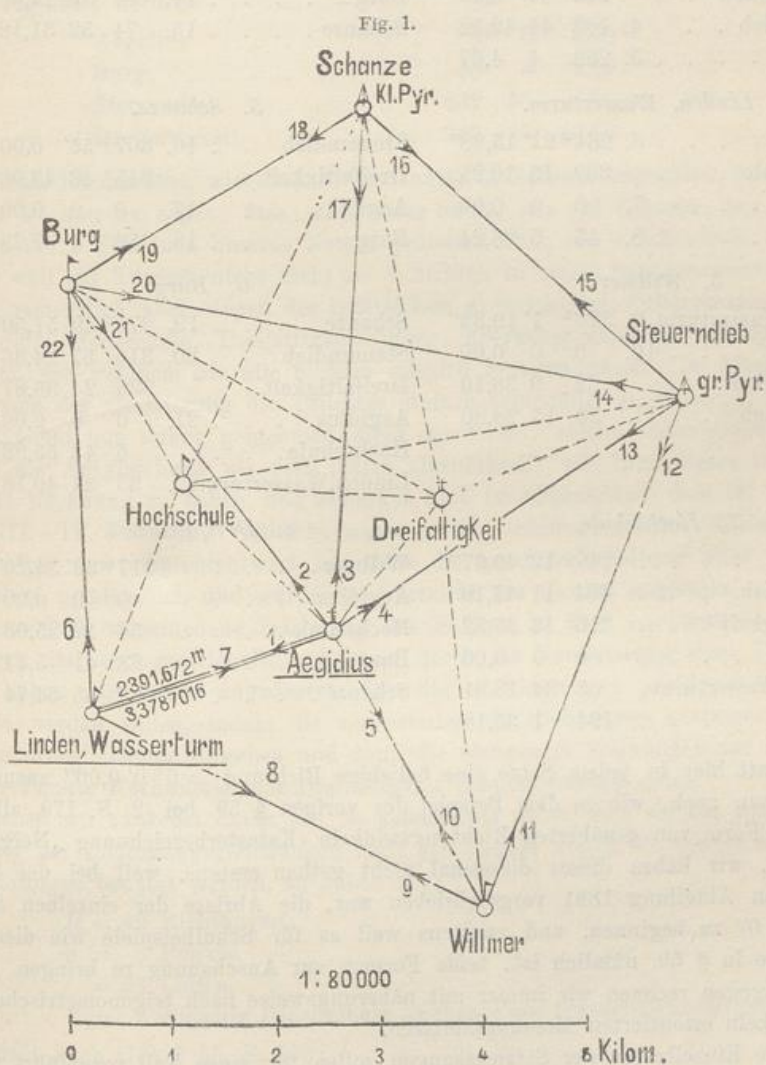
Die Coordinaten der 4 Punkte im badischen System sind in der „Zeitschr. f. Verm. 1878.“ S. 33–34 mitgeteilt. Ebendasselbst S. 20–25 sind auch die Originalmessungen mitgeteilt, welche zu dieser Netzausgleichung geführt haben. Es sind viele einzelne nach dem Repetitionsverfahren gemessene Winkel, welche wir zuerst stationsweise ausgeglichen und dann wie volle Richtungssätze weiter behandelt haben.

Die Messung voller gleichgewichtiger Richtungssätze auf allen 4 Punkten, welche wir am Anfang in (1) oder (2) S. 179 angenommen haben, hat also thatsächlich nicht stattgefunden, und wir haben deshalb unsere vorstehende Vierecksausgleichung entweder als ein Schulbeispiel mit fingierten Richtungsmessungen aufzufassen, oder wir haben ein praktisches Beispiel vor uns für ein zwar nicht formell strenges aber sehr nützliches, schon von Gauss in dem „supplementum theoriae combinationis, 1826“ erstmals angewendetes Näherungsverfahren, darin bestehend, dass man Winkelmessungen oder auch unvollständige Satzrichtungsmessungen, zuerst stationsweise irgendwie (vielleicht nur näherungsweise) ausgleicht und dann die Stationsergebnisse wie volle Richtungssätze in die Netzausgleichung einführt.

§ 60. Triangulierungsnetz der Stadt Hannover.

Im Jahre 1891 ist das in Fig. 1. gezeichnete Dreiecksnetz der Stadt Hannover gemessen worden von dem Verfasser, welcher damals in vorübergehender Weise als „Trigonometrie“ der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme funktionierte.

Über den technischen Teil dieser Messungen haben wir bereits in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 246—285 mit Centrierungen u. s. w. berichtet, und es sei



hier nur wiederholt, dass die Winkelmessungen mit dem daselbst auf S. 183 abgebildeten kleinen Mikroskop-Theodolit mit 14^m-Kreis ausgeführt worden sind, und zwar auf allen 8 Punkten von Fig. 1. in je 12 Sätzen.

Folgendes sind die Mittelwerte dieser Messungen in Form von Richtungssätzen, wobei jeweils die Richtung nach Aegidius oder Linden Wasserturm als $0^{\circ} 0' 0''$ eingeführt ist.

1. Aegidius.		4. Steuerndieb.	
Linden, Wasserturm	1. $0^{\circ} 0' 0,00''$	Willmer	12. $325^{\circ} 34' 46,28''$
Hochschule	63 38 53,31	Aegidius	13. $0 0 0,00$
Burg	2. 70 56 34,82	Dreifaltigkeit	12 56 15,08
Schanze	3. 110 42 21,36	Hochschule	24 5 46,54
Dreifaltigkeit	143 40 8,40	Burg	14. 44 9 14,00
Steuerndieb	4. 163 44 49,52	Schanze	15. 74 52 31,12
Willmer	5. 259 4 4,67		
2. Linden, Wasserturm.		5. Schanze.	
Burg	6. $284^{\circ} 21' 15,98''$	Steuerndieb	16. $307^{\circ} 55' 0,00''$
Hochschule	309 13 10,25	Dreifaltigkeit	345 43 43,08
Aegidius	7. $0 0 0,00$	Aegidius	17. $0 0 0,00$
Willmer	8. 45 5 26,24	Burg	18. 56 4 7,29
3. Willmer.		6. Burg.	
Linden, Wasserturm	9. $326^{\circ} 1' 19,33''$	Schanze	19. $275^{\circ} 49' 51,50''$
Aegidius	10. $0 0 0,00$	Steuerndieb	20. 316 57 24,36
Dreifaltigkeit	22 9 36,10	Dreifaltigkeit	336 24 35,87
Steuerndieb	11. 50 15 28,80	Aegidius	21. $0 0 0,00$
		Hochschule	6 43 55,93
		Linden, Wasserturm	22. 33 24 40,16
7. Hochschule.		8. Dreifaltigkeit.	
Schanze	249 $12' 49,37''$	Willmer	317 $33' 31,20''$
Steuerndieb	304 11 45,10	Aegidius	0 0 0,00
Dreifaltigkeit	316 13 35,82	Hochschule	56 12 25,93
Aegidius	0 0 0,00	Burg	83 41 5,14
Linden, Wasserturm	65 34 18,81	Schanze	132 45 54,74
Burg	194 1 35,18		

Statt hier in jedem Satze eine beliebige Richtung $= 0^{\circ} 0' 0,00''$ anzunehmen, könnte man auch, wie in dem Beispiel des vorigen § 59. bei (2) S. 179, alle Sätze sofort in Form von genäherten Richtungswinkeln (Katasterbezeichnung „Neigungen“) aufführen, wir haben dieses diesmal nicht gethan erstens, weil bei der trigonometrischen Abteilung 1891 vorgeschrieben war, die Abrisse der einzelnen Sätze je mit $0^{\circ} 0' 0''$ zu beginnen, und zweitens weil es für Schulbeispiele wie dieses und das vorige in § 59. nützlich ist, beide Formen zur Anschauung zu bringen. In der Praxis dagegen rechnen wir immer mit näherungsweise nach trigonometrischen Richtungswinkeln orientierten Messungsabrisse.

Die Einzelheiten der Satzmessungen sollen für einen Fall vorgeführt werden; wir wählen dazu das Beispiel *Schanze*, wo auf dem Erdboden und centrisc gemessen werden konnte, und zwar 4 Sichten zusammen in je einem Satze. Dieses wurde 12 mal wiederholt, wie aus folgender Tabelle zu ersehen ist, in welcher, mit Weglassung der Grade und Minuten, nur die Sekunden angegeben sind.

Kreislage.	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	Mittel
Aegidius	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00
Burg	6,0	4,5	10,5	6,0	11,0	8,5	10,0	6,0	8,5	3,5	5,5	7,5	7,29
Steuerndieb . .	63,0	59,5	61,0	61,0	60,5	61,5	62,0	59,0	56,0	56,0	58,0	62,5	60,00
Dreifaltigkeit .	40,5	38,0	45,0	46,5	43,5	47,5	38,5	48,5	40,0	40,0	41,5	47,5	43,08
Satzmittel . . .	27,38	25,50	29,12	28,38	28,75	29,37	27,62	28,37	26,12	24,88	26,25	29,38	27,59

(2)

Das Gesamtergebnis dieser 12 Sätze ist also, wenn nun auch die Grade und Minuten zugesetzt werden:

Aegidius	0°	0'	0,00"
Burg	56	4	7,29
Steuerndieb	307	55	0,00
Dreifaltigkeit	345	43	43,08

Dieses ist dasselbe, wie oben S. 186, unter 5. Schanze angegeben ist.

Es ist nun zu sagen, dass solch *volle* Sätze, wie auf Schanze, nur auf den wenigsten der 8 Stationen unseres Netzes gemessen sind, aus verschiedenen Gründen, teilweise weil auf Türmen nicht mehr als 4 Sichten in einem Satz genommen werden durften, namentlich aber wegen der zahlreichen excentrischen Aufstellungen, indem auf Aegidius, Hochschule, Dreifaltigkeit, Burg, überhaupt nicht *ein* Standpunkt zu finden war, von welchem aus alle Sichten möglich gewesen wären. In diesen Fällen wurden nach der Centrierung die Teilsätze einfach aneinander geschoben.

Man hat nun streng genommen nicht das Recht, solche zusammengeschobene Sätze in die Ausgleichung als *volle* Sätze einzuführen; wir thun dieses aber doch, um glatte Rechnung zu haben, und bemerken dazu im allgemeinen, dass für Triangulierung III.—IV. Ordnung, vielleicht sogar in II. Ordnung, solches Näherungsverfahren üblich und empfehlenswert ist, denn die Auseinanderhaltung aller Teilsätze wäre viel zu umständlich und würde die Übersicht des Ganzen ungemein stören.

Durch die verschiedene Zeichnung der Sichten in Fig. 1., nämlich teilweise ausgezogen, teilweise gestrichelt, und ferner durch die Numerierung eines Teiles der Sichten haben wir bereits angedeutet, dass die 42 Richtungen nachher verschieden behandelt werden sollen, indem die numerierten 22 Richtungen zusammen in eine Korrelaten-Ausgleichung eingehen und dann die übrigen 20 Richtungen zur Einschaltung der Punkte Hochschule und Dreifaltigkeit benützt werden sollen.

Sehen wir zunächst davon ab, so können wir unser Netz als ein Beispiel zur Abzählung der Bedingungsgleichungen nach den Regeln von § 58. benützen. Wenn alle Richtungen benützt werden, so haben wir:

$R = 42$ Richtungen,

$p = 8$ Punkte,

$l = 22$ Linien,

$l' = 2$ einseitig (Hochschule – Schanze und Steuerndieb – Dreifaltigkeit),

dieses giebt nach (18) § 58. S. 176:

$l - 2p + 3 = 9$ Seitengleichungen,

$(l - l') - p + 1 = 13$ Dreiecksgleichungen (180°),

$R - 3p + 4 = 22$ Bedingungsgleichungen im Ganzen.

Wenn dagegen die punktierten Linien und damit die beiden Punkte Hochschule

und Dreifaltigkeit aus dem Hauptnetze weggelassen werden, so bleibt eine Ausgleichung mit nur 8 Bedingungsgleichungen, welche im nächsten § 61. ausführlich durchgenommen werden wird.

Vorher haben wir noch die beiden Basispunkte des Netzes anzugeben, nämlich Aegidius und Linden Wasserturm.

Diese beiden Punkte wurden von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme schon 1887 an das Netz I. Ordnung angeschlossen, wie in der „Zeitschr. f. Verm. 1889“, S. 8—14 von uns berichtet und in unserem III. Bande, Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890, S. 335 und 452 mitgeteilt worden ist. Ausserdem kommt der Punkt Celle als Ursprung unseres Kataster-Coordinaten-Systems in Betracht.

Folgendes sind die fraglichen geographischen Coordinaten der Landesaufnahme:

			Breite			Länge	
Aegidius, Helmstange	52	22	14,9611	27	24	24,6290	(3) (1888)
Wasserturm, Fahnenstange	52	21	49,9080	27	22	25,0168	
Differenzen Aeg.-Wassert.		0'	25,0531"		1'	59,6122"	

Die amtliche Mitteilung von 1891 giebt:

Celle Coord. Nullpunkt	52°	37'	32,6709"	27°	44'	54,8477"	(4) (1891)
Aegidius, Helmstange	52	22	14,9611	27	24	24,6289	
Wasserturm, Fahnenstange	52	21	49,9080	27	22	25,0167	
Differenzen	0' 25,0531"			1' 59,6122"			

Die Längenangaben von 1891 sind um 0,0001" kleiner als die von 1888, was nur etwa 2^{mm} Verschiebung entspricht, also *sachlich gleichgültig* ist, doch musste diese Kleinigkeit hier erwähnt werden, weil wir auch die Angaben von 1888 schon mehrfach mitgeteilt haben.

Im rechtwinkligen conformen System der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme haben unsere beiden Basispunkte folgende Coordinaten:

Aegidius	$y = -244656,090^m$	$x = -30624,971^m$	(5)
Linden, Wasserturm	$-246956,479$	$-31285,875$	
Differenzen	$+2300,389$	$+660,904$	

Aus den Angaben (4) haben wir folgende rechtwinklige Coordinaten im Kataster-System berechnet:

Aegidius	$y = -23271,813^m$	$x = -28308,395^m$	(6)
Linden, Wasserturm	$-25538,488$	$-29071,474$	
Differenzen	$+2266,675$	$+763,079$	

Um nun unsere Basis Aegidius—Wasserturm abzuleiten, können wir drei Wege einschlagen, nämlich diese Basis aus den Angaben (4) oder (5) oder (6) berechnen. Man wird in genügender Übereinstimmung finden:

$$\begin{array}{lcl} \text{Aegidius—Linden Wasserturm} & \log S = 3,3787016 & \\ & S = 2391,672^m & \end{array} \quad (7)$$

Nebenbei sei hiezu bemerkt: Wenn man die Entfernung S unmittelbar aus den geographischen Coordinaten (4) berechnen will, bedient man sich der Mittelbreiten-

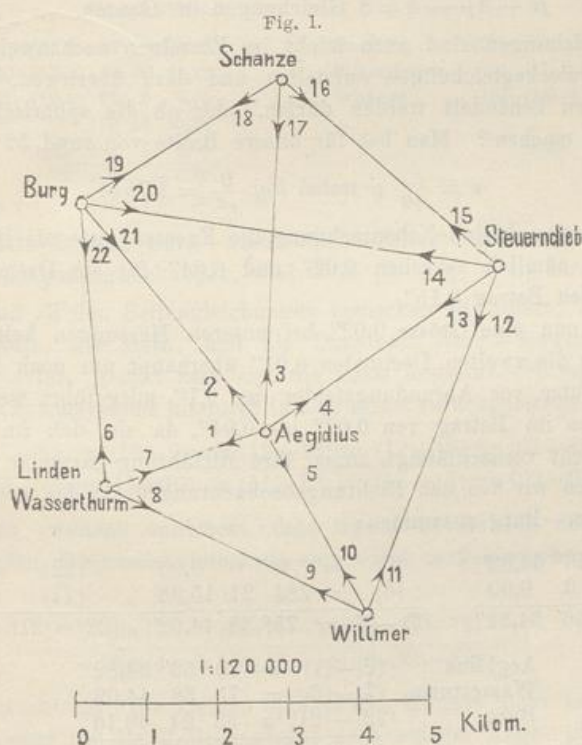
Formeln in unserem III. Bande, 3. Aufl. 1890, S. 398; zu (5) gehören die Formeln desselben Bandes S. 451—452 (vor kurzem in d. „Z. f. Verm. 1894“, S. 167—175 neu entwickelt) und zu (6) gehören die gewöhnlichen Soldnerschen Formeln in jenem III. Bande, S. 271—275.

Wir werden später noch mit diesen verschiedenen Coordinaten zu thun haben, bis auf Weiteres brauchen wir nur die Basisseite Aegidius—Wasserturm nach (7).

Man könnte fragen, warum unser ganzes Netz (Fig. 1.) an die verhältnismässig kurze Seite Aegidius—Wasserturm angeschlossen und nicht etwa Steuerndieb als zweiter Basispunkt zusammen mit Linden Wasserturm genommen wurde? Der Punkt Aegidius, (sozusagen geodätisch geheiligt durch Messungen von Gauss selbst 1823) hat so viele Vorteile, dass er immer als I. oder II. Ordnung beibehalten werden wird; Linden, Wasserturm wurde 1887 als Folgepunkt dazu genommen, zu einer Zeit, als Steuerndieb 1891 noch nicht gebaut war. Die Basis Aegidius—Wasserturm diente 1888 zuerst für Linden; wäre die ganze Anlage erst 1891 zusammen mit Steuerndieb entschieden worden, so würde wohl letzterer Punkt mit als Basispunkt genommen worden sein.

§ 61. Ausgleichung des Hannoverschen Fünfecks.

Von den im vorigen § 60. S. 186 mitgeteilten sämtlichen Hannoverschen Richtungsmessungen benützen wir zunächst nur diejenigen, welche sich auf das Hauptfünfeck mit dem Centralpunkt Aegidius beziehen, für welches die Seite Aegidius—Wasserturm = 2391,672^m als Basis dient. Die dazu gehörigen Messungs-Sichten sind in der nachstehenden Fig. 1. mit Pfeilen und Nummern versehen.



Die zu dem Haupt-Fünfeck gehörigen Richtungsmessungen haben wir von § 60. S. 186 nochmals besonders ausgezogen und im folgenden besonders zusammengestellt.

1. Aegidius.			4. Steuerndieb.		
Wasserturm	(1) =	0° 0' 0,00"	Willmer	(12) =	325° 34' 46,28"
Burg	(2) =	70 56 34,82	Aegidius	(13) =	0 0 0,00
Schanze	(3) =	110 42 21,36	Burg	(14) =	44 9 14,00
Steuerndieb	(4) =	163 44 49,52	Schanze	(15) =	74 52 31,12
Willmer	(5) =	259 4 4,67			
2. Wasserturm.			5. Schanze.		
Burg	(6) =	284° 21' 15,98"	Steuerndieb	(16) =	307° 55' 0,00"
Aegidius	(7) =	0 0 0,00	Aegidius	(17) =	0 0 0,00
Willmer	(8) =	45 5 26,24	Burg	(18) =	56 4 7,29
3. Willmer.			6. Burg.		
Wasserturm	(9) =	326° 1' 19,33"	Schanze	(19) =	275° 49' 51,50"
Aegidius	(10) =	0 0 0,00	Steuerndieb	(20) =	316 57 24,36
Steuerndieb	(11) =	50 15 28,80	Aegidius	(21) =	0 0 0,00
			Wasserturm	(22) =	33 24 40,16

Man überlegt zuerst die Zahl und Art der Bedingungsgleichungen. Wir haben $p = 6$ Punkte, $l = 11$ beiderseitig beobachtete Linien, also $R = 2l = 22$ beobachtete Richtungen. Damit bekommt man nach (17) § 58. S. 176:

$$l - 2p + 3 = 2 \text{ Seitengleichungen,}$$

$$l - p + 1 = 6 \text{ Dreiecksgleichungen,}$$

$$R - 3p + 4 = 8 \text{ Gleichungen im Ganzen.}$$

Diese Gleichungen sind auch leicht im Einzelnen nachzuweisen. Wir wollen zuerst die 6 Dreiecksgleichungen aufstellen und dazu überlegen, ob die Dreiecke geradezu als *eben* behandelt werden dürfen, oder ob die sphärischen Excesse sich noch bemerklich machen? Man hat für unsere Breite von rund 52° :

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{r^2} \rho \text{ wobei } \log \frac{\rho}{r^2} = 1.7044$$

und dabei giebt eine kleine Nebenrechnung die Excesse, wie sie im Nachstehenden angegeben sind, nämlich zwischen $0,02''$ und $0,04''$ für ein Dreieck, und für das ganze Fünfeck den Betrag $0,15''$.

Ogleich nun eine Grösse $0,02''$ bei unseren Messungen keinen reellen Wert mehr hat, indem die zweiten Decimalen $0,01''$ überhaupt nur noch als reine *Rechenstellen* zum Schutze vor Abrundungsfehler der $0,1''$ mitgeführt werden, haben wir doch die Excesse im Betrag von $0,02''$ bis $0,04''$, da sie sich im Ganzen bis auf $0,15''$ häufen, nicht vernachlässigt, zumal ihre Mitführung gar keine Mühe verursacht.

Nun stellen wir aus den Richtungsbeobachtungen (1) das erste Dreieck Aegidius—Wasserturm—Burg zusammen:

$$\begin{array}{rcl} (2) & = & 70^\circ 56' 34,82'' \\ (1) & = & 0 \quad 0 \quad 0,00 \\ \hline (2)-(1) & = & 70^\circ 56' 34,82'' \end{array} \quad \begin{array}{rcl} (7) & = & 0^\circ 0' 0,00'' \\ (6) & = & 284 \quad 21 \quad 15,98 \\ \hline (7)-(6) & = & 75^\circ 38' 44,02'' \end{array} \quad \begin{array}{rcl} (22) & = & 33^\circ 24' 40,16'' \\ (21) & = & 0 \quad 0 \quad 0,00 \\ \hline (22)-(21) & = & 33^\circ 24' 40,16'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Aegidius} & (2)-(1) & = 70^\circ 56' 34,82'' \\ \text{Wasserturm} & (7)-(6) & = 75 \quad 38 \quad 44,02 \\ \text{Burg} & (22)-(21) & = 33 \quad 24 \quad 40,16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Summe} & 179^\circ 59' 59,00'' \\ \text{soll} & 180^\circ + \varepsilon = 180^\circ 0' 0,02'' \end{array}$$

$$v = -1,02'' \quad (c')$$

Bezeichnen wir nun mit (1), (2), (3) ... die beobachteten Richtungen, mit [1], [2], [3] ... die ausgeglichenen Richtungen, und mit [1]—(1) = v_1 , [2]—(2) = v_2 u. s. w. die Richtungsverbesserungen, so ist:

$$\begin{aligned}(2) - (1) + (7) - (6) + (22) - (21) &= 179^\circ 59' 59,00'' \\ [2] - [1] + [7] - [6] + [22] - [21] &= 180^\circ 0' 0,02'' \\ \text{also } v_2 - v_1 + v_7 - v_6 + v_{22} - v_{21} - 1,02'' &= 0 \quad (c)\end{aligned}$$

Diese Gleichung haben wir mit (c) bezeichnet, weil sie in der späteren Literatur aller Bedingungsgleichungen die dritte werden wird.

Ebenso wie diese (c) bilden wir auch die übrigen Dreiecksgleichungen:

Aegidius	(1)–(5) = 100° 55' 55,33"
Willmer	(10)–(9) = 33 58 40,67
Wasserturm	(8)–(7) = 45 5 26,24
	<hr/> 180 0 2,24
	soll 180 0 0,02
	<hr/> w = +2,22

$$v_1 - v_5 + v_{10} - v_9 + v_8 - v_7 + 2,22'' = 0 \quad (d)$$

Aegidius	(5)–(4) = 95° 19' 15,15"
Steuerndieb	(13)–(12) = 34 25 13,72
Willmer	(11)–(10) = 50 15 28,80
	<hr/> 179 59 57,67
	soll 180 0 0,03
	<hr/> w = -2,36

$$v_5 - v_4 + v_{13} - v_{12} + v_{11} - v_{10} - 2,36'' = 0 \quad (e)$$

Aegidius	(4)–(3) = 53° 2' 28,16"
Steuerndieb	(15)–(13) = 74 52 31,12
Schanze	(17)–(16) = 52 5 0,00
	<hr/> 179 59 59,28
	soll 180 0 0,04
	<hr/> w = -0,76

$$v_4 - v_3 + v_{15} - v_{13} + v_{17} - v_{16} - 0,76'' = 0 \quad (f)$$

Aegidius	(3)–(2) = 39° 45' 46,54"
Schanze	(18)–(17) = 56 4 7,29
Burg	(21)–(19) = 84 10 8,50
	<hr/> 180 0 2,33
	soll 180 0 0,03
	<hr/> w = +2,30

$$v_3 - v_2 + v_{18} - v_{17} + v_{21} - v_{19} + 2,30'' = 0 \quad (g)$$

Aegidius	(4)–(2) = 92° 48' 14,70"
Steuerndieb	(14)–(13) = 44 9 14,00
Burg	(21)–(20) = 43 2 35,64
	<hr/> 180 0 4,34
	soll 180 0 0,04
	<hr/> w = +4,30

$$v_4 - v_2 + v_{14} - v_{13} + v_{21} - v_{20} + 4,30'' = 0 \quad (h)$$

Burg	(20)–(19) = 41° 7' 32,86"
Steuerndieb	(15)–(14) = 30 43 17,12
Schanze	(18)–(16) = 108 9 7,29
	<hr/> 179 59 57,27
	soll 180 0 0,03
	<hr/> w = -2,76

$$v_4 - v_3 + v_{15} - v_{13} + v_{17} - v_{16} - 0,76'' = 0 \quad (i)$$

Dieses letzte Dreieck Burg—Steuerndieb—Schanze gehört nicht mehr zu den unabhängigen Bedingungsgleichungen, weil es in (f) + (g) – (h) bereits enthalten ist.

Übergehend zu den Seitengleichungen bemerken wir sofort, dass das Central-system um Aegidius die erste, und die Diagonale Burg—Steuerndieb die zweite Seitengleichung bietet. Denkt man sich die Basis Aegidius—Wasserturm durch alle 5 Dreiecke des Central-systems hindurch in sich selbst zurückgerechnet, so erhält man:

$$\frac{\sin(7-6) \sin(10-9) \sin(13-12) \sin(17-16) \sin(21-19)}{\sin(8-7) \sin(11-10) \sin(15-13) \sin(18-17) \sin(22-21)} = 1 \quad (A)$$

Wenn man zweitens ausdrückt, dass irgend welche von Schanze ausgehende Seite des nördlichen Diagonalenvierecks in sich selbst zurückberechnet stimmen muss, so erhält man:

$$\frac{\sin(3-2) \sin(15-13) \sin(20-19)}{\sin(4-3) \sin(15-14) \sin(21-19)} = 1 \quad (B)$$

Hiebei braucht man die kleinen sphärischen Excesse nicht zu berücksichtigen, weil ja der Sinussatz für die Dreieckswinkel auch auf der Kugel gilt, und man die Seitenberechnung nach der sogenannten Additamentenmethode ausgeführt denken kann. So giebt die Seitengleichung (A) folgende logarithmische Ausrechnung:

				Diff. für 10''
(7) — (6)	= 75° 38' 44,02''	$\log \sin = 9.986\ 2255$	54	
(10) — (9)	= 33 58 40,67	9.747 3139	313	
(13) — (12)	= 34 25 13,72	9.752 2497	307	
(17) — (16)	= 52 5 0,00	9.897 0249	164	
(21) — (19)	= 84 10 8,50	9.997 7471	21	

$$Z = 9.380\ 5611$$

(8) — (7)	= 45° 5' 26,24''	$\log \sin = 9.850\ 1708$	210
(11) — (10)	= 50 15 28,80	9.885 8874	175
(15) — (13)	= 74 52 31,12	9.984 6894	57
(18) — (17)	= 56 4 7,29	9.918 9250	142
(22) — (21)	= 33 24 40,16	9.740 8703	319

$$N = 9.380\ 5429$$

$$Z - N = + 0,000\ 0182$$

Die zugehörige lineare Seitengleichung ist für Einheiten der 6ten Logarithmen-Stelle:

$$+0,54(v_7 - v_6) + 3,13(v_{10} - v_9) + 3,07(v_{13} - v_{12}) + 1,64(v_{17} - v_{16}) + 0,21(v_{21} - v_{19}) \\ - 2,10(v_8 - v_7) - 1,75(v_{11} - v_{10}) - 0,57(v_{15} - v_{13}) - 1,42(v_{18} - v_{17}) - 3,19(v_{22} - v_{21}) + 18,2 = 0$$

oder zusammengefasst:

$$\left. \begin{array}{l} + 2,64 v_7 \quad + 4,88 v_{10} \quad + 3,64 v_{13} \quad + 3,06 v_{17} \\ - 0,54 v_6 - 2,10 v_8 - 3,13 v_9 - 1,75 v_{11} - 3,07 v_{12} - 0,57 v_{15} - 1,64 v_{16} - 1,42 v_{18} \\ \quad + 3,40 v_{21} \\ - 0,21 v_{19} - 3,19 v_{22} + 18,2 = 0 \end{array} \right\} (a)$$

Ebenso giebt die zweite Seitengleichung (B) folgende Ausrechnung:

			Diff. für 10''
(3) — (2)	= 39° 45' 46,54''	$\log \sin = 9.805\ 9169$	253
(15) — (13)	= 74 52 31,12	9.984 6894	57
(20) — (19)	= 41 7 32,86	9.818 0374	241

$$Z = 9.608\ 6437$$

(4) — (3)	= 53° 2' 28,16''	$\log \sin = 9.902\ 5835$	158
(15) — (14)	= 30 43 17,12	9.708 3056	354
(21) — (19)	= 84 10 8,50	9.997 7471	21

$$N = 9.608\ 6362$$

$$Z - N = + 0,000\ 0075$$

$$+ 2,53(v_3 - v_2) + 0,57(v_{15} - v_{13}) + 2,41(v_{20} - v_{19}) \\ - 1,58(v_4 - v_3) - 3,54(v_{15} - v_{14}) - 0,21(v_{21} - v_{19}) + 7,5 = 0$$

zusammengefasst:

$$\left. \begin{array}{l} + 4,11 v_3 \quad - 2,97 v_{15} \quad - 2,20 v_{19} \\ - 2,53 v_2 - 1,58 v_4 - 0,57 v_{13} + 3,54 v_{14} + 2,41 v_{20} - 0,21 v_{21} + 7,5 = 0 \end{array} \right\} (b)$$

Nun haben wir auf S. 191—192 zerstreut die 8 linearen Bedingungsgleichungen (c) (d) (e) (f) (g) (h) (a) (b), welche wir jetzt in geordneter Form und in der Reihenfolge (a) (b) ... (h) in die Tabelle I. auf S. 194—195 oben, schreiben:

Aus dieser Tabelle I. S. 194 u. 195 berechnet man leicht alle Summen-Coefficienten $[a a]$, $[a b]$ u. s. w. Z. B.:

a	a^2	a	b	$a b$	$a c$
0,54	0,2916	+ 3,64	- 0,57	- 2,0748	+ 0,54
2,64	6,9696	- 0,57	- 2,97	+ 1,6929	+ 2,64
..	...	- 0,21	- 2,20	+ 0,4620	- 3,40
3,19	10,1942	+ 3,40	- 0,21	- 0,7140	- 3,19
$[a a] = 107,1942$		$[a b] = - 0,6339$		$[a c] = - 3,41$ u. s. w.	

Damit bildet man die Normalgleichungen, welche in abgekürzter Schreibweise und zugleich mit abgerundeten Coefficienten (z. B. 107,19 statt 107,1942) sich so darstellen (abgekürzte Schreibweise nach (2) und (3) unten auf S. 80):

$$\begin{aligned}
 +107,19k_1 - 0,63k_2 - 3,41k_3 + 3,27k_4 + 0,08k_5 + 0,49k_6 - 0,87k_7 - 0,24k_8 + 18,20 &= 0 \\
 .. + 58,16k_2 - 2,32k_3 .. + 1,01k_5 - 8,09k_6 + 8,63k_7 + 2,44k_8 + 7,50 &= 0 \\
 .. + 6,00k_3 - 2,00k_4 - 2,00k_7 - 2,00k_8 - 1,02 &= 0 \\
 .. + 6,00k_4 - 2,00k_5 + 2,22 &= 0 \\
 .. + 6,00k_5 - 2,00k_6 .. - 2,00k_8 - 2,36 &= 0 \\
 .. + 6,00k_6 - 2,00k_7 + 2,00k_8 - 0,76 &= 0 \\
 .. + 6,00k_7 + 2,00k_8 + 2,30 &= 0 \\
 .. + 6,00k_8 + 4,30 &= 0
 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser 8 Gleichungen gab:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -0,177 & k_2 &= -0,048 & k_3 &= -0,387 & k_4 &= -0,367 \\
 k_5 &= +0,112 & k_6 &= +0,422 & k_7 &= -0,014 & k_8 &= -0,931
 \end{aligned}$$

damit kann man die Verbesserungen v ausrechnen nach den Gleichungen (9) § 39. S. 119, nämlich:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \dots \\
 v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \dots \text{ u. s. w.}
 \end{aligned}$$

Man folgt dabei den Bedingungsgleichungen nach Vertikalreihen und bekommt eine Ausrechnung, welche wir unmittelbar unter der Tabelle der Bedingungsgleichungen I. auf S. 194 u. 195 tabellarisch in II. dargestellt haben.

Eine erste Rechenprobe hat man hier darin, dass die v stationsweise gruppiert je die Summe Null geben müssen. Dieses ist auf S. 194 u. 195 unten durch dickere Vertikalstriche angedeutet, z. B.:

$$+ 0,020 + 0,679 - 0,633 - 0,545 + 0,479 = 0.$$

Diese Probe ist übrigens nicht tiefgreifend, denn wenn sogar die k ganz falsch wären, würden die Stationssummen der v doch $= 0$ sein wegen der Gruppierung der Coefficienten der Bedingungsgleichungen. Man wird möglichst rasch zu der entscheidenden Probe eilen, ob die Verbesserungen v zu völligem Stimmen der Bedingungsgleichungen führen; dieses werden wir jedoch erst später auf S. 197 behandeln, und zunächst (aus einigen formellen Gründen) die Ausrechnung der $[v^2] = -[w k]$ vornehmen, was eine Rechenprobe enthält und auch sogleich zu dem mittleren Fehler führt.

I. Bedingungsgleichungen, z. B. $-0,34 + 2,6$

		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
k_1	a	-0,54	+2,64	-2,10	-3,13	+4,13	-1,7
k_2	b	..	-2,53	+4,11	-1,53
k_3	c	-1	+1	-1	+1
k_4	d	+1	-1	..	-1	+1	-1	+1	..
k_5	e	-1	+1	-1	+1
k_6	f	-1	+1
k_7	g	..	-1	+1
k_8	h	..	-1	..	+1

II. Ausrechnung der Verbesserungen v aus den Korrelationen z. B.

$k_1 = -0,177$	+0,096	-0,467	+0,372	+0,554	-0,36	+0,31
$k_2 = -0,048$..	+0,121	-0,197	+0,076
$k_3 = -0,387$	+0,337	-0,387	+0,387	-0,387
$k_4 = -0,367$	-0,367	+0,367	..	+0,367	-0,367	+0,367	-0,36	+0,11
$k_5 = +0,112$	-0,112	+0,112
$k_6 = +0,422$	-0,422	+0,422
$k_7 = -0,014$..	+0,014	-0,014
$k_8 = -0,931$..	+0,931	..	-0,931
	+0,020	+0,679	-0,633	-0,545	+0,479	+0,483	-0,487	+0,005	+0,921	-1,36	+0,42
	$= v_1$	$= v_2$	$= v_3$	$= v_4$	$= v_5$	$= v_6$	$= v_7$	$= v_8$	$= v_9$	$= v_{10}$	$= v_{11}$

Fortsetzung des Textes von S. 193 unten.

Indem man die v auf 0,01" abrundet, hat man:

v	v^2	v	v^2	v	v^2
1. +0,02"	0,0004	9. +0,92"	0,8464	17. -0,11"	0,0121
2. +0,68	0,4624	10. -1,34	1,7956	18. +0,24	0,0576
3. -0,63	0,3969	11. +0,42	0,1764	19. +0,16	0,0256
4. -0,55	0,3025	12. +0,43	0,1849	20. +0,81	0,6561
5. +0,48	0,2304	13. +0,00	0,0000	21. -1,15	1,3225
6. +0,48	0,2304	14. -1,10	1,2100	22. +0,18	0,0324
7. -0,49	0,2401	15. +0,67	0,4489		2,1063
8. +0,01	0,0001	16. -0,13	0,0169		4,6791
	1,8632		4,6791		1,8632
					8,6486

Controllrechnung:

	w	k	$-wk$
1.	+18,20	-0,177	3,2214
2.	+7,50	-0,048	0,3600
3.	-1,02	-0,387	-0,3947
4.	+2,22	-0,367	0,8147
5.	-2,36	+0,112	0,2643
6.	-0,76	+0,422	0,3207
7.	+2,30	-0,014	0,0322
8.	+4,30	-0,931	4,0033
			8,6219

(3)

$$+2,64 v_7 - 2,10 v_8 \dots - 3,19 v_{22} + 18,20 = 0$$

v_i	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	w
+4,3	-1,75	-3,07	+3,64	. .	-0,57	-1,64	+3,06	-1,42	-0,21	. .	+3,40	-3,19	+18,20
.	-0,57	+3,54	-2,97	-2,20	+2,41	-0,21	. .	+7,50
.	-1	+1	-1,02
+1	+2,22
-1	+1	-1	+1	-2,36
.	-1	. .	+1	-1	+1	-0,76
.	-1	+1	-1	. .	+1	. .	+2,30
.	-1	+1	-1	+1	. .	+4,30

$$\text{z. B. } v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots = +0,387 - 0,367 = +0,020$$

-0,387	+0,310	+0,543	-0,644	. .	+0,101	+0,290	-0,541	+0,251	+0,037	. .	-0,602	+0,565	
.	+0,027	-0,169	+0,142	+0,106	-0,116	+0,010	. .	
.	+0,387	-0,387	
-0,112	+0,112	-0,112	+0,112	
.	-0,422	. .	+0,422	-0,422	+0,422	
.	+0,014	-0,014	+0,014	. .	-0,014	. .	
.	+0,931	-0,931	+0,931	-0,931	. .	
-0,422	+0,431	+0,004	-1,100	+0,665	-0,132	-0,105	+0,237	+0,157	+0,815	-1,150	+0,178		
$= v_{11}$	$= v_{12}$	$= v_{13}$	$= v_{14}$	$= v_{15}$	$= v_{16}$	$= v_{17}$	$= v_{18}$	$= v_{19}$	$= v_{20}$	$= v_{21}$	$= v_{22}$		

Fortsetzung des Textes von S. 194 unten.

Die Übereinstimmung zwischen 8,65 und 8,62 ist genügend, wir berechnen daraus den mittleren Fehler einer Richtung, nämlich wegen der Anzahl 8 von Bedingungsgleichungen:

$$m = \sqrt{\frac{8,63}{8}} = \pm 1,04'' \quad (4)$$

Nun wollen wir aber zu der letzten durchschlagenden Probe, nämlich Erfüllung der Bedingungsgleichungen übergehen, und müssen hiezu die soeben berechneten v den unter (1) auf S. 190 früher mitgeteilten beobachteten Richtungen zufügen.

Dabei haben wir einige kleine formelle Abweichungen zu erklären, indem einzelne v der nachfolgenden Tabelle S. 196 bis zu $0,01''$ von den soeben in (2) zusammengestellten v abweichen, z. B. $v_9 = +0,92''$ erscheint nachher $= +0,91''$. Da die $0,01''$ in unserem Falle überhaupt keinen reellen Wert mehr haben, sondern nur als letzte Kontroll-Rechenstelle mitlaufen, brauchen wir kaum Rechenschaft über ein Schwanken von $0,01''$ zu geben; und es kommt bei solchen Ausgleichungen oft vor, dass man kleine nach der Ausgleichung noch gebliebene Missstimmigkeiten in den Bedingungsgleichungen kurzer Hand nach Gutdünken vollends tilgt. Indessen in unserem Falle haben wir neben der in vorstehendem mitgeteilten Ausgleichung noch eine zweite Ausgleichung mit schärferer Fassung der zweiten Seitengleichung durchgeführt, und diese zweite Ausgleichung bei Ansetzen der endgültigen v mitbenützt, woraus die erwähnten weniger formellen Abweichungen von $0,01''$ hervorgegangen sind.

Wir werden am Schlusse dieses Kapitels hierauf zurückkommen und auch einen anderen formellen Umstand, betreffend die Reihenfolge der Bedingungsgleichungen in der Tabelle I. oben auf S. 194—195 noch erörtern.

	beobachtet (vgl. S. 190)	Verbes- serung <i>v</i>	Ausgeglichen
<i>1. Aegidius.</i>			
Wasserturm	(1) = 0° 0' 0,00''	+ 0,02''	0° 0' 0,02''
Burg	(2) = 70 56 34,82	+ 0,68	70 56 35,50
Schanze	(3) = 110 42 21,36	— 0,63	110 42 20,73
Steuerndieb	(4) = 163 44 49,52	— 0,55	163 44 48,97
Willmer	(5) = 259 4 4,67	+ 0,48	259 4 5,15
		50,37 0,00	50,37
<i>2. Wasserturm.</i>			
Burg	(6) = 284° 21' 15,98''	+ 0,48''	284° 21' 16,46''
Aegidius	(7) = 0 0 0,00	— 0,48	359 59 59,52
Willmer	(8) = 45 5 26,24	0,00	45 5 26,24
		42,22 0,00	42,22
<i>3. Willmer.</i>			
Wasserturm	(9) = 326° 1' 19,35''	+ 0,91''	326° 1' 20,24''
Aegidius	(10) = 0 0 0,00	— 1,33	359 59 58,67
Steuerndieb	(11) = 50 15 28,80	+ 0,42	50 15 29,22
		48,13 0,00	48,13
<i>4. Steuerndieb.</i>			
Willmer	(12) = 325° 34' 46,28''	+ 0,43''	325° 34' 46,71
Aegidius	(13) = 0 0 0,00	+ 0,01	0 0 0,01
Burg	(14) = 44 9 14,00	— 1,09	44 9 12,91
Schanze	(15) = 74 52 31,12	+ 0,66	74 52 31,78
		31,40 + 0,01	31,41
<i>5. Schanze.</i>			
Steuerndieb	(16) = 307° 55' 0,00''	— 0,13''	307° 54' 59,87''
Aegidius	(17) = 0 0 0,00	— 0,10''	359 59 59,90
Burg	(18) = 56 4 7,29	+ 0,23	56 4 7,52
		7,29 0,00	7,29
<i>6. Burg.</i>			
Schanze	(19) = 275° 49' 51,50''	+ 0,16''	275° 49' 51,66''
Steuerndieb	(20) = 316 57 24,36	+ 0,81	316 57 25,17
Aegidius	(21) = 0 0 0,00	— 1,15	359 59 58,85
Wasserturm	(22) = 33 24 40,16	+ 0,17	33 24 40,33
		56,02 — 0,01	56,01

Mit diesen ausgeglichenen Richtungen bildet man wieder die Dreieckswinkel als Differenzen, ebenso wie früher in (c) bis (h) S. 191 mit den beobachteten Richtungen. Ausführlich schreiben wir dieses nur für das erste Dreieck:

[2] = 70° 56' 35,50''	[7] = 359° 59' 59,52''	[22] = 33° 24' 40,33''
[1] = 0 0 0,02	[6] = 284 21 16,46	[21] = 359 59 58,85
[2]—[1] = 70° 56' 35,48''	[7]—[6] = 75° 38' 43,06''	[22]—[21] = 33° 24' 41,48''
Aegidius [2]—[1] = 70° 56' 35,48''		
Wasserturm [7]—[6] = 75 38 43,06		
Burg [22]—[21] = 33 24 41,48		
	180° 0' 0,02''	[c]

In gleicher Weise bildet man auch die übrigen ausgeglichenen Dreiecke:

Aegidius	[1]—[5] = 100° 55' 54,87"	Aegidius	[3]—[2] = 39° 45' 45,23"
Willmer	[10]—[9] = 33 58 33,43	Schanze	[18]—[17] = 56 4 7,62
Wasserturm	[8]—[7] = 45 5 26,72	Burg	[21]—[19] = 84 10 7,19
	180° 0' 0,02" [d]		180° 0' 0,04" [g]
Aegidius	[5]—[4] = 95° 19' 16,18"	Aegidius	[4]—[2] = 93° 48' 13,47"
Steuerndieb	[13]—[12] = 34 25 13,30	Steuerndieb	[14]—[13] = 44 9 12,89
Willmer	[11]—[10] = 50 15 30,55	Burg	[21]—[20] = 43 2 33,68
	180° 0' 0,03" [e]		180° 0' 0,04" [h]
Aegidius	[4]—[3] = 53° 2' 28,24"	Burg	[20]—[19] = 41° 7' 33,51"
Steuerndieb	[15]—[13] = 74 52 31,77	Steuerndieb	[15]—[14] = 30 43 18,88
Schanze	[17]—[16] = 52 5 0,03	Schanze	[18]—[16] = 108 9 7,65
	180° 0' 0,04" [f]		180° 0' 0,04" [i]

Zur Dreiecksberechnung wird man die kleinen Excesse, welche zwischen 0,02" und 0,04" betragen, noch auf die Dreieckswinkel verteilen, und dann braucht man nur noch eine Basislänge, um alle Dreiecksseiten nach dem Sinussatz berechnen zu können. Wie am Schlusse des vorigen § 60. S. 188 mitgeteilt wurde, ist die Basisseite

$$\text{Aegidius—Wasserturm } S = 2391,672^m$$

$$\log S = 3,378\ 7016$$

Damit wurden in der angegebenen Weise auch alle übrigen Dreiecksseiten widerspruchsfrei berechnet mit folgenden Ergebnissen:

Aegidius—Wasserturm	$\log S = 3,378\ 7016$	}	(5)
Aegidius—Willmer	$\log S = 3,481\ 5665$		
Aegidius—Steuerndieb	$\log S = 3,615\ 2086$		
Aegidius—Schanze	$\log S = 3,702\ 8735$		
Aegidius—Burg	$\log S = 3,624\ 0521$		
Wasserturm—Willmer	$\log S = 3,623\ 4413$		
Willmer—Steuerndieb	$\log S = 3,727\ 4425$		
Steuerndieb—Schanze	$\log S = 3,620\ 7673$		
Schanze—Burg	$\log S = 3,511\ 0402$		
Burg—Wasserturm	$\log S = 3,613\ 3487$		
Burg—Steuerndieb	$\log S = 3,780\ 5583$		

§ 62. Genauigkeit einer Netzdiagonale.

Mit den ausgeglichenen Richtungen, Winkeln und Dreiecksseiten des vorigen § 61. kann man alles zum weiteren geodätischen Gebrauch Erforderliche vollends berechnen, und dem Praktiker raten wir deshalb, sofort von § 61. zu § 63. u. § 64. überzugehen, wo wir die Koordinatenberechnung zu dem Fünfeck von § 61. behandeln werden.

Indessen für unseren theoretischen Gang ist es nützlich, hier eine Einschaltung zu machen, betreffend die Genauigkeit irgend einer aus der Basis Aegidius—Wasserturm abgeleiteten Dreiecksseite.

Da die Basis Aegidius—Wasserturm ziemlich klein ist im Vergleich mit der Ausdehnung des Gesamtnetzes, ist es nicht ohne Interesse, die Fehlerübertragung von dieser Basis auf eine der längeren Seiten, z. B. auf die nahezu $2\frac{1}{2}$ mal so lange

Diagonale Burg—Steuerndieb zu berechnen. Dabei handelt es sich nur um diejenigen Fehler, welche durch die Winkelmessungen erzeugt und weiter getragen werden, während die Basis Aegidius—Wasserturm selbst hier als fehlerfrei betrachtet wird.

Wir wollen hiemit eine Funktions-Gewichtsberechnung nach der Theorie von § 42. machen.

Setzen wir die Basis Aegidius—Wasserturm = b und die Diagonale Burg—Steuerndieb = s , so besteht nach Fig. 1. § 61. S. 189 die Beziehung:

$$s = b \frac{\sin [7-6] \sin [4-2]}{\sin [22-21] \sin [14-13]} \quad (1)$$

Die beiden hiezu erforderlichen Dreiecke sind mit ihren ausgeglichenen Winkeln unter [c] und [h] auf S. 196—197 angegeben, nämlich mit Zufügung der Legendreschen ebenen Winkel:

			Legendre
Aegidius	[2—1] =	70° 56' 35,48"	70° 56' 35,47"
Wasserturm	[7—6] =	75 38 43,06	75 38 43,06
Burg	[22—21] =	33 24 41,48	33 24 41,47
		180° 0' 0,02"	180° 0' 0,00"
Aegidius	[4—2] =	92° 48' 13,47"	92° 48' 13,46"
Steuerndieb	[14—13] =	44 9 12,89	44 9 12,88
Burg	[21—20] =	43 2 33,68	43 2 33,66
		180° 0' 0,04"	180° 0' 0,00"

Mit den Legendreschen Winkeln rechnet man:

	Diff. für 10"		Diff. für 10"
$\log \sin [7-6] = 9.986\ 2250$	54	$\log \sin [22-21] = 9.740\ 8745$	319
$\log \sin [4-2] = 9.999\ 4798$	— 11	$\log \sin [14-13] = 9.842\ 9735$	216
9.985 7048		— 9.583 8480	
		= + 0.416 1520	

$$\begin{aligned} \text{Aegidius—Wasserturm } \log b &= 3.378\ 7016 \\ &+ 9.985\ 7048 \\ &+ 0.416\ 1520 \end{aligned}$$

$$\text{Burg—Steuerndieb } \log s = 3.780\ 5584, \quad s = 6033,349^m \quad (2)$$

Dieses stimmt genügend mit 3.780 5583, wie auf S. 197 angegeben ist, und zwar kommt, gelegentlich bemerkt, die kleine Abweichung von 1 Einheit der 7. Stelle in $\log s$ nur daher, dass die Werte (5) am Schluss von § 61. S. 197 bei den Rechnungen aus den verschiedenen Dreiecken in der letzten Stelle nötigenfalls gemittelt wurden.

Aus der vorstehenden logarithmischen Berechnung mit den beigesetzten Differenzen für $\log \sin$ kann man die Fehlerfunktion anschreiben:

$$\log s - \log b = +0,54(d_7 - d_6) - 0,11(d_4 - d_2) - 3,19(d_{22} - d_{21}) - 2,16(d_{14} - d_{13}) \quad (3)$$

dabei bedeuten d_7 , d_6 u. s. w. die Änderungen der gemessenen Richtungen (7), (6)... und zwar d_7 , d_6 ... in Sekunden, wenn $\log s - \log b$ in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale verstanden. Dieses Verfahren ist offenbar ganz entsprechend der Aufstellung der linearen Seitengleichungen, welche wir in § 57. S. 167 gelehrt haben; und man könnte auch die Coefficienten 0,54 u. s. w. ähnlich wie dort als Differentialquotienten der $\log \sin$ -Funktion nachweisen, was nochmals auszuführen nun nicht nötig ist.

Wir betrachten nun die vorstehende Gleichung (3) als Funktion F in dem Sinne von § 42., (indem unsere d denselben Charakter haben wie die x von (1) § 42. S. 123) und damit werden die Coefficienten f :

$$\begin{array}{llll} f_7 = +0,54 & f_6 = -0,54 & f_4 = -0,11 & f_2 = +0,11 \\ f_{22} = -3,19 & f_{21} = +3,19 & f_{14} = -2,16 & f_{13} = +2,16 \end{array}$$

alle anderen f sind = Null. Wir bilden eine Tabelle aller f und aller derjenigen $a b c \dots$, welche mit den vorhandenen f zusammen vorkommen. Die $a b c \dots$ sind von der früheren grossen Coefficiententabelle § 61. S. 194—195 hierher übertragen.

	2	4	6	7	13	14	21	22
a	-0,54	+2,64	+3,64	..	+3,40	-3,19
b	-2,53	-1,58	-0,57	+3,54	-0,21	..
c	+1	..	-1	+1	-1	+1
d	-1
e	..	-1	+1
f	..	+1	-1
g	-1	+1	..
h	-1	+1	-1	+1	+1	..
f	+0,11	-0,11	-0,54	+0,54	+2,16	-2,16	+3,19	-3,19

Nun rechnet man alle af , bf , cf u. s. w., z. B.:

a	f	af	cf
-0,54	-0,54	+ 0,2916	+ 0,11
+2,64	+0,54	+ 1,4256	+ 0,54
+3,64	+2,16	+ 7,8624	+ 0,54
+3,40	+3,19	+10,8460	-3,19
-3,19	-3,19	+10,1761	-3,19
		$[af] = 30,6017$	$[cf] = -5,19$ u. s. w.

Dieses sind die Ersatzglieder für die Absolutglieder w der Normalgleichungen, und entsprechend (15) S. 125 haben wir folgendes Coefficientensystem:

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	f
a	+107,19	-0,63	-3,41	+3,27	+0,08	+0,49	-0,87	-0,24	+30,60
b	...	+58,16	-2,32	-0,00	+1,01	-8,09	+8,63	+2,44	-9,65
c	+6,00	-2,00	-2,00	-2,00	-5,19
d	+6,00	-2,00	-0,54
e	+6,00	-2,00	...	-2,00	+2,27
f	+6,00	-2,00	+2,00	-2,27
g	+6,00	+2,00	+3,08
h	+6,00	-1,35
f	+30,29 = $[f]$

Dieses System wird 8 mal reduziert, d. h. es werden der Reihe nach k_1 , k_2 bis k_8

eliminiert und dabei das Schlussglied immer mitgeführt. Durch diese 8 Eliminationen wird man erhalten (nach Gleichung (12) S. 124):

$$30,29 - (8,74 + 1,54 + 3,63 + 1,68 + 0,33 + 3,01 + 1,39 + 0,87)$$

$$\text{d. h. } \frac{1}{P} = 30,29 - 21,19 = 9,10$$

Diese ganze Rechnung von S. 199 an ist nur mit dem Rechenschieber gemacht, deshalb höchstens auf 0,1 sicher, daher zu setzen rund:

$$\frac{1}{P} = 9,1$$

Da der mittlere Fehler der Gewichtseinheit früher in (4) § 61. S. 195 rund $m = 1,0''$ gefunden wurde, haben wir nun den mittleren Funktionsfehler:

$$M = m \sqrt{\frac{1}{P}} = 1,0 \sqrt{9,1} = \pm 3,0 \quad (3)$$

Dieses ist ein mittlerer Fehler in Einheiten der 6ten Logarithmenstelle, wir haben also nach (2) und (3):

$$\log s = 3.780\,5584 \pm 30$$

$$\text{also } s = 6033,349^m \pm 0,042^m$$

Dieses ist geradezu aus der Logarithmentafel erhalten, indem ± 30 an der fraglichen Stelle bei der Tafeldifferenz 72 den Betrag $\pm 0,042^m$ ausmacht. Mehr theoretisch hat man:

$$d \log s = \frac{\mu}{s} ds = \pm 0,0000030 \quad \frac{ds}{s} = \frac{0,0000030}{0,434 \dots} = 0,000007$$

d. h. 7 Milliontel oder 7 Millimeter auf 1 Kilometer, was auf 6 Kilometer ausgerechnet wieder $\pm 42^{mm}$ giebt wie vorhin.

Dieses ist der mittlere zu fürchtende Fehler der Diagonale Burg—Steuerndieb, insofern diese Seite trigonometrisch aus der fehlerfrei angenommenen Seite Aegidius—Wasserturm abgeleitet ist. Die erzielte Genauigkeit ist offenbar sehr befriedigend.

In gleicher Weise könnte man auch einen bei der Kürze der Basis nicht ungefährlichen *Verdrehungsfehler* des Netzes bestimmen.

§ 63. Abrisse und Coordinaten im System der Landesaufnahme.

Wie schon am Schluss von § 60. angegeben wurde, haben wir für unsere zwei Basispunkte Aegidius und Linden Wasserturm Anschluss-Coordinaten im conformen rechtwinkligen System der Landesaufnahme.

Diese Coordinaten sind für das allgemeine Verständnis der preussischen Geodäsie sehr wichtig, dagegen hat das Kataster andere Coordinaten, welche wir nachher in dem besonderen § 64. behandeln werden.

Die Hauptformeln der conformen rechtwinkligen Coordinaten haben wir vor Kurzem in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 167—171 entwickelt und wir wollen hier nur die Gebrauchsformeln hersetzen, mit Beziehung auf Fig. 1.

Ein Punkt A habe die Projektions-Coordinaten $x_1 y_1$, und ein Punkt B habe entsprechend $x_2 y_2$, dann hat man für die geradlinige Entfernung s und den Richtungswinkel t_1 in dem ebenen rechtwinkligen Systeme, wie immer:

$$\left. \begin{aligned} \tan t_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ s &= \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} = \frac{x_2 - x_1}{\cos t_1} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \end{aligned} \right\} (1)$$

Ausserdem sei S die sphärische Entfernung der Punkte A und B , hierzu dient das Vergrößerungsverhältnis:

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dS} = m &= 1 + \frac{y^2}{2r^2} \text{ oder } \log m = \frac{\mu}{2r^2} y^2 \\ \text{wobei für 7stell. Logarithmen } \log \frac{\mu}{2r^2} &= 2.72670 \end{aligned} \right\} (2)$$

Für eine Entfernung S und ihre Projektion s hat man in logarithmischer Form:

$$\left. \begin{aligned} \log s - \log S &= \frac{\mu}{12r^2} (y_1^2 + 4y_0^2 + y_2^2), \\ \text{wobei } y_0 &= \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ und } \log \frac{\mu}{12r^2} = 1.94855 \end{aligned} \right\} (3)$$

Wenn y_1 und y_2 nahe gleich sind, d. h. wenn die Differenz $y_2 - y_1$ verhältnismässig klein ist im Vergleich mit y selbst, kann man genähert rechnen:

$$\left. \begin{aligned} \text{Genähert } \log s - \log S &= \frac{\mu}{8r^2} (y_1 + y_2)^2, \\ \text{wo } \log \frac{\mu}{8r^2} &= 2.12464 \end{aligned} \right\} (4)$$

Weiter sei T_1 der sphärische (auch sphäroidische) Richtungswinkel des Strahls AB in A . Zur Reduktion von t_1 auf T_1 hat man:

$$\left. \begin{aligned} T_1 - t_1 &= (x_2 - x_1) \frac{(2y_1 + y_2)}{3} \frac{\rho}{2r^2} \\ \text{und entsprechend: } T_2 - t_2 &= (x_1 - x_2) \frac{(2y_2 + y_1)}{3} \frac{\rho}{2r^2} \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\text{wo } \log \frac{\rho}{2r^2} = 1.40334$$

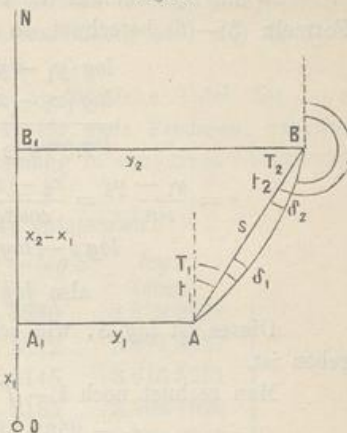
Wenn $y_2 - y_1$ klein ist im Vergleich mit y_1 und y_2 selbst, kann man auch diese beiden Reduktionen gleich nehmen, nämlich genähert:

$$\left. \begin{aligned} T_1 - t_1 = t_2 - T_2 &= (x_2 - x_1) (y_2 + y_1) \frac{\rho}{4r^2}, \\ \text{wo } \log \frac{\rho}{4r^2} &= 1.10231 \end{aligned} \right\} (6)$$

Der Ursprung des Systems ist in dem Meridian für 31° Länge auf der Breite $52^\circ 42' 2.53251''$ (entsprechend $52^\circ 40'$ auf der Gauss'schen conformen Kugel). Die $+x$ werden nach Norden und die $+y$ nach Osten gezählt, wir haben daher in der Gegend von Hannover — y und — x , und unsere beiden Basispunkte sind:

Aegidius	$y_1 = -244\,656,090^m$	$x_1 = -30\,624,971^m$
Wasserturm	$y_2 = -246\,956,479^m$	$x_2 = -31\,285,875^m$
	$y_1 - y_2 = +2\,300,389^m$	$x_1 - x_2 = +660,904^m$

Fig. 1.



Wenn man hieraus die Entfernung und die beiden Richtungswinkel nach den Formeln (3)–(6) berechnet, so erhält man:

$$\begin{aligned} \log(y_1 - y_2) &= 3.361\,8013 \\ \log(x_1 - x_2) &= 2.820\,1384 \\ \log \tan t_2 &= 0.541\,6629 & t_2 = 73^\circ 58' 14.12'' & (7) \\ s = \frac{y_1 - y_2}{\sin t_2} = \frac{x_2 - x_1}{\cos t_2} &\dots 3.379\,0236 \\ \log s - \log S &= 3220 \text{ nach Formel (3) oder (4)} \\ \text{also } \log S &= 3.378\,7016 & (8) \end{aligned}$$

Dieses ist $\log S$, wie schon in der Dreiecksausgleichung § 61. S. 197 angegeben ist.

Man rechnet noch $t - T$ nach (5) oder (6), und hat dann:

$$\begin{aligned} t_1 &= 253^\circ 58' 14.12'' & t_2 &= 73^\circ 58' 14.12'' \\ T_1 - t_1 &= +0.41'' & T_2 - t_2 &= -0.41'' \\ T_1 &= 253^\circ 58' 14.53'' & T_2 &= 73^\circ 58' 13.71'' & (9) \end{aligned}$$

Um auch für die übrigen Dreiecksseiten die $\log s - \log S$ und die $t - T$ zu berechnen, muss man zuerst durch abgerundete Annahmen vorläufige Näherungswerte ermitteln, was übrigens auch aus anderen Gründen schon nützlich ist. Solche Näherungswerte sind:

1. Aegidius	$y = -244656.1^m$	$x = -30625.0^m$	}	(10)
2. Wasserturm	-246956.5	-31285.9		
3. Willmer	-243280.9	-33328.4		
4. Steuerndieb	-241167.9	-28421.4		
5. Burg	-247076.5	-27179.2		
6. Schanze	-244244.4	-25592.9		

Bei der Berechnung der $\log s - \log S$ ist es sehr angenehm, dass diese Reduktionen nur von den Ordinaten y und gar nicht von den Abscissen x abhängen; man kann deswegen die Berechnung der $\log m$ ein für allemal durch eine Tabelle erledigen. Wir haben für unseren Hannoverschen Messungsbereich eine solche Tafel berechnet, von der wir aber hier der Raumsparung wegen nur die Hauptwerte für y von 1^{km} zu 1^{km} wachsend angeben, und zwar $\log m$ in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

y	$\log m$	y	$\log m$	y	$\log m$	y	$\log m$
230 ^{km}	2819.4	240 ^{km}	3069.9	250 ^{km}	3331.0	260 ^{km}	3602.8
231	2844.0	241	3095.5	251	3357.7	261	3630.6
232	2868.6	242	3121.3	252	3384.6	262	3658.5
233	2893.4	243	3147.1	253	3411.5	263	3686.5
234	2918.3	244	3173.1	254	3438.5	264	3714.6
235	2943.3	245	3199.1	255	3465.6	265	3742.8
236	2968.4	246	3225.3	256	3492.8	266	3771.1
237	2993.6	247	3251.6	257	3520.2	267	3799.5
238	3018.9	248	3278.0	258	3547.6	268	3828.0
239	3044.4	249	3304.4	259	3575.2	269	3856.6

Man kann diese Sache auch graphisch behandeln: man überzieht das Netzbild der Triangulierung (Fig. 1. § 60. S. 185 mit einer Schaar von Ordinatenlinien konstanter $\log m$ und kann dann für jeden Punkt das zugehörige $\log m$ interpolatorisch abgreifen. Die 7te Logarithmenstelle bekommt man auf diesem Wege sogar in dem

kleinen Maassstabe 1 : 80 000 von Fig. 1. S. 185 noch nahezu richtig, und jedenfalls hat man damit eine angemessene Kontrolle der Tafelberechnung oder der unmittelbaren Berechnung nach der Formel (3) oder (4) S. 201.

Die preussische Landesaufnahme benützt eine ausführliche Tafel der $\log m$ nach dem Prinzip unseres vorstehenden Beispiels (11) für ganz Preussen, nebenbei ein kleines Zeichen dafür, wie viel angenehmer die Rechnung in conformen Coordinaten ist im Vergleich mit den Soldner'schen Coordinaten. —

In solcher Weise sind die nachfolgenden Werte entstanden:

Dreiecksseite	$\log S$ (sphärisch)	$\log s - \log S$	$\log s$ (eben)
Aegidius—Wasserturm	3.378 7016	+ 3220	3.379 0236
Aegidius—Willmer	3.481 5665	+ 3172	3.481 8837
Aegidius—Steuerndieb	3.615 2086	+ 3145	3.615 5231
Aegidius—Schanze	3.702 8735	+ 3185	3.703 1920
Aegidius—Burg	3.624 0521	+ 3222	3.624 3743
Wasserturm—Willmer	3.623 4413	+ 3202	3.623 7615
Willmer—Steuerndieb	3.727 4425	+ 3127	3.727 7552
Steuerndieb—Schanze	3.620 7673	+ 3140	3.621 0813
Schanze—Burg	3.511 0402	+ 3216	3.511 3618
Burg—Wasserturm	3.613 3487	+ 3252	3.613 6739
Burg—Steuerndieb	3.780 5583	+ 3177	3.780 8760

(12)

Nach dieser Seitenberechnung kommt die Aufstellung der Richtungs-Abrisse in der nachfolgenden Tabelle auf S. 204, in welcher aber nicht bloss die Richtungen des Fünfecks von § 61. S. 189, sondern auch noch diejenigen Richtungen kommen, welche in den Messungstabellen von § 60. S. 186 sich auf die Richtungen nach den zwei Punkten Hochschule und Dreifaltigkeit beziehen.

In diesem Abrisse stehen in erster Spalte die beobachteten Richtungen T , d. h. solche Werte, welche gegen die unmittelbar beobachteten Richtungen von § 60. S. 186 je um einen konstanten Betrag auf einer Station verschoben sind.

Insofern man beobachtete Sätze stets um einen willkürlichen Winkel im ganzen drehen darf (gerade so wie auch schon die Annahme $0^\circ 0' 0''$ für je einen Strahl in den Messungssätzen von § 60. S. 186 auf willkürlicher Verdrehung beruht), kann man die Zahlen der ersten Spalte von S. 204 immer noch als „beobachtet“ bezeichnen, wenn ihre Verschiebung konstant ist, und es handelt sich nur noch um den Betrag dieser Verschiebung, den wir an dem ersten Beispiel der Station Aegidius dadurch ermitteln wollen, dass wir mit dem Einsetzen des *ausgeglichenen* T_1 in der dritten Spalte beginnen. Hier ist der aus den Basis-Coordinaten in (9) S. 202 berechnete Wert $T_1 = 253^\circ 58' 14,53''$ einzusetzen, und da die Netzverbesserungen v der zweiten Spalte von § 61. S. 196 her bekannt sind, haben wir auch das erste beobachtete $T = 253^\circ 58' 14,53'' - 0,02'' = 253^\circ 58' 14,51''$, und die früher auf Station Aegidius beobachtet angegebenen Werte von S. 196 erscheinen sämtlich um $253^\circ 58' 14,51''$ vergrößert in der ersten Spalte von S. 204, und um gleich viel vermehrt erscheinen auch die ausgeglichenen Richtungen von S. 196 nun in der dritten Spalte von S. 204. Hat man die $t - T$ in die 4te Spalte von S. 204 eingesetzt, so bekommt man auch alle Werte t der letzten Spalte von S. 204 und damit auch den Übergang zu den anderen Stationen. Denn da die t ebenen geradlinigen Coordinaten entsprechen, gehen sie von einem Punkte zum jenseitigen Punkte durch Zufügung von $\pm 180^\circ$ über.

Abriss im conformen System der Landesaufnahme.

(13)

	Beobachtet T (sphärisch)	v	Ausgeglichen T (sphärisch)	$t - T$	Ausgeglichen t (eben)
1. Aegidius.					
			($\gamma = 2^\circ 50' 49,56''$)		
Wasserturm . . . 1.	253° 58' 14,51"	+ 0,02"	253 58 14,53	- 0,41"	253 58 14,12
Hochschule . . .	317 37 7,82			+ 0,93	(317 37 8,75)
Burg 2.	324 54 49,33	+ 0,68	324 54 50,01	+ 2,14	324 54 52,15
Schanze 3.	4 40 35,87	- 0,63	4 40 35,24	+ 3,11	4 40 38,35
Dreifaltigkeit . .	37 38 22,91			+ 0,83	(37 38 23,74)
Steuerndieb . . . 4.	57 43 4,03	- 0,55	57 43 3,48	+ 1,36	57 43 4,84
Willmer 5.	153 2 19,18	+ 0,48	153 2 19,66	- 1,67	153 2 17,99
2. Wasserturm.					
			($\gamma = 2^\circ 52' 23,46''$)		
Burg 6.	358° 19' 30,17"	+ 0,48"	358 19 30,65	+ 2,57"	358 19 33,22
Hochschule . . .	23 11 24,44			+ 1,35	(23 11 25,79)
Aegidius 7.	73 58 14,19	- 0,48	73 58 13,71	+ 0,41	73 58 14,12
Willmer 8.	119 3 40,43	0,00	119 3 40,43	- 1,27	119 3 39,16
3. Willmer.					
			($\gamma = 2^\circ 49' 43,18''$)		
Wasserturm . . . 9.	299° 3' 36,98"	+ 0,91"	299 3 37,89	+ 1,26"	299 3 39,15
Aegidius 10.	333 2 17,65	- 1,33	333 2 16,32	+ 1,67	333 2 17,99
Dreifaltigkeit . .	355 11 53,75			+ 2,49	(355 11 56,24)
Steuerndieb . . . 11.	23 17 46,45	+ 0,42	23 17 46,87	+ 3,01	23 17 49,88
4. Steuerndieb.					
			($\gamma = 2^\circ 48' 31,02''$)		
Willmer 12.	203° 17' 52,46"	+ 0,43"	203 17 52,89	- 3,00"	203 17 49,89
Aegidius 13.	237 43 6,18	+ 0,01	237 43 6,19	- 1,35	237 43 4,84
Dreifaltigkeit . .	250 39 21,26			- 0,53	(250 39 20,73)
Hochschule . . .	261 48 52,72			- 0,43	(261 48 52,29)
Burg 14.	281 52 20,18	- 1,09	281 52 19,09	+ 0,76	281 52 19,85
Schanze 15.	312 35 37,30	+ 0,66	312 35 37,96	+ 1,73	312 35 39,69
5. Schanze.					
			($\gamma = 2^\circ 50' 49,06''$)		
Steuerndieb . . . 16.	132° 35' 41,56"	- 0,13"	132 35 41,43	- 1,74"	132 35 39,69
Dreifaltigkeit . .	170 24 24,64			- 2,28	(170 24 22,36)
Aegidius 17.	184 40 41,56	- 0,10	184 40 41,46	- 3,11	184 40 38,35
Burg 18.	240 44 48,85	+ 0,23	240 44 49,08	- 0,93	240 44 48,10
6. Burg.					
			($\gamma = 2^\circ 52' 42,26''$)		
Schanze 19.	60° 44' 46,95"	+ 0,16"	60 44 47,11	+ 0,99"	60 44 48,10
Steuerndieb . . . 20.	101 52 19,81	+ 0,81	101 52 20,62	- 0,77	101 52 19,85
Dreifaltigkeit . .	121 19 31,32			- 1,31	(121 19 30,01)
Aegidius 21.	144 54 55,45	- 1,15	144 54 54,30	- 2,15	144 54 52,15
Hochschule . . .	151 38 51,38			- 1,21	(151 38 50,17)
Wasserturm . . . 22.	178 19 35,61	+ 0,17	178 19 35,78	- 2,57	178 19 33,21

Die bei den ausgeglichenen T zugefügten Werte γ sind die Meridianconvergenzen. (Vgl. den späteren § 86.)

Eine Bemerkung mag nur noch denjenigen Strahlen gelten, welche in der Netzausgleichung bis jetzt noch gar nicht vorgekommen sind, nämlich betreffend die Punkte Hochschule und Dreifaltigkeit, diese Strahlen sind von § 60. S. 186 einfach

mit herübergenommen und auf den bereits ausgeglichenen Stationen Aegidius, Wasserturm u. s. w. werden diese neuen Strahlen ganz einfach mit den alten Strahlen von selbst orientiert.

Auf den Stationen Hochschule und Dreifaltigkeit selbst ist dieses noch nicht möglich, und könnte nur etwa näherungsweise geschehen, wovon aber erst im nächsten Kapitel bei der Doppelpunkteinschaltung Hochschule—Dreifaltigkeit gehandelt werden wird.

Nun enthalten die ausgeglichenen Seiten und Richtungen der Tabellen von S. 203 und S. 204 alles was zur Coordinatenrechnung erforderlich ist; man rechnet mit den ebenen Seiten s und den ebenen Richtungswinkeln t wie immer in der Ebene:

$$y_2 = y_1 + s_1 \sin t_1 \quad x_2 = x_1 + s_1 \cos t_1 \quad \text{u. s. w.}$$

Folgendes sind die Ergebnisse dieser Coordinatenrechnung:

Coordinaten im conformen System der Landesaufnahme.

1. Aegidius	$y = -244\,656,090^m$	$x = -30\,624,971^m$	} (14)
2. Wasserturm	$-246\,956,479$	$-31\,285,875$	
3. Willmer	$-243\,280,909$	$-33\,328,385$	
4. Steuerndieb	$-241\,167,896$	$-28\,421,362$	
5. Burg	$-247\,076,504$	$-27\,179,218$	
6. Schanze	$-244\,244,387$	$-25\,592,941$	

§ 64. Abrisse und Coordinaten im Kataster-System mit dem Nullpunkt Celle.

Für die Kataster- und Stadt-Vermessung ist ein anderes Coordinatensystem vorgeschrieben, nach sog. Soldnerscher Art, und zwar mit dem Ursprungspunkt Celle, in welchem wir nun, ganz unabhängig von dem vorigen § 63. die ausgeglichenen Richtungen, Winkel und Seiten von § 61. in Abrissen und Coordinaten verwerten werden.

Die schon in (6) § 60. angegebenen Coordinaten unserer zwei Basispunkte sind:

$$\begin{array}{lcl} \text{Aegidius} & y_1 = -23271,813 & x_1 = -28308,395 \\ \text{Wasserturm} & y_2 = -25538,488 & x_2 = -29071,474 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} \text{Aegidius} \\ \text{Wasserturm} \end{array}} \right\} (1)$$

$$y_1 - y_2 = + 2266,675 \quad x_2 - x_1 = + 763,079$$

In rein *ebener* Rechnung (entsprechend t und s des vorigen § 63.) erhält man:

$$\tan \alpha_0 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad s_0 = \frac{y_1 - y_2}{\sin \alpha_0} = \frac{x_1 - x_2}{\cos \alpha_0}$$

$$\alpha_0 = 71^\circ 23' 38,85'' \quad \log s_0 = 3.378\,7019 \quad (2)$$

Man könnte nun vielleicht wohl, wenn man die Sache praktisch betrachtet, das ganze Netz (Fig. 1. § 60. S. 185 in dieser Weise schlechthin als *eben* nach Coordinaten berechnen, allein die bekannten sphärischen Reduktionen für Soldnersche Coordinaten, (welche in unserem III. Bande, „Handb. d. Verm.“, 3. Aufl., § 46. — § 48. angegeben sind) bringen in unserem Falle doch noch etwa 0,5'' in den Richtungen, und nachdem wir alles auf 0,01'' ausgeglichen haben, wollen wir nun doch nicht

schon wieder 0,5'' vernachlässigen, zumal ja der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung nur $\pm 1,0''$ nach der Netzausgleichung ist.

Oder in den Coordinaten würden wir in rein ebener Richtung schon Widersprüche in den Centimetern erhalten, während es bei einer Stadtvermessung angenehm ist, alles Grundlegende bis auf 1^{mm} formell, jedenfalls aber auf 1^{cm} scharf durchzurechnen. Kurz aus diesen Gründen haben wir uns mit den Ergebnissen (1) und (2) nicht begnügt, sondern haben die berührten Soldnerschen kleinen Korrektionsglieder, ohne dieselben im Einzelnen nachzuweisen, da sie ja als allgemein bekannt angenommen werden dürfen, mit in Rechnung gebracht und gefunden:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = +0,41'' \quad \alpha_2 - \alpha_0 \pm 180^\circ = +0,50'' \quad , \quad \log s - \log s_0 = -0,000\,0003 \quad (4)$$

also zu (2) hinzugefügt:

$$\alpha_1 = 71^\circ 23' 39,26'' \quad , \quad \alpha_2 = 251^\circ 23' 39,35'' \quad , \quad \log s = 3.378\,7016 \quad (5)$$

Das letzte $\log s$ stimmt überein mit dem $\log S$ des vorigen § 63. S. 202, die α_1 und α_2 entsprechen den früheren T_1 und T_2 von § 63., sie sind um etwa $2^\circ 35'$ kleiner als jene T , weil die α nur die Meridianconvergenz gegen Celle, dagegen die T die Meridianconvergenz gegen den 31^{ten} Längengrad (bei Berlin) enthalten.

Den soeben berechneten Richtungswinkel (Katasterbezeichnung „Neigung“) $\alpha_2 = 251^\circ 23' 39,35''$ findet man in dem Abrisse von S. 207 wieder als ersten Wert ausgeglichen α , und mit $v_1 = +0,02''$ aus der Netzausgleichung § 61. S. 196 bekommt man erstes beobachtetes $A = 251^\circ 23' 39,33''$, woraus folgt, dass alle auf Aegidius beobachteten Richtungen von § 60. S. 186 nun um $251^\circ 23' 39,33''$ verschoben werden müssen, weil Aegidius—Wasserturm früher den Wert $0^\circ 0' 0,00''$ hatte.

Ebenso verfährt man auf Station Wasserturm mit dem Richtungswinkel Aegidius $= 71^\circ 23' 39,26''$ nach der soeben gemachten Rechnung (5).

Um dann auch die übrigen Sätze vollends zu orientieren, hat man Willmer—Wasserturm als Umkehrung von Wasserturm—Willmer zunächst $= 330^\circ 27' 44,48''$, was aber wegen der sphärischen Korrekturen in $330^\circ 27' 44,19''$ übergeht.

Diese kleinen sphärischen Korrekturen haben wir nicht mehr im einzelnen nachgewiesen, sie entsprechen den $t - T$ in dem Landesaufnahme-Abriss von § 63. S. 204. In jenem conformen System waren die $t - T$ ebenso wie auch die $\log s - \log S$ viel glatter und übersichtlicher zu behandeln als in dem Soldnerschen Katastersystem, in welchem die kleinen Richtungs- und Entfernungs-Korrekturen bei der gewöhnlichen Art der Berechnung mit in den Coordinaten-Korrekturen stecken, und auch sonst nicht so bequem zu berechnen sind wie in einem conformen System.

Dieses nur nebenbei bemerkend geben wir im nachfolgenden die nach Soldnerscher Methode berechneten endgültigen Coordinaten:

Coordinaten im Kataster-System Celle.

1. Aegidius	$y = -23271,813^m$	$x = -28308,395^m$	}	(7)
2. Wasserturm	$-25538,488$	$-29071,474$		
3. Willmer	$-21777,609$	$-30945,359$		
4. Steuerndieb	$-19888,668$	$-25951,884$		
5. Schanze	$-23086,933$	$-23266,607$		
6. Burg	$-25842,799$	$-24977,399$		

Abriss im Kataster-System Celle.

	Beobachtet A	v	Ausgeglichen α $= A + v$	$\log S$
1. Aegidius.				
Wasserturm . . . 1.	251° 23' 39,33"	+ 0,02"	251° 23' 39,35"	3.378 7016
Hochschule . . .	315 2 32,64			
Burg 2.	322 20 14,15	+ 0,68	322 20 14,83	3.624 0521
Schanze 3.	2 6 0,69	- 0,68	2 6 0,07	3.702 8735
Dreifaltigkeit . .	35 3 47,73			
Steuerndieb . . . 4.	55 8 28,85	- 0,55	55 8 28,30	3.615 2086
Willmer 5.	150 27 44,00	+ 0,48	150 27 44,48	3.481 5665
2. Wasserturm.				
Burg 6.	355° 44' 55,72"	+ 0,48"	355° 44' 56,20"	3.613 3487
Hochschule . . .	20 36 49,99			
Aegidius 7.	71 23 39,74	- 0,48	71 23 39,26	3.378 7016
Willmer 8.	116 29 5,98	0,00	116 29 5,98	3.623 4413
3. Willmer.				
Wasserturm . . . 9.	296° 29' 4,85"	+ 0,91"	296° 29' 5,76"	3.623 4413
Aegidius 10.	330 27 45,52	- 1,33	330 27 44,19	3.481 5665
Dreifaltigkeit . .	352 37 21,62			
Steuerndieb . . . 11.	20 43 14,32	+ 0,42	20 43 14,74	3.727 4425
4. Steuerndieb.				
Willmer 12.	200° 43' 14,83"	+ 0,43"	200° 43' 15,26"	3.727 4425
Aegidius 13.	235 8 28,55	+ 0,01	235 8 28,56	3.615 2086
Dreifaltigkeit . .	248 4 43,63			
Hochschule . . .	259 14 15,09			
Burg 14.	279 17 42,55	- 1,09	279 17 41,46	3.780 5583
Schanze 15.	310 0 59,67	+ 0,66	310 1 0,31	3.620 7673
5. Schanze.				
Steuerndieb . . . 16.	130° 1' 0,73"	- 0,13"	130° 1' 0,60"	3.620 7673
Dreifaltigkeit . .	167 49 43,84			
Aegidius 17.	182 6 0,73	- 0,10	182 6 0,66	3.702 8735
Burg 18.	238 10 8,02	+ 0,23	238 10 8,24	3.511 0402
6. Burg.				
Schanze 19.	58° 10' 7,89"	+ 0,16"	58° 10' 8,03"	3.511 0402
Steuerndieb . . . 20.	99 17 40,75	+ 0,81	99 17 41,58	3.780 5583
Dreifaltigkeit . .	118 44 52,26			
Aegidius 21.	142 20 16,39	- 1,15	142 20 15,24	3.624 0521
Hochschule . . .	149 4 12,32			
Wasserturm . . . 22.	175 44 56,55	+ 0,17	175 44 56,73	3.613 3487

Die hier angegebenen $\log S$ sind dieselben wie in (12) § 63. S. 203.

§ 65. Schwerds Basis-Netz mit Winkelmessungen.

Nachdem wir die Dreiecksnetzausgleichung mit *Richtungsmessungen* an den zwei Beispielen von § 59. und § 61. kennen gelernt haben, wollen wir auch eine Netz-Ausgleichung mit *Winkelmessungen* behandeln.

Ein gutes Beispiel hierzu giebt uns das Basisnetz von *Schwerd*, in welchem einzelne Winkel mit verschiedenen Gewichten gemessen sind.

Professor *Schwerd* am Lyzeum in Speyer hat im Jahr 1820 (als Konkurrenz- und Trutz-Arbeit gegen die amtliche Basismessung Speyer-Oggersheim) mit seinen Lyzeumsschülern eine kleine 860 Meter lange Basis gemessen, und dieselbe durch ein trigonometrisches Netz mit der Linie Speyer-Oggersheim verbunden.

Schwerd hat seine Messungen veröffentlicht in der Schrift: „Die kleine Speyrer Basis, oder Beweis, dass man mit einem geringen Aufwand an Zeit, Mühe und Kosten durch eine kleine genau gemessene Linie die Grundlage einer grossen Triangulation bestimmen kann, Speyer, gedruckt bei Jakob Christian Kolb, 1822.“ Da aber der Verfasser seine trigonometrischen Messungen nur nach Gutdünken („auf die natürlichste Weise“ S. 64) ausgeglichen hat, schien uns eine Neuausgleichung von Schwerd's Messungen umsomehr am Platz, als dadurch die treffliche Gewichtsunterscheidung, welche Schwerd in richtiger Erkenntnis der verschiedenen Bedeutung der mehr oder weniger spitzen Winkel traf, voll ausgenützt werden kann.

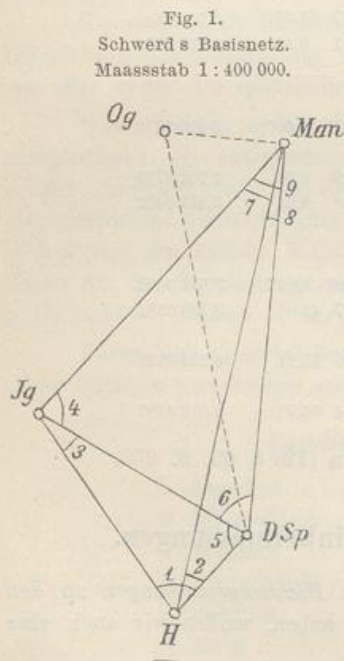
Der Teil des Schwerd'schen Netzes, welchen wir behandeln wollen, ist in dem Viereck Fig. 1. gezeichnet. Das punktierte Dreieck Mannheim-Speyer-Oggersheim gehört nicht zu unserer Ausgleichung, sondern dient zum Anschluss an die badische Triangulierung.

Als Basis nehmen wir die aus der eigentlichen, nur 860^m langen gemessenen Basis trigonometrisch abgeleitete Linie (Schwerd S. 69):

$$D Sp - H = 4962,8282^m \quad (1)$$

(*D Sp* = Dom in Speyer, *H* = Heiligenstein.)

Die Originalwinkelmessungen, welche für unser Netz Fig. 1. in Betracht kommen, sind von Schwerd auf S. 48--50 seines Buches mitgeteilt, und auf S. 56 und 57 daselbst sind die zugehörigen Zentrierungsreduktionen, sowie die Drittel von sphärischen Excessen angegeben. Indem wir die Zentrierungsreduktionen an den gemessenen Winkeln anbringen, die von Schwerd mit hereingezogenen sphärischen Excessen aber hier ausser Betracht lassen, bekommen wir folgende Tabelle der gemessenen Winkel:



Schwerd Seite	Nr.	Winkel	Gewicht <i>p</i>	$\frac{1}{p}$
48 u. 56	58	(1) = 81° 21' 43,36"	70	0,0143
48 u. 56	60	(2) = 31 37 39,73	7	0,1429
49 u. 56	64	(3) = 25 16 28,85	101	0,0099
49 u. 56	65	(4) = 76 33 44,65	47	0,0213
48 u. 55	61	(5) = 73 21 46,35	85	0,0118
49 u. 55	62	(6) = 67 4 27,96	57	0,0175
50 u. 57	68	(7) = 28 25 42,53	10	0,1000
50 u. 57	67	(8) = 7 56 6,92	28	0,0357
50 u. 57	66	(9) = 36 21 49,55	30	0,0333
Summa [<i>p</i>] = 435				0,3867

Als Gewichte *p* sind hier die von Schwerd angegebenen Repetitionszahlen genommen.

Wie man sieht, sind die Gewichte p sehr ungleich. Schwerd hat mit Recht die spitzen Winkel, welche den Grundlinien gegenüber liegen, verstärkt gemessen.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen findet man nach Anleitung von § 58. Es ist nämlich die Anzahl der gemessenen Winkel $W = 9$, die Anzahl der Punkte $p = 4$, die Anzahl der Verbindungslinien $l = 6$, folglich hat man nach (11) § 58. S. 173:

$$W - 2p + 4 = 5 \text{ Bedingungsgleichungen}$$

und insbesondere:

$$\left. \begin{array}{l} l - 2p + 3 = 1 \text{ Seitengleichung} \\ l - p + 1 = 3 \text{ Dreiecksgleichungen} \\ \text{und für den Punkt } M \text{ 1 Horizontgleichung} \end{array} \right\} \quad (3)$$

also $1 + 3 + 1 = 5$ Gleichungen im Ganzen wie oben.

Die Seitengleichung bilden wir für den Centralpunkt $D Sp.$, d. h. wir drücken aus, dass die Seite $D Sp.$ — $Man.$ aus der Basis $D Sp.$ — $H.$ auf beiden möglichen Wegen gleich erhalten werde. Dieses giebt:

$$\text{Es soll sein } \frac{\sin(1) \sin(4) \sin(8)}{\sin(3) \sin(9) \sin(2)} = 1 \quad (4a)$$

Die 3 Dreiecksschlüsse sind

$$\text{Es soll sein } (1) + (3) + (5) - (180^\circ + \varepsilon_b) = 0 \quad (4b)$$

$$\text{" " " } (4) + (6) + (9) - (180^\circ + \varepsilon_c) = 0 \quad (4c)$$

$$\text{" " " } (2) + (5) + (6) + (8) - (180^\circ + \varepsilon_d) = 0 \quad (4d)$$

und die Horizontgleichung auf Mannheim:

$$\text{Es soll sein } (7) + (8) - (9) = 0 \quad (4e)$$

Für die sphärischen Excesse berechnet man auf Grund der Basis $DH = 4962,8282^m$ nach (1), mit den gemessenen Winkeln, die sämtlichen Dreiecke vorläufig, die mittlere geographische Breite ist etwa $49^\circ 30'$, also $\log r = 6.80487$, damit findet man nach

der Formel $\varepsilon = \frac{\rho}{r^2} \Delta$:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{für das Dreieck } D H J & \varepsilon_b = 0,138'' \\ \text{" " " } D J M & \varepsilon_c = 0,505 \\ \text{" " " } D H M & \varepsilon_d = 0,151 \end{array} \right\} \quad (5)$$

Diese Excesse braucht man jedenfalls zum Aufstellen der Dreiecksgleichungen, man kann sie aber auch zur Bildung der Seitengleichung benützen.

Wir bilden zuerst die Dreieckssummenproben:

$$\left. \begin{array}{lll} (1) = 81^\circ 21' 43,36'' & (4) = 76^\circ 33' 44,65'' & (2) = 31^\circ 37' 39,73'' \\ (3) = 25 \ 16 \ 28,85 & (6) = 67 \ 4 \ 27,96 & (5) = 73 \ 21 \ 46,35 \\ (5) = 73 \ 21 \ 46,35 & (9) = 36 \ 21 \ 49,55 & (6) = 67 \ 4 \ 27,96 \\ \hline 179 \ 59 \ 58,560 & 180 \ 0 \ 2,160 & (8) = 7 \ 56 \ 6,92 \\ \text{soll } 180 \ 0 \ 0,138 & \text{soll } 180 \ 0 \ 0,505 & 180 \ 0 \ 0,960 \\ \hline w_b = -1,578 & w_c = +1,655 & \text{soll } 180 \ 0 \ 0,151 \\ & & w_d = +0,809 \end{array} \right\} \quad (6)$$

Die Bedingungsgleichungen werden nach Anleitung von § 57.—58. gebildet, dieselben sind:

a) Seitengleichung:

$$+0,320 v_1 + 0,503 v_4 + 15,105 v_8 - 4,459 v_3 - 2,860 v_9 - 3,419 v_2 + 4,715 = 0 \quad (7)$$

Jordan, Handb. d. Vermessungskunde. 4. Aufl. I. Bd.

Es ist dabei in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale gerechnet.
Die drei Dreiecksgleichungen werden nach (6):

$$\left. \begin{array}{l} b) \quad v_2 + v_5 + v_6 + v_8 + 0,809'' = 0 \\ c) \quad v_1 + v_3 + v_5 - 1,578'' = 0 \\ d) \quad v_4 + v_6 + v_9 + 1,655'' = 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

Endlich die Horizontgleichung:

$$e) \quad v_7 + v_8 - v_9 - 0,100 = 0 \quad (9)$$

Die Winkelverbesserungen sind hier mit v bezeichnet, wie im allgemeinen die Verbesserungen. In § 57. hatten wir unterschieden *Winkelverbesserungen* δ und *Richtungsverbesserungen* v ; es wird kaum nötig sein, zu erklären, dass diese Unterscheidung hier nicht mehr gemacht ist, weil es sich in diesem § 65. überhaupt nur um einerlei Art von Verbesserungen handelt, für welche das allgemeine Zeichen v genommen ist.

Man schreibt die Coefficienten der Bedingungsgleichungen (7), (8), (9) nebst den Gewichten in eine Tabelle:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	w
p	70	7	101	47	85	57	10	28	30	
$\frac{1}{p}$	0,0143	0,1429	0,0099	0,0213	0,0118	0,0175	0,1000	0,0357	0,0333	
1. a	+0,320	-3,419	-4,459	+0,503	.	.	.	+15,105	-2,860	+4,715
2. b	.	+1	.	.	+1	+1	.	+1	.	+0,809
3. c	+1	.	+1	.	+1	-1,578
4. d	.	.	.	+1	.	+1	.	.	+1	+1,655
5. e	+1	+1	-1	-0,100

Wenn man nun die Summen $\left[\frac{a}{p} \right] \left[\frac{a}{p} \right]$ u. s. w. bildet, so bemerkt man, dass es von Schwerd mit Einsicht so geordnet wurde, dass zu den grossen Coefficienten auch die grösseren Gewichte kommen. Die Ausrechnung giebt die Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise (nach (2) und (3) unten auf S. 80):

$$\left. \begin{array}{l} + 10,2941 k_1 + 0,0511 k_2 - 0,0396 k_3 - 0,0846 k_4 + 0,6348 k_5 + 4,7150 = 0 \\ \quad + 0,2079 k_2 + 0,0118 k_3 + 0,0175 k_4 + 0,0357 k_5 + 0,8090 = 0 \\ \quad \quad + 0,0360 k_3 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad - 1,5780 = 0 \\ \quad \quad \quad + 0,0721 k_4 - 0,0333 k_5 + 1,6550 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad + 0,1690 k_5 - 0,1000 = 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

Die Auflösung dieser 5 Gleichungen giebt:

$$k_1 = -0,3436, k_2 = -4,0814, k_3 = +44,7898, k_4 = -23,2072, k_5 = -1,8279 \quad (12)$$

Bei der Berechnung der Verbesserungen v folgt man, wie immer, der Tabelle (10) der Bedingungsgleichungen nach Vertikalreihen, z. B.:

$$v_1 = + \frac{0,320}{70} k_1 + \frac{1}{70} k_3 = + 0,638''$$

$$v_2 = - \frac{3,419}{7} k_1 + \frac{1}{7} k_2 = - 0,415''$$

$$\dots \dots \dots$$

Die Tabelle aller v nebst ihrer Verwendung zur Verbesserung der gemessenen Winkel zeigt folgendes:

Gemessen	v	Verbessert	(13)
(1) = $81^{\circ} 21' 43,360''$	+ 0,638	[1] = $81^{\circ} 21' 43,998''$	
(2) = $31 \ 37 \ 39,730$	— 0,415	[2] = $31 \ 37 \ 39,315$	
(3) = $25 \ 16 \ 28,850$	+ 0,459	[3] = $25 \ 16 \ 29,309$	
(4) = $76 \ 33 \ 44,650$	— 0,497	[4] = $76 \ 33 \ 44,153$	
(5) = $73 \ 21 \ 46,350$	+ 0,479	[5] = $73 \ 21 \ 46,829$	
(6) = $67 \ 4 \ 27,960$	— 0,479	[6] = $67 \ 4 \ 27,481$	
(7) = $28 \ 25 \ 42,530$	— 0,183	[7] = $28 \ 25 \ 42,347$	
(8) = $7 \ 56 \ 6,920$	— 0,396	[8] = $7 \ 56 \ 6,524$	
(9) = $36 \ 21 \ 49,550$	— 0,680	[9] = $36 \ 21 \ 48,870$	

Nach Vollendung der Ausgleichung überzeugt man sich zuerst, ob die Bedingungsgleichungen erfüllt sind. Dieses ist der Fall; und man kann nun alle Dreiecksseiten eindeutig berechnen. Die Ergebnisse für 4 Seiten sind:

$$\begin{array}{ll}
 DH = 4\,962,828^m \text{ (Basis)} & \log DH = 3,695\,7292\cdot3 \\
 DM = 18\,851,510 \pm 0,12^m & \log DM = 4,275\,3461\cdot4 \\
 HM = 22\,896,729 & \log HM = 4,359\,7734\cdot4 \\
 JM = 17\,851,153 \pm 0,11^m & \log JM = 4,251\,6662\cdot4
 \end{array} \quad (14)$$

(Die bei zwei Seiten angegebenen mittleren Fehler $\pm 0,12^m$ und $\pm 0,11^m$ sind aus späteren Berechnungen hergesetzt.)

Zu Genauigkeitsberechnungen übergehend, bilden wir zuerst die Summe $[p v v]$ unmittelbar aus den einzelnen v und p , und dann zur Kontrolle nach der Formel $[p v v] = -[w k]$ wie aus der Ausrechnung im einzelnen hervorgeht:

v	v^2	p	$p v^2$	w	k	$-w k$
1) + 0,638	0,4070	70	28,49	1) + 4,715	— 0,3436	+ 1,62
2) — 0,415	0,1722	7	1,21	2) + 0,809	— 4,0814	+ 3,30
3) + 0,459	0,2107	101	21,28	3) — 1,578	+ 44,7898	+ 70,68
4) — 0,497	0,2470	47	11,61	4) + 1,655	— 23,2072	+ 38,41
5) + 0,479	0,2294	85	19,50	5) — 0,100	— 1,8279	— 0,18
6) — 0,479	0,2294	57	13,08			113,83
7) — 0,183	0,0335	10	0,34			= — [w k]
8) — 0,396	0,1568	28	4,39			
9) — 0,680	0,4624	30	13,87			
		435	113,77			
		= [p v v]				

Man hat in hinreichender Übereinstimmung $[p v v] = -[w k] = 113,8$.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird hieraus:

$$m = \sqrt{\frac{113,8}{5}} = \pm 4,77'' \quad (15)$$

Es soll noch das Gewicht und der mittlere Fehler der Seite DM nach der Ausgleichung bestimmt werden.

Die Seite DM wird aus DH am kürzesten abgeleitet durch die Gleichung:

$$DM = \frac{DH}{\sin [8]} \sin [2] \quad (16)$$

Es ist, wie immer in solchen Fällen, bequemer, zunächst die Funktion zu logarithmieren, d. h. aus (16) zu bilden mit Weglassung des konstanten DH :

$$F = \log \sin [2] - \log \sin [8] \quad (17)$$

Die Rechnung geht nun denselben Gang wie in § 62. S. 199. Es wird:

$$f_2 = +3,419 \quad f_8 = -15,105 \quad (18)$$

alle anderen f sind gleich Null. Dann berechnet man:

$$\left[\frac{af}{p} \right] = -9,82, \quad \left[\frac{bf}{p} \right] = -0,05, \quad \left[\frac{cf}{p} \right] = 0,00, \quad \left[\frac{df}{p} \right] = 0,00, \quad \left[\frac{ef}{p} \right] = -0,54$$

$$\left[\frac{ff}{p} \right] = +9,82$$

Diese Glieder setzt man an Stelle der Schlussglieder von (11), eliminiert durch, und findet:

$$\left[\frac{ff}{p} \cdot 5 \right] = 0,32 = \frac{1}{P} \quad (19)$$

daraus den mittleren Funktionsfehler:

$$M = m \sqrt{\frac{1}{P}} = 4,77 \sqrt{0,31} = \pm 2,66 \text{ Einheiten der 6ten Logarithmen-Stelle,}$$

$$\text{d. h.} \quad d \log s = \pm 0,0000026 \cdot 6 = \frac{\mu}{s} ds, \quad s = 18852^m$$

$$ds = \pm 0,115^m$$

Also im ganzen hat man die Entfernung:

$$DM = 18\,851,510^m \pm 0,115^m \text{ (Triangulierungsfehler)} \quad (20)$$

wie auch schon bei (14) angegeben ist.

Dabei ist die Berechnungsbasis $DH = 4962,8282^m$ als fehlerfrei angenommen. Wir wollen nun aber auch noch den mittleren Fehler der Basis selbst berücksichtigen, und seine Fortpflanzung auf die Linie DM berechnen.

Der mittlere Fehler der Basis DH wurde auf Grund verschiedener Angaben von Schwerd zu $\pm 9,7^m$ geschätzt.

Dieser Fehler vergrößert sich durch trigonometrische Übertragung auf die 18852^m lange Linie DM , so dass er giebt:

$$\frac{18852}{4963} 9,7 = \pm 36,8^m \quad (21)$$

und dazu tritt der Triangulierungsfehler der Linie DM , welcher nach (20) den Wert $\pm 115^m$ hat, es ist also der mittlere Gesamtfehler der Linie DM :

$$= \sqrt{36,8^2 + 115^2} = \pm 124^m$$

Statt (20) werden wir also jetzt schreiben:

$$DM = 18\,851,510^m \pm 0,124^m \text{ (Gesamtfehler).} \quad (22)$$

Mittlerer Winkel-Fehler für mittleres Gewicht.

In (15) haben wir zwar den mittleren Fehler der Gewichtseinheit $m = \pm 4,77''$ bestimmt, und dieser Wert bildet die Grundlage aller weiteren strengen Genauigkeits-

berechnungen, wie an dem Beispiel der Fehlerberechnung (16)–(20) zu sehen ist. Allein jener Gewichtseinheitsfehler m befriedigt nicht den oft auftretenden Wunsch, für die auf der Station im Mittel erreichte Winkelgenauigkeit ein anschauliches Maass zu besitzen. Hiezu dient der mittlere Fehler für mittleres Gewicht, wobei aber das mittlere Gewicht nicht etwa schlechthin als Durchschnittswert $\frac{[p]}{n}$ der 9 Einzelgewichte genommen werden darf, sondern der Definition der Gewichte als Reciproke der mittleren Fehler-Quadrate und dem Princip des mittleren Fehlers selbst entsprechend so zu berechnen ist:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{p} \right] \quad (23)$$

wo n die Zahl der Einzelgewichte ist. In unserem Falle sind die $\frac{1}{p}$ in der Tabelle (2) angegeben mit der Summe 0,3867, es ist also

$$\frac{1}{g} = \frac{0,3867}{9} = 0,04297 \quad , \quad g = 23,37 \quad (24)$$

und der mittlere Fehler für dieses mittlere Gewicht:

$$\mu = m \sqrt{\frac{1}{g}} = 4,77 \sqrt{0,04297} = \pm 0,989'' \quad (25)$$

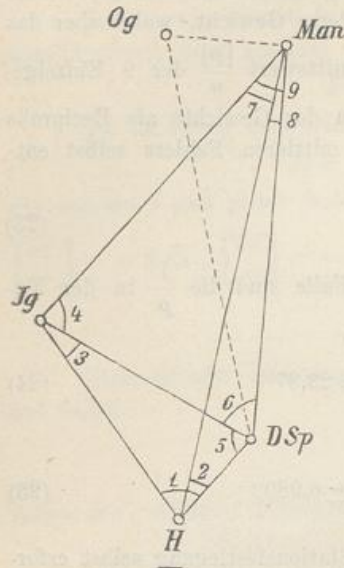
Wenn auf jeder Station nicht mehr als die zur Stationsfestlegung selbst erforderliche Zahl von Winkeln gemessen wäre, so würde dieses μ auch den mittleren Fehler von mittlerem Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels vorstellen. Es ist aber in unserem Falle auf einer Station, nämlich Mannheim, ein Winkel überzählig (vgl. Horizontgleichung (9)) und deswegen hat unser μ in (25) eine etwas andere Bedeutung, welche jetzt nicht weiter erörtert werden soll. Überhaupt haben wir (25) nur als formelles Rechenbeispiel hier vorgeführt, denn wenn die Winkel absichtlich sehr ungleich gewichtig sind, hat die Rechnung (25) nicht den inneren Sinn, der ihr bei glatten durchlaufenden Ketten oder gleichförmig ausgebreiteten Netzen zukommt.

§ 66. Triangulierungsausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. Schwerds Basis-Netz.

Wenn schon die Winkelausgleichung des vorigen § 65. nicht ein Beispiel für die laufende Praxis war, so ist das noch weniger der Fall bei einer Dreiecksnetzausgleichung mit Winkeln nach *vermittelnden* Beobachtungen, die wir noch anfügen wollen. Es ist aber wohl nützlich einzusehen, dass man eine derartige Ausgleichung nicht notwendig nach Korrelaten machen muss, sondern dass man auch andere Formen dafür zur Verfügung hat.

Schon in der allgemeinen Theorie § 37. wurde angegeben, dass man Messungen, welche sich zunächst in der Form von bedingten Beobachtungen darbieten, auch auf vermittelnde Beobachtungen reduzieren kann. Ob dieses nützlich ist, kommt auf den einzelnen Fall an; bei unserem Schwerdschen Basisnetz kann man wohl so verfahren, und zwar bekommt man dann nur 4 Normalgleichungen aufzulösen, gegen 5 bei der Korrelaten-Methode. Die Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen wird aber auch noch andere Vorteile, bei Genauigkeitsuntersuchungen, bieten.

Fig. 1.
Schwerd's Basisnetz.
Maassstab 1:400 000.



Nach dem vorigen § 65. (7) bis (10) S. 209 bis 210 bestehen für das Schwerdsche Netz Fig. 1. folgende 5 unabhängige Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} &+ 0,320 v_1 - 3,419 v_2 - 4,459 v_3 + 0,503 v_4 \\ &\quad + 15,105 v_8 - 2,860 v_9 + 4,715 = 0 \\ &v_2 + v_5 + v_6 + v_8 + 0,809 = 0 \\ &v_1 + v_3 + v_5 - 1,578 = 0 \\ &v_4 + v_6 + v_9 + 1,655 = 0 \\ &v_7 + v_8 - v_9 - 0,100 = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Von den 9 gemessenen Winkeln wählen wir die 4 Winkel (1) (2) (3) und (8) als unabhängige Unbekannte aus, oder, sofort zu den Verbesserungen übergehend, nehmen wir die Verbesserungen v_1, v_2, v_3, v_8 als unabhängige Unbekannte der Ausgleichung, und es entsteht die Aufgabe, mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (1) alle anderen v in diesen v_1, v_2, v_3, v_8 auszudrücken.

Nach gewöhnlichen algebraischen Methoden erhalten wir hiefür:

$$\left. \begin{aligned} v_5 &= -v_1 - v_3 + 1,578 \\ v_6 &= +v_1 - v_2 + v_3 - v_8 - 2,387 \\ v_9 &= -0,054 v_1 - 0,867 v_2 - 1,475 v_3 + 4,641 v_8 + 1,511 \\ v_4 &= -0,946 v_1 + 1,867 v_2 + 0,475 v_3 - 3,641 v_8 - 0,779 \\ v_7 &= -0,054 v_1 - 0,867 v_2 - 1,475 v_3 + 3,641 v_8 + 1,611 \end{aligned} \right\} (2)$$

Dazu kommen noch die Fehlergleichungen für die unabhängigen v selbst, nämlich:

$$v_1 = v_1 \quad v_2 = v_2 \quad v_3 = v_3 \quad v_8 = v_8 \quad (3)$$

Die Gewichte p sind schon bei (2) S. 208 angegeben, es ist uns aber dieses Mal bequemer, die Gewichtseinheit 100fach kleiner zu nehmen, und damit bekommen wir folgende Tabelle der Coefficienten der Fehlergleichungen (2) und (3) und der Gewichte p , nebst \sqrt{p} :

Fehlergleichungen:

$v_1 = +1,000 v_1$	\dots	\dots	\dots	\dots	p	\sqrt{p}	(4)
$v_2 = \dots + 1,000 v_2$	\dots	\dots	\dots	\dots	0,70	0,837	
$v_3 = \dots \dots + 1,000 v_3$	\dots	\dots	\dots	\dots	0,07	0,265	
$v_8 = \dots \dots \dots + 1,000 v_8$	\dots	\dots	\dots	\dots	1,01	1,005	
$v_5 = -1,000 v_1 \dots - 1,000 v_3 \dots + 1,578$	\dots	\dots	\dots	\dots	0,28	0,529	
$v_6 = +1,000 v_1 - 1,000 v_2 + 1,000 v_3 - 1,000 v_8 - 2,387$	\dots	\dots	\dots	\dots	0,85	0,922	
$v_4 = -0,946 v_1 + 1,867 v_2 + 0,475 v_3 - 3,641 v_8 - 0,779$	\dots	\dots	\dots	\dots	0,57	0,755	
$v_7 = -0,054 v_1 - 0,867 v_2 - 1,475 v_3 + 3,641 v_8 + 1,611$	\dots	\dots	\dots	\dots	0,47	0,686	
$v_9 = -0,054 v_1 - 0,867 v_2 - 1,475 v_3 + 4,641 v_8 + 1,511$	\dots	\dots	\dots	\dots	0,10	0,316	
					0,30	0,548	

Um die Gewichte ein für alle mal zu berücksichtigen, multiplizieren wir die

Coefficienten und Absolutglieder der Fehlergleichungen bzw. mit \sqrt{p} und bekommen damit folgende neue Tabelle:

Gleichgewichtige Fehlergleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{p_1} v_1 &= +0,84 v_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{p_2} v_2 &= & \dots & +0,26 v_2 & \dots & \dots \\ \sqrt{p_3} v_3 &= & \dots & \dots & +1,00 v_3 & \dots \\ \sqrt{p_8} v_8 &= & \dots & \dots & \dots & +0,53 v_8 \\ \sqrt{p_5} v_5 &= -0,92 v_1 & \dots & -0,92 v_3 & \dots & +1,46 \\ \sqrt{p_6} v_6 &= +0,75 v_1 - 0,75 v_2 + 0,75 v_3 - 0,75 v_8 - 1,80 \\ \sqrt{p_4} v_4 &= -0,65 v_1 + 1,28 v_2 + 0,33 v_3 - 2,49 v_8 - 0,53 \\ \sqrt{p_7} v_7 &= -0,02 v_1 - 0,27 v_2 + 0,46 v_3 + 1,15 v_8 + 0,51 \\ \sqrt{p_9} v_9 &= -0,03 v_1 - 0,48 v_2 - 0,81 v_3 + 2,55 v_8 + 0,83 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Abrundung auf 0,01 ist hinreichend zur Erlangung einer Winkelgenauigkeit von 0,01".

Die hiezu gehörigen Normalgleichungen sind in abgekürzter Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} +2,54 v_1 - 1,37 v_2 + 1,23 v_3 + 0,96 v_8 - 2,38 &= 0 \\ +2,57 v_2 + 0,37 v_3 - 4,16 v_8 + 0,14 &= 0 \\ +3,39 v_3 - 3,98 v_8 - 3,77 &= 0 \\ +14,87 v_8 + 5,37 &= 0 \\ +6,60 & \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die Auflösung dieses Systems von 4 Gleichungen gab:

$$v_1 = +0,64'' \quad v_2 = -0,41'' \quad v_3 = +0,46'' \quad v_4 = -0,40'' \quad (7)$$

Durch Einsetzen dieser 4 ersten v in die Fehlergleichungen (4) bekommt man auch alle anderen v , und zwar überall auf etwa 0,01" übereinstimmend mit den früheren Resultaten v von (13) § 65. S. 211, weshalb wir diese Zahlen nicht noch einmal hersetzen.

Die Elimination der Normalgleichungen (6) giebt auch ein Schlussglied:

$$[11.4] = 1,14 \quad (8)$$

was ebenfalls mit 113,8 nach (15) § 65. S. 211 genügend stimmt, mit Rücksicht auf die nun 100 mal kleinere Gewichtseinheit.

Der mittlere Winkelfehler für die Gewichtseinheit ist jetzt:

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{9-4}} = \sqrt{\frac{1,14}{5}} = \pm 0,477'' \quad (9)$$

Dieses entspricht dem früheren 4,77" nach (15) § 65. S. 211 bei 100 fach grösserer Gewichtseinheit.

Wir wollen noch das Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Winkel bestimmen, und zwar soll diese Funktion die Seite JM sein. Die Seite DH gilt als fehlerfreie Basis, die Funktion ist daher:

$$JM = DH \frac{\sin [1] \sin [6]}{\sin [3] \sin [9]} \quad (10)$$

oder logarithmisch:

$$\log JM = \log DH + \log \sin [1] + \log \sin [6] - \log \sin [3] - \log \sin [9] \quad (11)$$

Das Differential ist:

$$d \log J M = \frac{\mu}{\varrho} \cotg [1] d [1] + \frac{\mu}{\varrho} \cotg [6] d [6] - \frac{\mu}{\varrho} \cotg [3] d [3] - \frac{\mu}{\varrho} \cotg [9] d [9]$$

$$d \log J M = 0,32 d [1] + 0,90 d [6] - 4,46 d [3] - 2,86 d [9] \quad (12)$$

Hier sind aber nur [1] und [3] unabhängige Unbekannte der Ausgleichung, und es dürfen daher nur $d [1]$ und $d [3]$, oder die Differentiale $d [2]$ und $d [8]$ der ebenfalls unabhängigen ausgeglichenen Unbekannten [2] und [8] in (12) vorkommen. Um daher $d [6]$ und $d [9]$ zu eliminieren, betrachten wir die Fehlergleichungen (2) und bilden daraus:

$$\left. \begin{aligned} d [9] &= -0,054 d [1] - 0,867 d [2] - 1,475 d [3] + 4,641 d [8] \\ d [6] &= d [1] - d [2] + d [3] - d [8] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Diese Gleichungen sind deswegen richtig, weil in den Fehlergleichungen die Absolutglieder l verschwinden, wenn man von den ausgeglichenen Winkeln [1] [2] ... statt von den beobachteten Winkeln (1) (2) ... ausgeht, und entsprechend $d [1]$ $d [2]$... statt v_1 v_2 ... setzt. Die zweite Gleichung (13) kann man unmittelbar aus der Figur ablesen.

Setzt man also (13) in (12), so erhält man:

$$d \log J M = +1,37 d [1] + 1,58 d [2] + 0,66 d [3] - 14,17 d [8] \quad (14)$$

also:

$$f_8 = -14,17 \quad f_3 = +0,66 \quad f_1 = +1,37 \quad f_2 = +1,58 \quad (15)$$

Wir haben hier die Ordnung $f_8 f_3 f_1 f_2$ angenommen, weil es uns für spätere Zwecke interessiert, v_2 als letzte Unbekannte zu haben, um das Gewicht von v_2 gelegentlich mit zu erhalten. Setzt man nun, um der Anweisung von § 29. S. 93 zu entsprechen, die bei (15) berechneten Werte f an Stelle der Absolutglieder der Normalgleichungen (6), und ordnet nach der Folge $f_8 f_3 f_1 f_2$, so findet man:

$$\left. \begin{aligned} +14,87 q_8 - 3,98 q_3 + 0,96 q_1 - 4,16 q_2 + 14,17 &= 0 \\ +3,39 q_3 + 1,23 q_1 + 0,37 q_2 - 0,66 &= 0 \\ +2,54 q_1 - 1,37 q_2 - 1,37 &= 0 \\ +2,57 q_2 - 1,58 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Die Weiterelimination giebt:

$$\left. \begin{aligned} +2,32 q_3 + 1,49 q_1 - 0,74 q_2 + 3,12 &= 0 \\ +2,48 q_1 - 1,10 q_2 - 2,28 &= 0 \\ +1,41 q_2 + 2,39 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} +1,52 q_1 - 0,62 q_2 - 4,28 &= 0 \\ +1,17 q_2 + 3,38 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$+0,92 q_2 - 1,61 = 0 \quad (19)$$

Die hier geschriebenen q sind bloss Zeichen für die Ordnung der früheren v .

Nach Anleitung von (13) § 29. S. 94 hat man nun:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P} &= \frac{14,17^2}{14,87} + \frac{3,12^2}{2,32} + \frac{4,28^2}{1,52} + \frac{1,61^2}{0,92} \\ &= 13,50 + 4,20 + 12,05 + 2,81 = 32,56 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$M = m \sqrt{\frac{1}{P}} = 0,477 \sqrt{32,56} = \pm 2,72 \quad (21)$$

Dieses ist der mittlere Fehler der Funktion (11) in Einheiten der 6ten Decimale, also:

$$\log JM = 4.252\ 6662\ 4 \pm 27.2 \quad (22)$$

$$JM = 17\ 851,15^m \pm 0,11^m \quad (23)$$

Dieses ist schon in (14) § 65. beigefügt worden.

Gelegentlich hat man auch in dem letzten Coefficienten von q_2 in (19) das Gewicht der Winkelkorrektur v_2 erhalten, nämlich:

$$P_2 = 0,92 \quad (24)$$

(derselbe Coefficient 0,92 würde auch erhalten, wenn man die schon früher vorhandenen Gleichungen (6) so auflöste, dass v_2 die letzte Unbekannte wäre).

Hieraus findet man auch den mittleren Fehler des ausgeglichenen Winkels $(2) + v_2 = [2]$, nämlich:

$$M_2 = \frac{m}{\sqrt{0,92}} = \pm 0,50''$$

(die Eliminationen dieses § sind nur mit dem Rechenschieber gemacht, also überall nur auf etwa 2—3 Stellen genau).

§ 67. Stationsausgleichung mit Winkelmessungen.

Wenn Winkelmessungen so verteilt sind, dass auf einer Station mit s Strahlen mehr als $s - 1$ Winkel vorliegen, so kann man für jeden auf der Station überschüssigen Winkel eine Bedingung in die Netzausgleichung einfügen, wie in dem Beispiele des Schwerdschen Basisnetzes § 65. S. 209 mit der Station Mannheim gezeigt worden ist.

Wenn aber die Zahl der auf den Stationen überzähligen Winkel gross ist, so wird dieses Verfahren sehr umständlich, und ist deswegen im grossen nicht anzuwenden.

Man hat deswegen zu dem Verfahren gegriffen, zuerst die Stationen für sich auszugleichen.

Indem wir die Frage, wie dann die Stationsausgleichungen ins Netz übergehen sollen, vorerst bei Seite lassen, behandeln wir die Stationsausgleichung mit Winkeln jetzt als selbständige vorläufige Aufgabe.

I. Summenprobe im Horizont.

Ein einfacher, in früherer Zeit, als man Repetitionswinkel mass, oft vorgekommener Fall liegt vor, wenn mehrere Winkel, welche den ganzen Horizont von 360° füllen, einzeln gemessen werden und dann auf die Horizontprobe abgestimmt werden müssen. Z. B. in Fig. 3. §. 58. S. 174 hatten wir 2 solche Horizontproben, mit $(3) + (6) + (8) + (10) + (24) + (25)$ im Horizont Oggersheim und mit $+(12) + (15) + (16) + (19) + (22)$ im Horizont Speyer. Auch die Probe auf Mannheim in Fig. 1. § 65. S. 208 erscheint von dieser Art, wenn man (7) , (8) und $360^\circ - (9)$ als drei einzelne Winkelmessungen auffasst, welche den Horizont 360° füllen müssen.

Die Ausgleichung eines solchen Horizontes besteht bei gleichen Gewichten der einzelnen Winkel lediglich darin, dass man den Horizontwiderspruch zu gleichen Teilen auf alle beteiligten Winkel umlegt, und wenn die Winkel ungleiche Gewichte haben, so erfolgt die Verteilung des Widerspruches umgekehrt proportional den Gewichten.

Man kann dieses nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels zweier ungleich

genauer Messungen behandeln, ähnlich wie die schon früher in § 10. behandelte Winkelausgleichung in einem Dreieck.

Wir nehmen hiezu folgendes an:

$$\begin{array}{llllll} \text{Gemessen:} & A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_n \\ \text{mit den Gewichten:} & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ \text{Es soll sein:} & A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n - 360^\circ = 0 \\ \text{Es ist} & A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n - 360^\circ = w \end{array} \quad (1)$$

Der ausgeglichene Wert des ersten Winkels sei x ; es liegen also zur Bestimmung von x zwei Beobachtungsergebnisse vor:

- 1) $x = A_1$ mit dem Gewicht p_1
- 2) $x = 360^\circ - (A_2 + A_3 + \dots + A_n) = A_1 - w$ mit dem Gewicht p'

Das Gewicht p' wird bestimmt durch

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_n} = \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{p_1} \quad (2)$$

Der ausgeglichene Wert x ist nach (4) § 8. S. 25:

$$x = \frac{A_1 p_1 + (A_1 - w) p'}{p_1 + p'} = A_1 - \frac{p'}{p_1 + p'} w$$

und mit Einführung des Wertes von p' aus (2):

$$x = A_1 - \frac{1}{p_1} \frac{w}{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad (3)$$

Da eine ähnliche Formel für die übrigen Winkel gilt, so hat man das Resultat in Worten: der Widerspruch w wird auf die einzelnen Winkel umgekehrt proportional ihren Gewichten verteilt.

Die Verbesserung v_1 des ersten gemessenen Winkels beträgt:

$$v_1 = - \frac{1}{p_1} \frac{w}{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad (4)$$

und da eine ähnliche Formel auch für die anderen Winkel gilt, so hat man:

$$[p v v] = \frac{1}{p_1} \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p} \right]^2} + \frac{1}{p_2} \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p} \right]^2} + \dots = \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad (5)$$

Der mittlere Fehler m einer Beobachtung vom Gewicht 1 ist:

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{2-1}} \quad \text{also} \quad m = \frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p} \right]}} \quad (6)$$

Der mittlere Fehler M_1 des ersten ausgeglichenen Winkels x wird erhalten, indem man m mit der Quadratwurzel der Gewichtssumme $p_1 + p'$ dividiert, die Ausführung giebt:

$$M_1 = w \frac{\sqrt{\frac{1}{p_1} \left(\left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{p_1} \right)}}{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad (7)$$

Wenn alle Gewichte $p_1 = p_2 = \dots p_n = 1$ werden, so werden die Formeln einfacher, nämlich:

$$x = A_1 - \frac{w}{n} \quad (8)$$

$$m = \frac{w}{\sqrt{n}} \quad (9)$$

$$M_1 = w \frac{\sqrt{n-1}}{n} = \frac{w}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \quad (10)$$

Aus (10) und (9) folgt, dass die Genauigkeit eines Winkels nach der Ausgleichung im Vergleich mit der Genauigkeit vor der Ausgleichung gewachsen ist im Verhältnis $\sqrt{n} : \sqrt{n-1}$.

Der Genauigkeitsgewinn für einen Winkel ist also verhältnismässig klein, wenn viele Winkel im Horizont gemessen sind.

II. Horizontabschluss nach vermittelnden Beobachtungen.

Wir behandeln mit Fig. 1. die Messung von 6 einzelnen Winkeln zwischen 4 Strahlen, d. h. Winkelbeobachtungen in allen Kombinationen, und gleichen nach vermittelnden Beobachtungen aus. Die 6 Messungen sollen sein:

$$\left. \begin{array}{ll} 1. = 48^\circ 17' 1,4'' & 4. = 48^\circ 35' 14,3'' \\ 2. = 96 52 16,8 & 5. = 104 37 7,8 \\ 3. = 152 54 6,8 & 6. = 56 1 48,9 \end{array} \right\} \quad (11)$$

Zur gegenseitigen Festlegung der 4 Strahlen $ABCD$ sind 3 Winkel nötig, wir führen deshalb 3 Winkel als unabhängige Unbekannte ein, wir nehmen:

Unbekannte: AJB , AJC , AJD

Als erste Näherungswerte der Unbekannten nehmen wir die 3 ersten Messungen selbst.

Näherungswerte: Verbesserungen:

$$\left. \begin{array}{ll} (AJB) = 48^\circ 17' 1,4'' & x \\ (AJC) = 96 52 16,8 & y \\ (AJD) = 152 54 6,8 & z \end{array} \right\} \quad (12)$$

Ferner bezeichnen wir, wie sonst, die 6 Verbesserungen der Beobachtungen mit $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$, und nun sind die 3 ersten Fehlergleichungen offenbar sehr einfach:

$$v_1 = x \quad v_2 = y \quad v_3 = z \quad (13)$$

weil nämlich die 3 ersten Beobachtungen selbst als Näherungen genommen sind. Die 4te Fehlergleichung wird:

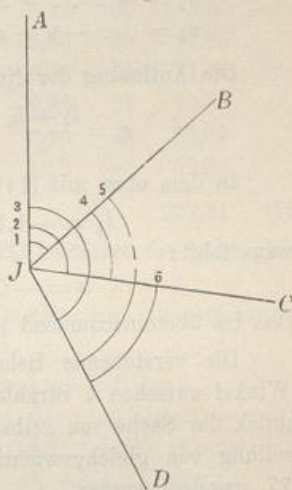
$$48^\circ 35' 14,3'' + v_4 = (96^\circ 52' 16,8'' + y) - (48^\circ 17' 1,4'' + x)$$

$$v_4 = -x + y + 1,1''$$

In ähnlicher Weise wird auch die 5te und die 6te Fehlergleichung gebildet, wir haben daher die Zusammenstellung aller 6 Fehlergleichungen:

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} v_1 = +x \dots \dots \dots \\ v_2 = \dots + y \dots \dots \dots \\ v_3 = \dots \dots + z \dots \dots \dots \\ v_4 = -x + y \dots + 1,1'' \\ v_5 = -x \dots + z - 2,4'' \\ v_6 = \dots - y + z + 1,1'' \end{array} \right. \quad (14)$$

Fig. 1.



Mit gleichen Gewichten bekommt man die Normalgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 3x - y - z + (+2,4 - 1,1) &= 0 & \text{oder} & & 3x - y - z + 1,3 &= 0 \\ -x + 3y - z + (+1,1 - 1,1) &= 0 & & & + 3y - z + 0,0 &= 0 \\ -x - y + 3z + (-2,4 + 1,1) &= 0 & & & 3z - 1,3 &= 0 \end{aligned} \right\} (15)$$

Die Auflösung giebt:

$$x = -0,3'' \quad y = 0,0'' \quad z = +0,3'' \quad (16)$$

Fügt man diese Verbesserungen den gemessenen Winkeln 1. 2. 3. oder, was hier dasselbe ist, den Näherungen (1) (2) (3) zu, so bekommt man das *Stationsergebnis*:

$$\left. \begin{aligned} \text{Winkel } AB &= 48^\circ 17' 1,1'' \\ \text{,, } AC &= 96 \ 52 \ 16,8 \\ \text{,, } AD &= 152 \ 54 \ 7,1 \end{aligned} \right\} (17)$$

Man kann eine solche Ausgleichung auch allgemeiner behandeln. Bei 4 Strahlen und 6 Winkelmessungen sollen die Absolutglieder der Fehlergleichungen, welche in (14) die Werte $+1,1''$, $-2,4''$, $+1,1''$ hatten, allgemein mit l_4 , l_5 , l_6 bezeichnet sein, und damit erhält man:

$$\begin{array}{ll} \text{Fehlergleichungen:} & \text{Normalgleichungen:} \\ \begin{aligned} v_1 &= x \dots \dots \dots \\ v_2 &= \dots y \dots \dots \dots \\ v_3 &= \dots \dots z \dots \dots \dots \\ v_4 &= -x + y \dots + l_4 \\ v_5 &= -x \dots + z + l_5 \\ v_6 &= \dots - y + z + l_6 \end{aligned} & \left. \begin{aligned} 3x - y - z - l_4 - l_5 &= 0 \\ -x + 3y - z + l_4 - l_6 &= 0 \\ -x - y + 3z + l_5 + l_6 &= 0 \end{aligned} \right\} (18) \end{array}$$

Die Auflösung der Normalgleichungen giebt:

$$x = \frac{l_4 + l_5}{4} \quad y = \frac{-l_4 + l_6}{4} \quad z = \frac{-l_5 - l_6}{4} \quad (19)$$

In dem oben mit (14) behandelten Zahlenbeispiele war:

$$l_4 = +1,1'' \quad l_5 = -2,4'' \quad l_6 = +1,1''$$

woraus folgt:

$$x = -0,3'' \quad y = 0,0'' \quad z = +0,3'' \quad (20)$$

dieses ist übereinstimmend mit dem früheren (16).

Die vorstehende Behandlung der Winkelausgleichung von Fig. 1., wo alle 6 Winkel zwischen 4 Strahlen gleichgewichtig gemessen sind, hat sich beim ersten Anblick der Sache von selbst dargeboten. Die *allgemeinere* und viel elegantere Behandlung von gleichgewichtigen Winkelmessungen in allen Combinationen wird in § 77. gegeben werden.

Wenn die Gewichte a priori *nicht gleich* sind, so wird auch bei symmetrischer Anordnung der Messungen die Ausgleichung doch nicht mehr symmetrisch.

Wir wollen zu den 6 Messungen, welche oben behandelt wurden, bzw. zu den 6 Fehlergleichungen (14) folgende Gewichte annehmen:

$$p_1 = 30 \quad p_2 = 20 \quad p_3 = 26 \quad p_4 = 25 \quad p_5 = 28 \quad p_6 = 44 \quad (21)$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} [p a a] &= +30 + 25 + 28 = +83 \\ [p a b] &= -25 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

und die Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\begin{array}{rcl} + 83,0 x - 25,0 y - 28,0 z + 39,7 & = & 0 \\ & 89,0 y - 44,0 z - 20,9 & = 0 \\ & 98,0 z - 18,8 & = 0 \\ & 244,77 & \end{array}$$

Die Auflösung giebt:

$$\left. \begin{array}{ll} x = -0,34'' & p_x = 54,6 \\ y = +0,24 & p_y = 50,4 \\ z = +0,20 & p_z = 54,8 \end{array} \right\} \quad (22)$$

$$[p \, l \, l \, 3] = [p \, v \, v] = 222,5 \quad (23)$$

Damit wird der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{222,5}{6-3}} = \pm 8,61''$$

Die mittleren Fehler der ausgeglichenen $x \, y \, z$ werden demnach:

$$m_x = \frac{8,61}{\sqrt{54,6}} = \pm 1,17'' \quad m_y = \frac{8,61}{\sqrt{50,4}} = \pm 1,21'' \quad m_z = \frac{8,61}{\sqrt{54,8}} = \pm 1,16'' \quad (24)$$

Alle 6 ausgeglichenen Winkelwerte erhält man durch Zufügen der Verbesserungen $x \, y \, z$ zu den angenommenen Näherungswerten (12), zugleich bildet man auch durch Subtraktionen die 3 übrigen Winkel und findet damit:

Winkel	Gemessen	v	Ausgeglichen	v^2	p	$p \, v^2$
1. = $A \, B$	48° 17' 1,4''	-0,34''	48° 17' 1,06''	0,12	30	3,60
2. = $A \, C$	96 52 16,8	+0,24	96 52 17,04	0,06	20	1,20
3. = $A \, D$	152 54 6,8	+0,20	152 54 7,00	0,04	26	1,04
4. = $B \, C$	48 35 14,3	+1,68	48 35 15,98	2,82	25	70,50
5. = $B \, D$	104 37 7,8	-1,86	104 37 5,94	3,46	28	96,89
6. = $C \, D$	56 1 48,9	+1,06	56 1 49,96	1,12	44	49,28
					222,51	(25)

Die Übereinstimmung von $[p \, v \, v]$ nach (23) und (25) bestätigt die Richtigkeit der Rechnung.

Man kann dieses Ausgleichungs-Ergebnis auch in Gestalt eines ausgeglichenen Richtungssatzes aufstellen:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Richtung } J A = & 0^\circ 0' & 0,00'' \\ & J B = & 48 \, 17 \, 1,06 \\ & J C = & 96 \, 52 \, 17,04 \\ & J D = & 152 \, 54 \, 7,00 \end{array} \right\} \quad (26)$$

Und wenn man von den verschiedenen Gewichtsunterscheidungen, die in einem solchen ausgeglichenen Satze enthalten sind, absehen will, so führt man den Satz (26) schlechthin wie einen unmittelbar voll gemessenen Satz in eine Netzausgleichung ein, die dann in der Form von § 59. oder § 61. weitergeführt wird.

In solcher Weise hat Gerling als Schüler von Gauss die Horizontabschlüsse und namentlich deren Einführung in die Netzausgleichung behandelt und das vorstehende Beispiel ist aus Gerlings Ausgleichungsrechnung der praktischen Geometrie 1843, §. 56—57 entlehnt. In welcher Weise die ungleichen Gewichte p nach (21) zwischen 20 und 44 entstanden sind, etwa als Repetitionszahlen der Winkelmessungen

oder ob sie bloss von Gerling für ein Schulbeispiel fingiert sind, mag dahingestellt bleiben. Viel wichtiger als eine Ausgleichung mit ungleichen Gewichten ist die Ausgleichung von gleichgewichtigen Winkelmessungen in allen Combinationen, worauf wir später in § 77. ausführlicher zurückkommen werden.

III. Horizontabschluss nach dem Korrelatenverfahren.

Wir wollen nun den bisher behandelten Fall von Fig. 1. auch nach bedingten Beobachtungen, mit Korrelaten, behandeln, und finden, dass zwischen den 6 gemessenen Winkeln folgende 3 Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } -v_1 + v_2 \dots -v_4 \dots \dots + w_4 = 0, \quad w_4 = +1,1'' \\ \text{b) } -v_1 \dots + v_3 \dots -v_5 \dots + w_5 = 0, \quad w_5 = -2,4 \\ \text{c) } \dots -v_2 + v_3 \dots \dots -v_6 + w_6 = 0, \quad w_6 = +1,1 \end{array} \right\} \quad (27)$$

Man kann diese Gleichungen unmittelbar aus der Figur ablesen, mit Einsetzung der Beobachtungen (11). Diese Gleichungen (27) sind aber auch schon in der zweiten Hälfte der früheren Fehlergleichungen (18) enthalten, wenn man daselbst setzt:

$$x = v_1 \quad y = v_2 \quad z = v_3 \quad \text{und} \quad l_4 = w_4 \quad l_5 = w_5 \quad l_6 = w_6 \quad (28)$$

Die Bedingungsgleichungen (27) geben folgende Normalgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} + 3 k_1 + k_2 - k_3 + w_4 = 0 \\ + k_1 + 3 k_2 + k_3 + w_5 = 0 \\ - k_1 + k_2 + 3 k_3 + w_6 = 0 \end{array} \right\} \quad (29)$$

Die allgemeine Auflösung hievon ist:

$$k_1 = \frac{-2 w_4 + w_5 - w_6}{4}, \quad k_2 = \frac{+ w_4 - 2 w_5 + w_6}{4}, \quad k_3 = \frac{- w_4 + w_5 - 2 w_6}{4} \quad (30)$$

und die Korrekursionsformeln, welche den Bedingungsgleichungen (27) nach Vertikalreihen folgen, geben:

$$\left. \begin{array}{l} 4 v_1 = -k_1 - k_2 = + w_4 + w_5 \\ 4 v_2 = +k_1 - k_3 = - w_4 + w_6 \\ 4 v_3 = +k_2 + k_3 = - w_5 - w_6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 v_4 = -k_1 = + 2 w_4 - w_5 + w_6 \\ 4 v_5 = -k_2 = - w_4 + 2 w_5 - w_6 \\ 4 v_6 = -k_3 = + w_4 - w_5 + 2 w_6 \end{array} \quad (31)$$

Damit haben wir wieder dasselbe, was früher in (19) enthalten war, nach der bei (28) angegebenen Bezeichnungsänderung.

Wenn man also, wie in diesem Falle, gleichgewichtige Winkelbeobachtungen in allen Combinationen hat, und wenn es sich um allgemeine Formeln handelt, so führt die Korrelatenmethode auf einem weiteren Weg zu demselben Resultat wie die Methode der vermittelnden Beobachtungen.

Wenn die Messungen nicht gleichgewichtig, oder nicht in allen Combinationen angestellt sind, so ist die Korrelatenmethode zur numerischen Ausgleichung unter Umständen sehr nützlich.

Zur Vergleichung der Ausgleichung nach vermittelnden oder nach bedingten Beobachtungen stellen wir folgende Betrachtung an:

Zur Festlegung von s Strahlen sind $s - 1$ Winkel nötig; hat man also W Winkel gemessen, so bestehen:

$$\text{für vermittelnde Beobachtungen:} \quad s - 1 \text{ unabhängige Unbekannte} \quad (32)$$

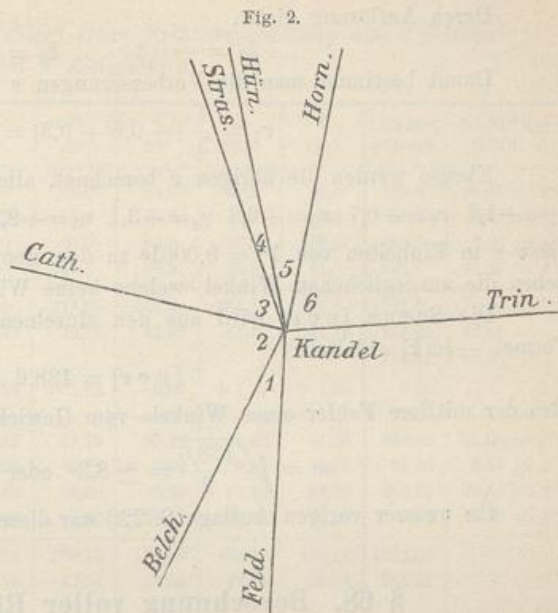
$$\text{für bedingte Beobachtungen:} \quad W - (s - 1) \text{ Bedingungsgleichungen} \quad (33)$$

und entsprechend ist in beiden Fällen die Anzahl der aufzulösenden Normalgleichungen.

Z. B. bei $s = 4$ Strahlen und $W = 6$ Winkeln hat man in beiden Fällen 3 Gleichungen aufzulösen.

Dagegen bei vielen Strahlen und verhältnismässig wenigen Bedingungsgleichungen ist die Korrelatenmethode sehr am Platz, wie folgendes Beispiel zeigt:

Nach Fig. 2. sind 6 unabhängige Winkel (1) (2) (3) (4) (5) (6) gemessen. Ausser diesen 6 sollen nur 2 Kontrollwinkel gemessen sein, nämlich die Summe $(1) + (2) = (7)$ und die Gesamtsumme $(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) = (8)$, es bestehen also nur 2 Bedingungsgleichungen.



Folgendes sind die Messungen in neuer Teilung und die Gewichte:

Nr.	Zielpunkt links	Zielpunkt rechts	Gemessene Winkel	Gewicht p
1	Feldberg	Belchen	(1) = 27,94758	5
2	Belchen	Catharina	(2) = 86,18972	12
3	Catharina	Strassburg	(3) = 63,70226	4
4	Strassburg	Hünersedel	(4) = 8,76737	3
5	Hünersedel	Hornisgrinde	(5) = 26,27865	4
6	Hornisgrinde	Trinitatis	(6) = 82,73775	3
7	Feldberg	Catharina	(7) = 114,13753	5
8	Feldberg	Trinitatis	(8) = 295,62484	5
				41

(34)

Die erste Bedingungsgleichung heisst:

$$27,94758 + v_1 + 86,18972 + v_2 = 114,13753 + v_7$$

oder zusammengefasst, mit Annahme der Centesimalsekunde als Einheit:

$$v_1 + v_2 - v_7 - 2,3 = 0 \quad (35)$$

In gleicher Weise stellt man die zweite Bedingungsgleichung auf:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 - v_8 - 15,1 = 0 \quad (36)$$

Die Coefficienten der beiden Normalgleichungen werden:

$$\left[\frac{a a}{p} \right] = + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} = 0,200 + 0,083 + 0,143 = + 0,426 \text{ u. s. w.}$$

Die zwei Normalgleichungen selbst sind:

$$\begin{aligned} + 0,426 k_1 + 0,283 k_2 - 2,3 &= 0 \\ + 0,283 k_1 + 1,649 k_2 - 15,1 &= 0 \end{aligned}$$

Deren Auflösung giebt:

$$k_1 = -0,8 \quad k_2 = +9,3$$

Damit bestimmt man die Verbesserungen v nach (9) § 139. S. 119:

$$v_1 = \frac{1}{5}(-0,8 + 9,3) = +1,7$$

Ebenso werden die übrigen v berechnet, alle zusammen sind:

$v_1 = +1,7 \quad v_2 = +0,7 \quad v_3 = +2,3 \quad v_4 = +3,1 \quad v_5 = +2,3 \quad v_6 = +3,1 \quad v_7 = +0,2 \quad v_8 = -1,9$
diese v in Einheiten von $1'' = 0,0001''$ zu den gemessenen Winkeln (34) hinzugefügt geben die ausgeglichenen Winkel, welche keine Widersprüche mehr zeigen.

Die Summe $[p v v]$ wird aus den einzelnen v in Übereinstimmung mit der Formel $-[w k]$ erhalten:

$$[p v v] = 138,6$$

also der mittlere Fehler eines Winkels vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{138,6}{2}} = \pm 8,3'' \text{ oder } = \pm 2,7''.$$

(In unserer vorigen Auflage S. 226 war dieses Beispiel ausführlicher behandelt.)

§ 68. Berechnung voller Richtungs-Sätze.

Wenn eine volle Satzmessung in gleichartiger Weise, nur mit verdrehtem Limbus, mehrfach wiederholt wird, so besteht die Berechnung des Schlussergebnisses lediglich in einer Mittelbildung, wie wir an dem Beispiele von § 60. S. 187 bereits gezeigt haben.

Die Limbusverstellung zwischen je 2 Sätzen macht man bekanntlich wegen der Elimination der Teilungsfehler mit gleichen Intervallen, z. B. von 45° zu 45° , wenn man 4 Sätze nehmen will, von 30° zu 30° bei 6 Sätzen u. s. w. Die verschiedenen Sätze macht man gewöhnlich dadurch vergleichbar, dass man irgend eine Sicht, etwa als Anfang, in allen Sätzen auf einen gemeinsamen Wert, z. B. $0^\circ 0' 0''$ bringt (oder auch auf einen genäherten Richtungswinkel), doch könnte man die Mittelbildung, wenn man wollte, auch *ohne* solche vorhergehende Zusammenschiebung machen, indem man ja immer auch *nach* der Mittelbildung den Satz nochmals beliebig verschieben kann.

All dieses Bekannte hier vorzuführen, sind wir nur veranlasst, weil wir noch die Berechnung des mittleren Fehlers aus mehreren Satzwiederholungen zeigen wollen, und zwar im Anschluss an unser früheres Beispiel der Hannoverschen Triangulierung, Station Schanze, in § 60. S. 187.

Es sind dort 12 Sätze genommen, von welchen wir aber nun nur 6, d. h. die Hälfte benützen wollen, erstens weil 12 Sätze ungewöhnlich viel sind, und zweitens, weil es hier um ein übersichtliches Schulbeispiel zu thun ist, bei welchem zu viele Wiederholungen die Übersichtlichkeit stören würden.

Mit Weglassung der Grade und Minuten haben wir so die 6 Richtungssätze erhalten, welche in der Tabelle auf S. 225 in der Abteilung I eingesetzt sind, und zwar mit $60,0''$ als Anfangsrichtung auf P^0 statt mit $0,0''$, damit bei den Satzverschiebungen keine negativen Werte entstehen.

Man bildet nun in der Abteilung I wie gewöhnlich die Quersummen und die Richtungsmittel, und zur Kontrolle auch nach den Vertikalspalten die Satzsummen.

*Berechnung des mittleren Fehlers einer Richtungsmessung aus 6 Sätzen
mit 4 Zielpunkten.*

Satz-Nr. Kreislage	1. 0°	2. 30°	3. 60°	4. 90°	5. 120°	6. 150°	Quer- summe	Richtungs- Mittel A
I {	Zielpunkt P°	60,0''	60,0''	60,0''	60,0''	60,0''	360,0''	60,00'' = A°
	" P'	6,0	10,5	11,0	10,0	8,5	51,5	8,58 = A'
	" P''	63,0	61,0	60,5	62,0	56,0	360,5	60,08 = A''
	" P'''	40,5	45,0	43,5	38,5	40,0	249,0	41,50 = A'''
	Summen	169,5	176,5	175,0	170,5	165,0	1021,0	170,16
Satzmittel B								42,38
								44,12
								43,75
								42,62
								41,12
								41,25
								255,25
								42,54
								255,24
								= A ₀
Satzverschiebung A ₀ - B								+ 0,16
								- 1,58
								- 1,21
								- 0,08
								+ 1,42
								+ 1,29
								0,00
II = I + (A ₀ - B) {	P°	60,16	58,42	58,79	59,92	61,42	61,29	360,00 = A°
	P'	6,16	8,92	9,79	9,92	9,92	6,79	51,50 = A'
	P''	63,16	59,42	59,29	61,92	57,42	59,29	360,50 = A''
	P'''	40,66	43,42	42,29	38,42	41,42	42,79	249,00 = A'''
	Summen	170,14	170,18	170,16	170,18	170,18	170,16	1021,00
Satzmittel B'								42,54
								42,54
								42,54
								42,54
								42,54
								255,24
III {	v° = A° - P°	- 0,16	+ 1,58	+ 1,21	+ 0,08	- 1,42	- 1,29	0,00
	v' = A' - P'	+ 2,42	- 0,34	- 1,21	- 1,34	- 1,34	+ 1,79	- 0,02
	v'' = A'' - P''	- 3,08	+ 0,66	+ 0,79	- 1,84	+ 2,66	+ 0,79	- 0,02
	v''' = A''' - P'''	+ 0,84	- 1,92	- 0,79	+ 3,08	+ 0,08	- 1,29	0,00
	Summen	+ 0,02	- 0,02	0,00	- 0,02	- 0,02	0,00	- 0,04
IV {	v° 2	0,03	2,50	1,46	0,01	2,02	1,66	7,68
	v' 2	5,86	0,12	1,46	1,80	1,80	3,20	14,24
	v'' 2	9,49	0,44	0,62	3,39	7,08	0,62	21,64
	v''' 2	0,71	3,69	0,62	9,49	0,01	1,66	16,18
								16,09
								6,75
								4,16
								14,69
								10,91
								7,14
								59,74
								59,74
								} = [v²]

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{(n-1)(s-1)}} = \sqrt{\frac{59,74}{(6-1)(4-1)}} = \sqrt{\frac{59,74}{15}} = \pm 2,00'' \quad (1)$$

Die Quersumme 1021,0 muss mit der Vertikal-Addition der Quersummen der einzelnen Sätze stimmen. Die Richtungsmittel A, welche sich aus den Quersummen durch Division mit 6 ergeben, enthalten nun bereits alles, was zur Ausrechnung der Richtungssätze an sich gehört, denn man hat, wenn man wieder die Grade und Minuten von (2) S. 187 zusetzt, das Ergebnis:

$$\begin{aligned} P^{\circ} &= 60,00'' & \text{Aegidius} &= 0^{\circ} 00' 00,00'' \\ P' &= 8,58'' & \text{Burg} &= 56^{\circ} 04' 08,58'' \\ P'' &= 60,08'' & \text{Steuerndieb} &= 307^{\circ} 55' 0,08'' \\ P''' &= 41,50'' & \text{Dreifaltigkeit} &= 345^{\circ} 43' 41,50'' \end{aligned}$$

Um weiter zur Berechnung eines mittleren Richtungsfehlers zu gelangen, bilden wir auch die Satzmittel B, bei denen der Blick sich sogleich darauf richten wird, ob sie nahezu *gleich* sind und dann bildet man aus diesen Satzmitteln B wieder ein Mittel A₀ = 42,54, welches mit den einzelnen B verglichen, die Satzverschiebungen

$A_0 - B$ giebt. Diese $A_0 - B$ zu den Richtungswerten in I addiert, geben die verschobenen Richtungen in der Abtheilung II. (S. 225.)

Verfährt man in II ebenso wie vorher in I, so bekommt man in Hinsicht auf die Richtungsmittel A durchaus nichts neues, aber die Satzmittel B' werden anders als vorher, nämlich die B' werden, wie beabsichtigt war, alle *gleich*, und wenn man nun die Fehler v durch Vergleichung der Richtungsmittel $A^\circ A' A'' A'''$ mit den verschobenen Richtungen der Abtheilung II bildet, wie in III geschehen ist, so wird nach Kolumnen und Linien addiert überall die Summe = 0, oder höchstens 0,02 wegen Abrundungen. Endlich werden diese v quadriert, wie in Abtheilung IV zu sehen ist, und die Summe aller v^2 , nach Spalten und Linien addiert, wird $[v^2] = 59,74$. Der Nenner zur Berechnung des mittleren Fehlers ist $(n-1)(s-1)$, wo n die Anzahl der Sätze (Gyren) und s die Anzahl der Richtungen (Strahlen) in jedem Satze bedeutet, also in unserem Falle $n = 6$ und $s = 4$ oder $(n-1)(s-1) = 15$, womit sich ergibt:

$$m = \sqrt{\frac{59,74}{15}} = \pm 2,00'' \quad (2)$$

Dieses ist der mittlere Fehler einer Richtung in einem Satze, und bei 6 maliger Satz wiederholung wird der mittlere Fehler einer 6 fach gemittelten (d. h. ausgeglichenen) Richtung:

$$M = \frac{2,00}{\sqrt{6}} = \pm 0,98'' \quad (3)$$

Wenn man, ebenso wie die hier behandelten 6 Sätze, alle die 12 Sätze von (2) § 60. S. 187 zusammen berechnet, so erhält man zu Fig. 1. § 60. S. 185

$$m = \pm 2,31'' \quad , \quad M = \pm 0,67'' \quad (4)$$

Was die Begründung des Rechenverfahrens nach S. 225 in Hinsicht auf die einzelnen v und $[v^2]$ betrifft, so mag es zunächst genügen, dass in Abtheilung III die v nach Spalten und Linien durchaus die Summen Null geben, dass also in allen Beziehungen das Prinzip des arithmetischen Mittels eingehalten ist. Die schärfere Begründung ist aus dem späteren § 71. zu entnehmen.

Anmerkung über Teilungsfehler.

Wenn die Satzverschiebungen $A_0 - B$ in der Rechnung von S. 225 einen gesetzmässigen Verlauf zeigen (flüssige Curve beim Auftragen der $A_0 - B$ als Ordinaten zu den Kreislagen als Abscissen), so enthält das eine Andeutung von systematischen Teilungsfehlern, zugleich aber auch die Beruhigung, dass der wirkliche mittlere Richtungsfehler, wie er nachher in das Netz eingeht, *kleiner* sein wird, als der Fehler m , bzw. M nach der Rechnung (2) und (3), denn ein Teil der Wertbeträge der v wird in den systematischen Teilungsfehlern seinen Grund haben, und daher durch die symmetrischen Kreisstellungen sich grossenteils eliminieren.

In unserem Falle zeigen die $A_0 - B$ auf S. 225 in der That gesetzmässigen Verlauf, und der Schlussfehler $M = \pm 0,67''$ nach (4) wäre also noch zu gross. Die Netzausgleichung § 61. gab in (4) S. 195 $m = \pm 1,04''$, was mit vorigem $M = \pm 0,67''$ vergleichbar wäre, wenn nicht noch eine Menge anderer Umstände, die vielen Centrierungen auf hohen (vielleicht schwankenden) Türmen u. s. w. dazu kämen.

§ 69. Genäherte Berechnung unvollständiger Richtungssätze.

Hat man Richtungsbeobachtungen in lauter vollen Sätzen, so besteht die Ausgleichung lediglich in der Mittelbildung für alle Ablesungen je eines Zielpunktes, wie im vorigen § 68. gezeigt ist.

Sind die einzelnen Sätze nicht alle vollständig, so ist die strenge Ausgleichung nach unserem späteren § 71. zu machen.

Es giebt aber eine zweckmässiges Näherungsverfahren zur Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze, welches in dem Werke „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland“, London 1858, S. 62–66, zuerst angegeben und in Helmert „Ausgleichungsrechnung nach der M. d. kl. Q., 1872“, S. 154 behandelt wird.

Als Zahlenbeispiel hiezu haben wir auf S. 228 eine willkürliche Auswahl aus den Messungen auf der Station Trenk der Gradmessung in Ostpreussen getroffen, und dabei angenommen, dass wenigstens ein Zielpunkt (Mednicken) in allen Sätzen eingeschnitten ist, so dass alle Sätze auf Mednicken $= 0^\circ 0' 0''$ reduziert werden können. Dieses ist jedoch nicht wesentlich; wäre z. B. in dem 8ten Satz nur Wargelitten und Galtgarben gemessen, nicht aber Mednicken, so würde man etwa diesen Satz auf das Mittel der sämtlichen vorhergehenden Ablesungen von Wargelitten oder Galtgarben bringen. Mit einigem Geschick wird man sich in solchen Fällen leicht helfen können, so dass alle Sätze in gemeinsamer genäherter Orientierung zum Beginn der Ausgleichung dastehen.

Hat man so das Beobachtungsmaterial in der Tabelle Ia geordnet, so bildet man in allen Kolumnen die Mittel A , und wenn die Sätze nur sehr wenig lückenhaft waren, oder wenn es sich nur um eine flüchtige Ausgleichung handelte, so würde man die Mittelwerte A sofort als Ergebnisse beibehalten.

Die weitere Ausgleichung gestaltet sich so:

I b. Man bildet die Differenzen $A - l = v$ zwischen den Mitteln A der ersten Stufe und ihren darüber stehenden l , z. B.:

Fuchsberg Num.	1.	35,8''	—	36,2''	=	— 0,4''
	2.	35,8	—	37,5	=	— 1,7
	3.	=	..
	4.	35,8	—	33,7	=	+ 2,1
	5.	35,8	—	36,1	=	— 0,3
	6.	35,8	—	34,7	=	+ 1,1
	7.	35,8	—	36,5	=	— 0,7

$$\text{Summe} \quad + 3,2 - 3,1 = + 0,1 \text{ soll} = 0,0$$

Die algebraischen Summen dieser $A - l = v$ sind bekanntlich = Null, was als Rechenprobe der Abteilung II. dient und hier mit + 0,1 statt 0,0 genügend stimmt.

Weiter bildet man für die Abteilung I b die Quersummen und die Quermittel,

$$\text{z. B.:} \quad \frac{0,0'' - 0,4'' + 1,9'' + 0,2''}{4} = \frac{+ 1,7''}{4} = + 0,4'' = x.$$

Diese x der letzten Spalte von I b setzt man unverändert hinauf nach I a.

II. Die soeben besprochenen x werden zu den l in I a addiert, und die Summen nach II a heruntersetzt. Hier bildet man wieder spaltenweise die Mittel B , welche als Resultat gelten.

Genäherte Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze. (Station Trenk.)

Genährte Richtungswinkel						
Satz Num.	Ia. Beobachtete Richtungen. Erste Stufe.				x	
	Mednicken l^o	Fuchsberg l'	Wargelitten l''	Galtgarben l'''		
1	0° 0' 0,0"	83° 30' 36,2"	287° 14' 11,0"	346° 24' 18,4"	+ 0,4	von Ib. heraufgesetzt.
2	0,0	37,5	14,5	. .	— 1,1	
3	0,0	. .	12,5	18,0	+ 0,3	
4	0,0	33,7	14,1	. .	+ 0,3	
5	0,0	36,1	13,4	. .	— 0,3	
6	0,0	34,7	. .	19,6	0,0	
7	0,0	36,5	— 0,3	
8	0,0	. .	13,7	20,5	— 0,9	
9	0,0	. .	11,2	. .	+ 0,8	
10	0,0	16,5	+ 1,0	
Summen	10. 0,0"	6. 214,7"	7. 90,4"	5. 93,0"	10 + 6 + 7 + 5 = 28	
Mittel A.	0° 0' 0,0"	83° 30' 35,8"	287° 14' 12,9"	346° 24' 18,6"		

Ib. Differenzen $A - l = v$					Quer- Summen	Anzahl q	Mittel x
1	0,0''	— 0,4''	+ 1,9''	+ 0,2''	+ 1,7	4	+ 0,4''
2	0,0	— 1,7	— 1,6	. .	— 3,3	3	— 1,1
3	0,0	. .	+ 0,4	+ 0,6	+ 1,0	3	+ 0,3
4	0,0	+ 2,1	— 1,2	. .	+ 0,9	3	+ 0,3
5	0,0	— 0,3	— 0,5	. .	— 0,8	3	— 0,3
6	0,0	+ 1,1	. .	— 1,0	+ 0,1	3	0,0
7	0,0	— 0,7	— 0,7	2	— 0,3
8	0,0	. .	— 0,8	— 1,9	— 2,7	3	— 0,9
9	0,0	. .	+ 1,7	. .	+ 1,7	2	+ 0,8
10	0,0	+ 2,1	+ 2,1	2	+ 1,0
Summen	0,0''	+ 3,2''	+ 4,0''	+ 2,9''		28	
		— 3,1	— 4,1	— 2,9			
Probe, soll:	0,0	+ 0,1	— 0,1	0,0			
	0,0	0,0	0,0	0,0			

II a. Verbesserte Richtungen $l + x$. Zweite Stufe.

1	359° 59' 60,4''	83° 30' 36,6''	287° 14' 11,4''	346° 24' 18,8''	Diese Werte werden durch Additionen $l + x$ von I. gebildet.
2	58,9	36,4	13,4	. .	
3	60,3	. .	12,8	18,3	
4	60,3	34,0	14,4	. .	
5	59,7	35,8	13,1	. .	
6	60,0	34,7	. .	19,6	
7	59,7	36,2	
8	59,1	. .	12,8	19,6	
9	60,8	. .	12,0	. .	
10	61,0	17,5	
Summen	10. 600,2''	6. 213,7''	7. 89,9''	5. 93,8''	
Mittel B.	0° 0' 0,0''	83° 30' 35,6''	287° 14' 12,8''	346° 24' 18,8''	

Um dieses Verfahren zu begründen, erinnern wir uns, dass es immer darauf ankommt, die Differenzen v zwischen den Resultaten und den Beobachtungen in ihrer Quadratsumme $[v v]$ möglichst klein zu machen. Man kann nun in diesem Falle die Gesamtsumme $[v v]$ in zweifacher Weise zerlegt denken:

$$1) \text{ Zerlegung nach Kolumnen } [v v] = [v^{\circ} v^{\circ}] + [v' v'] + [v'' v''] + \dots \quad (1)$$

$$2) \text{ Zerlegung nach Linien } [v v] = [v_1 v_1] + [v_2 v_2] + [v_3 v_3] + [v_4 v_4] + \dots \quad (2)$$

Durch die Bildung der Kolumnenmittel A wird in jeder Kolumne für sich die Summe $[v^{\circ} v^{\circ}]$, bzw. $[v' v']$ oder $[v'' v'']$ möglichst klein gemacht, und in den einzelnen Linien wird dann $[v_1 v_1]$, bzw. $[v_2 v_2]$ u. s. w. noch verkleinert durch Anbringung der Satzverschiebungen $x_1 x_2$ u. s. w., welche die arithmetischen Mittel der v jeder Linie sind.

Letzteres zeigt sich am deutlichsten an derjenigen Kolumne, welche am Anfang zur Hauptorientierung gedient hat, in unserem Beispiel an der Kolumne Mednicken; diese erhält in der Tabelle I b alle $v = 0$, d. h. alle Widersprüche werden dadurch den anderen Kolumnen zugeschoben, und erst nach Einführung der Verschiebungen x tritt eine gerechtere Verteilung der v ein.

Die allmähliche Verkleinerung von $[v v]$, zuerst in den Kolumnen, dann in den Linien, entspricht näherungsweise der M. d. kl. Q., welche bei strenger Anwendung eine gemeinsame Berücksichtigung aller Beziehungen in den Kolumnen und in den Linien verlangen würde.

Die Zahlenwerte der Tabelle II a haben immer noch den Charakter von *Original*-Beobachtungen, denn es sind nur die Ablesungen jedes Satzes um eine *konstante* Grösse x verschoben worden, und solche Verschiebung ist bei Richtungs-Beobachtungs-Sätzen immer willkürlich zulässig.

Man kann daher, mit der Tabelle II a von neuem anfangend, die ganze Rechnung wiederholen, eine dritte Stufe III bilden, und es ist möglich, dass man durch fortgesetzte Wiederholungen dieser Art den Resultaten einer strengen Ausgleichung nach der M. d. kl. Q. unbegrenzt nahe kommt.

Dabei kann man auch für jede Ausgleichungsstufe die Quadratsumme $[v^2]$ der übrig bleibenden Fehler ausrechnen und an deren allmählicher Abnahme sehen, ob die Rechnungsgang konvergiert. Wir haben das an unserem Beispiele S. 228 bis zur dritten Stufe durchgeführt und folgendes erhalten:

Station Trenk

	Stufe I	Stufe II	Stufe III
Mednicken . . .	0° 0' 0,0''	0° 0' 0,0''	0° 0' 0,00''
Fuchsberg . . .	83 30 35,8	83 30 35,6	83 30 35,55
Wargelitten . . .	287 14 12,9	287 14 12,8	287 14 12,67
Galtgarben . . .	346 24 18,6	346 24 18,8	346 24 18,81
	$[v^2] = 30,22$	$[v^2] = 18,42$	$[v^2] = 17,97$

Von der II. zur III. Stufe ist kaum noch merkliche Änderung. Aus der Summe $[v^2]$ kann man auch einen mittleren Fehler einer Richtung berechnen, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{17,37}{28-13}} = \sqrt{\frac{17,97}{15}} = \pm 1,09''$$

Der Nenner 28 — 13 ist hier dadurch entstanden, dass 28 gemessene Richtungen vorhanden sind, welchen aber als Unbekannte gegenüber stehen erstens 3 unabhängige

Winkel zwischen 4 Sichten und 10 Orientierungs-Unbekannte in 10 gemessenen Sätzen, also 13 Unbekannte.

Die in Vorstehendem behandelte Näherungsausgleichung empfiehlt sich aus vielen Gründen, und sie dürfte vielleicht in neuer Zeit noch mehr Bedeutung deswegen gewinnen, weil die strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze, welche wir im nachfolgenden § 71. lehren werden, mit der dazu gehörigen formell strengen Bessel'schen Netz-Ausgleichung (§ 72.) allmählich gegen andere Verfahren zurücktritt.

§ 70. Unterscheidung von Winkelmessung und Richtungsmessung.

Wir haben schon im Bisherigen mehrfach die Unterscheidung von Winkelmessungen und Richtungsmessungen gemacht, ohne dabei scharfe Erklärungen zu geben, indem diese Benennungen heute so allgemein, schon bei den Messungen, gebraucht werden, dass ihr Sinn als bekannt vorausgesetzt werden konnte, nämlich so, dass eine *Winkelmessung* (im engeren Sinne) sich stets auf *zwei* Sichtstrahlen, links und rechts, bezieht, während ein Satz von *Richtungsmessungen* beliebig viele Sichtstrahlen enthalten kann.

Winkelmessung erscheint also als besonderer Fall der Richtungsmessung, und wenn man mehrere Winkelmessungen aneinander setzt, so bekommt man für die trigonometrischen Rechnungen dasselbe, was ein Satz von Richtungsmessungen bietet, und nur wenn es sich um Ausgleichungs- und Genauigkeitsfragen handelt, ist die Unterscheidung von Winkeln und Richtungen in dem angegebenen Sinne von Bedeutung.

Die heutigen Benennungen Winkelmessung und Richtungsmessung haben sich in diesem Sinne erst in den letzten Jahrzehnten festgesetzt. Gauss unterschied 1821 (Astr. Nachr. 1. Band, S. 81) „Winkelmessungen auf einmal gemacht“ (Richtungen) und „Winkelmessungen unabhängig gemacht“ (Winkelmessungen im engeren Sinne), Bessel und Hagen gebrauchten 1837 die Worte Winkel und Richtung ohne scharfe Unterscheidung nach dem heutigen Sinne, welche wie es scheint von Hansen herrührt, der eine Ausgleichung nach „Richtungen“ 1841 in „Astr. Nachr., 18. Band“, S. 173, gab. Auch Gerling gebrauchte in seinen „Ausgleichungs-Rechnungen“ 1843, „Winkel“ und „Richtungen“, so wie heute gebräuchlich ist.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir die wichtigsten Begriffe über mittlere Fehler und Gewichte von Winkeln und Richtungen festsetzen.

Ein Winkel kann immer betrachtet werden als Differenz zweier Richtungen; z. B. in Fig. 1. ist:

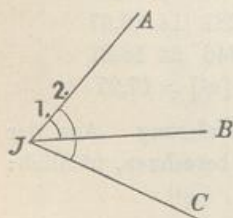
$$\text{Winkel } A J B = \text{Richtung } J B - \text{Richtung } J A \quad (1)$$

Ist daher r ein mittlerer Richtungsfehler und m ein mittlerer Winkelfehler, so ist nach (1):

$$\begin{aligned} \pm m &= \pm r \pm r \\ m^2 &= r^2 + r^2 = 2 r^2 \\ m &= r \sqrt{2} \end{aligned} \quad (2)$$

oder in Gewichtsverhältnissen, wenn p ein Winkelgewicht und q ein Richtungs-
gewicht ist:

Fig. 1.
3 Richtungen A B C
2 Winkel 1, 2.



$$\left. \begin{aligned} p:q &= \frac{1}{2}:1 \text{ oder } = 1:2 \\ \text{oder } p &= \frac{q}{2}, \quad q = 2p \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

d. h. eine Winkelmessung hat nur halbes Gewicht p im Vergleich mit dem Gewicht q einer Richtungsmessung.

Da durch Messungswiederholung auch das Gewicht verdoppelt wird, ergibt sich auch, dass die Doppelmessung eines Winkels gleiches Gewicht hat mit der einfachen Messung einer Richtung.

Eine einzelne Richtungsmessung ist für praktische Zwecke wertlos, denn eine solche Messung bestimmt nur den Winkel, welcher eine Theodolit-Sicht mit der Sicht für die Null-Ablesung bildet, z. B. wenn man bei einer Theodolit-Aufstellung einen Punkt A anzielt und $26^\circ 17' 20''$ abliest, so heisst das, die Sicht A macht den Winkel $26^\circ 17' 20''$ mit derjenigen Sichtlinie, welche man bei der Ablesung $0^\circ 0' 0''$ hat. Würde man nun den Theodolit wegnehmen, so hätte man für trigonometrische Berechnungen absolut Nichts erhalten. Man muss für geodätische Zwecke immer mindestens zwei Richtungen zusammen messen. Die Richtungen, welche bei einer und derselben Limbusstellung gemessen werden, bilden zusammen einen Satz (oder Gyrus).

Wenn nach Fig. 1. die 3 Richtungen ABC in einem Satz eingeschnitten sind, so ist jede Richtung mit einem besonderen Fehler v_A, v_B, v_C behaftet, und wenn die 3 Messungen in eine Ausgleichung eingehen, so muss werden:

$$(v_A)^2 + (v_B)^2 + (v_C)^2 + \dots = \text{Minimum} \quad (4)$$

Wenn andererseits die 3 Strahlen ABC durch 2 Winkelmessungen AB und AC gegen einander festgelegt werden, so entsprechen diesen 2 Winkelmessungen 4 Richtungsverbesserungen, es ist nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \text{Winkelverbesserung } \delta_1 &= v_{B_1} - v_{A_1} \\ \text{Winkelverbesserung } \delta_2 &= v_{C_2} - v_{A_2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wo δ_1 und δ_2 Winkelverbesserungen, und $v_{A_1}, v_{B_1}, v_{A_2}, v_{C_2}$ Richtungsverbesserungen sind. Wenn man nun nach Richtungen ausgleicht, so besteht die Bedingung (für gleiche Gewichte):

$$(v_{A_1})^2 + (v_{B_1})^2 + (v_{A_2})^2 + (v_{C_2})^2 + \dots = \text{Minimum} \quad (6)$$

während bei einer Ausgleichung nach Winkeln gälte:

$$p_1 \delta_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \dots = p_1 (v_{B_1} - v_{A_1})^2 + p_2 (v_{C_2} - v_{A_2})^2 + \dots = \text{Minimum} \quad (7)$$

wo p_1 und p_2 die Winkelgewichte sind.

Angenommen, man habe die Ausgleichung nach dieser letzten Bedingung (7) bewirkt, so ist man zur Kenntnis der Differenzen $v_{B_1} - v_{A_1}$ u. s. w. gelangt, welche in (5) mit δ_1, δ_2 u. s. w. bezeichnet wurden; die einzelnen v_{A_1}, v_{B_1} u. s. w. kennt man vorerst noch nicht. Wenn aber diese Richtungsverbesserungen v_{A_1}, v_{B_1} u. s. w. in gar keinen anderen Verbindungen in die Rechnung eingehen, als eben in diesen Differenzen δ_1, δ_2 u. s. w., so hat man das Recht, bei der Zerlegung der Winkelverbesserungen δ in je 2 Richtungsverbesserungen abermals das Prinzip der kleinsten Quadratsumme anzuwenden und zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} v_{A_1} &= -\frac{\delta_1}{2} & v_{B_1} &= +\frac{\delta_1}{2} \\ v_{A_2} &= -\frac{\delta_2}{2} & v_{C_2} &= +\frac{\delta_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

denn jede andere Verteilung würde eine grössere Quadratsumme $(v A_1)^2 + (v B_1)^2 + \dots$ geben. Setzt man die Werte für $v A_1$, $v B_1$ u. s. w. von (8) in (6) und (7) ein, so wird:

$$\frac{1}{2} \delta_1^2 + \frac{1}{2} \delta_2^2 + \dots = \text{Minimum} \quad (6^*)$$

$$p_1 \delta_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \dots = \text{Minimum} \quad (7^*)$$

Diese 2 Bedingungen werden identisch, wenn man $p_1 = p_2 = \dots = \frac{1}{2}$ setzt, d. h. wenn man jedem Winkel das halbe Gewicht einer Richtung giebt, was der schon zu Anfang erkannten Beziehung (3) entspricht.

Wir haben also erkannt, dass, wenn nur Winkelmessungen vorliegen, man zu gleichen Ergebnissen gelangt, gleichviel, ob man nach Winkeln oder nach Richtungen ausgleicht, und da die Winkelausgleichung einfacher ist, wird man dann wohl meistens bei derselben bleiben. Wenn aber in einem Satze mehr als 2 Richtungen vorkommen, so ist Winkelausgleichung unmöglich und es muss nach Richtungen, entsprechend der Minimumsbedingung (6), ausgeglichen werden.

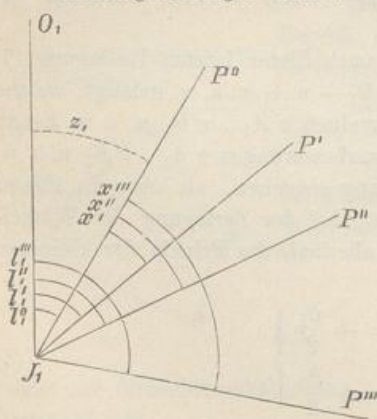
Richtungsmessungen haben noch das Eigentümliche, dass alle Ablesungen eines Satzes um eine beliebige Grösse verändert werden dürfen, wie folgendes Beispiel zeigt

Zielpunkt	Gemessene Richtungen	Reduktion auf $A = 0$	Reduktion auf $A = 57^\circ 37' 3''$	
A	165° 46' 12"	0° 0' 0"	57° 37' 3"	} (9)
B	205 45 37	39 59 25	97 36 28	
C	286 54 20	121 8 8	178 45 11	

Die *Differenzen* der Richtungen, d. h. die Winkel, auf welche es bei trigonometrischen Berechnungen allein ankommt, bleiben immer dieselben, mag man die Originalablesungen benützen, oder dieselben auf einen Strahl $= 0^\circ 0' 0''$ reduzieren, oder einem Strahl seinen trigonometrischen Richtungswinkel als Richtung zuteilen, wie in der letzten Spalte der Zusammenstellung (9) angenommen ist.

§ 71. Strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze. (Bessels Methode.)

Fig. 1.
Richtungsmessungen. Satz 1.



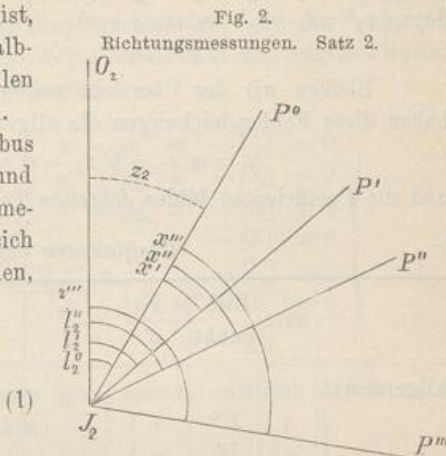
Wenn mehrere unvollständige Sätze auf einer Station gemessen sind, wie etwa in dem Beispiel von § 69. S. 228, so ist es zunächst immer angenehm, wenn wenigstens *eine* Sicht in allen Sätzen vorkommt, damit man alle Sätze an diese eine Sicht etwa als Nullstrahl anhängen und alles übrige vorläufig ordnen kann. Indessen ist dieses nicht wesentlich; die streng theoretische Ausgleichung solcher unvollständiger Richtungssätze ist von solcher Ordnung auf einen gemeinsamen Anfangsstrahl unabhängig, und macht nur etwa zur Gewinnung erster Näherungen davon Gebrauch.

Auf einem ersten Beobachtungspunkt J_1 (Fig. 1.) wird ein Limbuskreis aufgestellt, dessen

Nullhalbmesser die Lage $J_1 O_1$ hat; und beim Einschneiden der geodätischen Strahlen $P^\circ P' P'' P'''$ werden an dem Limbuskreisrand die Ablesungen $l_1^\circ l_1' l_1'' l_1'''$ gemacht. Obgleich hiebei die Lage des Kreisnullhalbmessers $J_1 O_1$ gegen die Zielstrahlen ohne alle geodätische Bedeutung ist, muss doch ein Winkel z_1 , welcher den Nullhalbmesser $J_1 O_1$ gegen einen der genannten Strahlen festlegt, mit in Rechnung genommen werden.

Alles dieses wird mit verstelltem Limbus wiederholt, wie in Fig. 2. angedeutet ist; und indem wir nun die Sätze mit 1 2 3 ... numerieren, die Zielpunkte aber, und alles, was sich darauf bezieht, mit $^\circ ' '' '''$... unterscheiden, haben wir folgende Übersicht:

Satz ₁	l_1°	l_1'	l_1''	l_1'''	...	z_1
Satz ₂	l_2°	l_2'	l_2''	l_2'''	...	z_2
Satz ₃	l_3°	l_3'	l_3''	l_3'''	...	z_3
...
Satz _n	l_n°	l_n'	l_n''	l_n'''	...	z_n



Die Gewichte der Beobachtungen sollen entsprechend durch $p_1^\circ p_1' p_1'' p_1'''$... bezeichnet werden; es sind zwar gewöhnlich alle Gewichte der Beobachtungen auf einer Station einander gleich, es ist aber die allgemeine Einführung von Gewichten dennoch nötig, damit man das Ausfallen einzelner Beobachtungen mathematisch ausdrücken kann. Wenn z. B. im zweiten Satz der Zielpunkt P''' fehlt, so ist $p_2''' = 0$.

Durch die Ausgleichung werden allen Messungen Verbesserungen zugeteilt, welche mit v bezeichnet werden sollen; wir haben also ausser (1) noch folgende Bezeichnungen festgestellt:

	Gewichte:				Verbesserungen:			
Satz ₁	p_1°	p_1'	p_1''	p_1'''	v_1°	v_1'	v_1''	v_1'''
Satz ₂	p_2°	p_2'	p_2''	p_2'''	v_2°	v_2'	v_2''	v_2'''
Satz ₃	p_3°	p_3'	p_3''	p_3'''	v_3°	v_3'	v_3''	v_3'''

Die Beobachtungswerte l sind Richtungen. Man kann dieselben in jedem einzelnen Satz als Winkel betrachten, welche die Strahlen nach $P^\circ P' P'' P'''$ mit einem gemeinschaftlichen aber unbekannten Anfangsstrahl nach O bilden. Diese Beobachtungen l sind gemacht worden zur Bestimmung derjenigen Winkel, welche die Strahlen $P^\circ P' P'' P'''$ unter sich bilden, und da diese 4 Strahlen durch 3 Winkel gegenseitig festgelegt sind, so führen wir als unabhängige Unbekannte folgende Winkel ein:

$$\left. \begin{aligned} \text{Winkel } P^\circ P' &= x' \\ \text{Winkel } P^\circ P'' &= x'' \\ \text{Winkel } P^\circ P''' &= x''' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Es ist hiebei unwesentlich, dass diese Winkel einen Strahl, nämlich P° gemeinsam haben, man könnte auch z. B. die 3 Winkel $P^\circ P'$, $P' P''$, $P'' P'''$ als unabhängige Unbekannte einführen.

Nun kann zur Aufstellung der Fehlergleichungen geschritten werden. Z. B. für die Messung l_2''' hat man nach Fig. 2.: Es soll sein $l_2''' = z_2 + x'''$, also mit Zuhilfenahme der Verbesserung v_2''' :

$$l_2''' + v_2''' = z_2 + x'''$$

oder Fehlergleichung: $v_2''' = z_2 + x''' - l_2'''$

Das ganze System dieser Gleichungen ist:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Satz}_1 & v_1^{\circ} = z_1 - l_1^{\circ} & v_1' = z_1 + x' - l_1' & v_1'' = z_1 + x'' - l_1'' & v_1''' = z_1 + x''' - l_1''' \\ \text{Satz}_2 & v_2^{\circ} = z_2 - l_2^{\circ} & v_2' = z_2 + x' - l_2' & v_2'' = z_2 + x'' - l_2'' & v_2''' = z_2 + x''' - l_2''' \\ \text{Satz}_3 & v_3^{\circ} = z_3 - l_3^{\circ} & v_3' = z_3 + x' - l_3' & v_3'' = z_3 + x'' - l_3'' & v_3''' = z_3 + x''' - l_3''' \end{array} \right\} (4)$$

Bleiben wir der Übersicht wegen bei 3 Sätzen und 4 Zielpunkten stehen, so haben diese Fehlergleichungen die allgemeine Form:

$$v = a' z_1 + b' z_2 + c' z_3 + a x' + b x'' + c x''' + l \quad (5)$$

und die Coefficienten bilden folgende Tabelle:

Coefficienten der Fehlergleichungen:

	Satz	Ziel- punkt	z_1 a'	z_2 b'	z_3 c'	x' a	x'' b	x''' c	l	p
Allgemein:										
Anzahl = s	1	P°	+ 1						$-l_1^\circ$	p_1°
	1	P'	+ 1			+ 1			$-l_1'$	p_1'
	1	P''	+ 1				+ 1		$-l_1''$	p_1''
	1	P'''	+ 1					+ 1	$-l_1'''$	p_1'''
Anzahl = s	2	P°		+ 1					$-l_2^\circ$	p_2°
	2	P'		+ 1		+ 1			$-l_2'$	p_2'
	2	P''		+ 1			+ 1		$-l_2''$	p_2''
	2	P'''		+ 1				+ 1	$-l_2'''$	p_2'''
Anzahl = s	3	P°			+ 1				$-l_3^\circ$	p_3°
	3	P'			+ 1	+ 1			$-l_3'$	p_3'
	3	P''			+ 1		+ 1		$-l_3''$	p_3''
	3	P'''			+ 1			+ 1	$-l_3'''$	p_3'''
			Anzahl = n			Anzahl = $s - 1$			$[p] \quad (6)$	

Vor Bildung der Normalgleichungen wollen wir folgende Summenbezeichnungen einführen :

$$\left. \begin{aligned} p_1^{\circ} + p_1' + p_1'' + p_1''' \dots &= [p_1] \\ p_2^{\circ} + p_2' + p_2'' + p_2''' \dots &= [p_2] \\ . &. \\ p_1' + p_2' + p_3' + \dots &= [p'] \\ p_1'' + p_2'' + p_3'' + \dots &= [p''] \\ . &. \\ [p_1] + [p_2] + [p'] + [p''] + \dots &= [p] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

dabei ist $[p_1] + [p_2] + [p_3] + \dots = [p^\circ] + [p'] + [p''] + \dots = [p]$

Indem wir annehmen, dass alle Sätze *einzel*n aufgeführt sind (ohne Zusammenfassung gleichartiger Sätze) ist $[p] = R$ gleich der Anzahl aller eingeschnittenen Richtungen.

Der erste quadratische Normalgleichungs-Coefficient wird nach der Tabelle (6):

$$p_1^{\circ 12} + p_1'^{12} + p_1''^{12} + p_1'''^{12} = p_1^{\circ} + p_1' + p_1'' + p_1''' = [p_1]$$

und die erste Normalgleichung wird:

$$[p_1]z_1 + 0z_2 + 0z_3 + p_1'x' + p_1''x'' + p_1'''x''' - [p_1l_1] = 0$$

Wenn die Gewichte p alle an und für sich gleich, nämlich $= 1$ sind, so ist es in den Verbindungen mit l nicht nötig, die Gewichte p überhaupt zu schreiben, denn es ist $[p_1 l_1] = p_1^{\circ} l_1^{\circ} + p_1' l_1' + p_1'' l_1'' + p_1''' l_1'''$, d. h. die Summe aller derjenigen l , welche mit der Nummer 1 überhaupt vorkommen, und das kann man kürzer auch durch $[l_1]$ ausdrücken. Auf diese Weise erhält man das folgende System der Normalgleichungen in ausführlicher Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} [p_1] z_1 & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x''' - [l_1] = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad [p_2] z_2 & \quad \cdot \quad \cdot \quad + p_2' x' + p_2'' x'' + p_2''' x''' - [l_2] = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad [p_3] z_3 & \quad + p_3' x' + p_3'' x'' + p_3''' x''' - [l_3] = 0 \\ p_1' z_1 + p_2' z_2 + p_3' z_3 & + [p'] x' + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad - [l'] = 0 \\ p_1'' z_1 + p_2'' z_2 + p_3'' z_3 & \quad \cdot \quad [p''] x'' + \cdot \quad \cdot \quad - [l''] = 0 \\ p_1''' z_1 + p_2''' z_2 + p_3''' z_3 & \quad \cdot \quad \cdot \quad [p'''] x''' - [l'''] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Da viele Coefficienten ausfallen, kann man zuerst, mittelst der 3 ersten Gleichungen, $z_1 z_2 z_3$ in $x' x'' x'''$ ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} -z_1 &= \frac{p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x''' - [l_1]}{[p_1]} \\ -z_2 &= \frac{p_2' x' + p_2'' x'' + p_2''' x''' - [l_2]}{[p_2]} \\ -z_3 &= \frac{p_3' x' + p_3'' x'' + p_3''' x''' - [l_3]}{[p_3]} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Setzt man diese Ausdrücke (9) in die 3 letzten Gleichungen (8), so bekommt man ein reduziertes Normalgleichungssystem, welches nur noch die Unbekannten $x' x'' x'''$ enthält. Dasselbe System bekommt man auch, wenn man die Gleichungen (8) allmählich nach dem Schema S. 61 der Coefficienten $[b b. 1]$ u. s. f. reduziert; die erste so reduzierte Gleichung ist:

$$([p_2] - \frac{0}{[p_1]} 0) z_2 + (0 - \frac{0}{[p_1]} 0) z_3 + (p_2' - \frac{0}{[p_1]} p_1') x' + \dots = 0$$

d. h. die mit $[p_2] z_2$ anfangende zweite Gleichung der Gruppe (8) bleibt bei der ersten Reduktion unverändert.

Ebenso ist es mit der dritten Gleichung von (8). Die vierte Gleichung von (8) giebt bei der ersten Reduktion:

$$([p'] - \frac{p_1'}{[p_1]} p_1') x' + (0 - \frac{p_1'}{[p_1]} p_1'') x'' + (0 - \frac{p_1'}{[p_1]} p_1''') x''' - ([l'] - \frac{p_1'}{[p_1]} [l_1]) = 0$$

Verfolgt man dieses Alles zu Ende, so erhält man ein System von folgender Form in abgekürzter Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned} (a a) x' + (a b) x'' + (a c) x''' + (a l) &= 0 \\ (b b) x'' + (b c) x''' + (b l) &= 0 \\ (c c) x''' + (c l) &= 0 \\ (l l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Coefficienten haben folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} (a a) &= [p'] - \frac{p_1'}{[p_1]} p_1' - \frac{p_2'}{[p_2]} p_2' - \frac{p_3'}{[p_3]} p_3' - \dots \\ - (a b) &= \frac{p_1'}{[p_1]} p_1'' + \frac{p_2'}{[p_2]} p_2'' + \frac{p_3'}{[p_3]} p_3'' + \dots \\ - (a c) &= \frac{p_1'}{[p_1]} p_1''' + \frac{p_2'}{[p_2]} p_2''' + \frac{p_3'}{[p_3]} p_3''' + \dots \\ (b b) &= [p''] - \frac{p_1''}{[p_1]} p_1'' - \frac{p_2''}{[p_2]} p_2'' - \frac{p_3''}{[p_3]} p_3'' - \dots \\ - (b c) &= \frac{p_1''}{[p_1]} p_1''' + \frac{p_2''}{[p_2]} p_2''' + \frac{p_3''}{[p_3]} p_3''' + \dots \\ (c c) &= [p'''] - \frac{p_1'''}{[p_1]} p_1''' - \frac{p_2'''}{[p_2]} p_2''' - \frac{p_3'''}{[p_3]} p_3''' \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Absolutglieder sind:

$$\left. \begin{aligned} - (a l) &= [l'] - \frac{p_1'}{[p_1]} [l_1] - \frac{p_2'}{[p_2]} [l_2] - \frac{p_3'}{[p_3]} [l_3] - \dots \\ - (b l) &= [l''] - \frac{p_1''}{[p_1]} [l_1] - \frac{p_2''}{[p_2]} [l_2] - \frac{p_3''}{[p_3]} [l_3] - \dots \\ - (c l) &= [l'''] - \frac{p_1'''}{[p_1]} [l_1] - \frac{p_2'''}{[p_2]} [l_2] - \frac{p_3'''}{[p_3]} [l_3] - \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Endlich das Fehlerquadrat-Summenglied:

$$(ll) = [l] - \frac{[l_1]^2}{[p_1]} - \frac{[l_2]^2}{[p_2]} - \frac{[l_3]^2}{[p_3]} - \dots \quad (13)$$

Bei den Coefficienten (11) und den Absolutgliedern (12) können alle gleichartigen Sätze zusammengefasst werden, dagegen bei (13) müssen alle Ablesungen *einzel*n behandelt werden. Das System (10) wird nun wie gewöhnlich weiter behandelt (vgl. § 25.), und giebt sowohl die Unbekannten x' x'' x''' , als auch alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha \alpha]$ $[\alpha \beta]$ u. s. w., und die Fehlerquadratsumme:

$$[v v] = (ll. 3) \quad (14)$$

aus welcher das mittlere Fehlerquadrat berechnet wird:

$$m^2 = \frac{[v v]}{R - n - (s - 1)} \quad (15)$$

Um den Nenner $R - n - (s - 1)$ zu verstehen, muss man nach (6) überlegen, dass R die Anzahl aller eingeschnittenen Richtungen ist, n die Anzahl der Sätze und s die Anzahl der Zielpunkte. Damit ist auch n die Anzahl der Nullpunkts-Korrekturen $z_1 z_2 \dots z_n$ und bei s Strahlen ist $s - 1$ die Anzahl der unabhängigen unbekannten Winkel x' x'' $x''' \dots$ also $n + (s - 1)$ die Anzahl aller Unbekannten, woraus bei R Beobachtungen, nach dem Satze (19) § 27. S. 87 der Nenner $n - u = R - (n + (s - 1))$ in (15) folgt.

Indem wir zu einem Zahlenbeispiel übergehen, bemerken wir, dass man unter l° l' l'' u. s. w. nicht die vollen Winkelablesungen zu verstehen braucht, sondern dass man die Grade, Minuten und beliebige Sekunden ein für allemal absondern darf. So haben wir bei dem folgenden Beispiel S. 238, welches aus der „Gradmessung in Ostpreussen“ S. 101 und 102 ausgewählt ist, bei l' und l'' bzw. $26^\circ 14' 50''$ und $87^\circ 4' 50''$ vorn abgesondert.

Nach den Formeln (11) und nach dem Anblick der Tabelle S. 238 bildet man die Coefficienten:

$$\begin{aligned}(a a) &= 31 - \frac{0^2}{24} - \frac{19^2}{38} - \frac{12^2}{36} = + 17,500 \\ - (a b) &= \frac{0}{24} 12 + \frac{19}{38} 0 + \frac{12}{36} 12 = + 4,000 \\ (b b) &= 24 - \frac{12^2}{24} - \frac{0^2}{38} - \frac{12^2}{36} = + 14,000\end{aligned}$$

und nach den Formeln (12) die Absolutglieder:

$$\begin{aligned}- (a l) &= 68,25 - \frac{0}{24} 37,25 - \frac{19}{38} 48,50 - \frac{12}{36} 53,25 = + 26,250 \\ - (b l) &= 70,75 - \frac{12}{24} 37,25 - \frac{0}{38} 48,50 - \frac{12}{36} 53,25 = + 34,375\end{aligned}$$

Dieses ist die unmittelbare Anwendung der Formeln (11) und (12), man wird sich aber bald gewöhnen, nach dem Anblick der Tabelle S. 238 kürzer so schreiben:

$$\begin{aligned}(a a) &= 31 - \frac{0}{2} 0 - \frac{1}{2} 19 - \frac{1}{3} 12 = + 17,500 \\ - (a b) &= \frac{0}{2} 12 + \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{3} 12 = + 4,000 \\ (b b) &= 24 - \frac{1}{2} 12 - \frac{0}{2} 0 - \frac{1}{3} 12 = + 14,000\end{aligned}$$

Das Fehlersummenglied wird nach (13) so berechnet:

$$(ll) = 496,43 - \frac{165,68}{2} - \frac{168,73}{2} - \frac{285,42}{3} = 234,09$$

Die Normalgleichungen sind also in abgekürzter Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned}+ 17,50 x' - 4,00 x'' - 26,25 &= 0 \\ + 14,00 x'' - 34,37 &= 0 \\ + 234,09 &\end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wenn man hier nach § 25. S. 82 einmal reduziert, so erhält man:

$$\begin{aligned}+ 13,086 x'' - 40,370 &= 0 \\ + 194,72 \\ \hline 70,18 &= [v v]\end{aligned}$$

$$\text{also } x'' = + \frac{40,370}{13,086} = + 2,205 \text{ und zugleich } [\beta \beta] = \frac{1}{13,086} = 0,0764$$

Kehrt man die Eliminationsordnung um, so bekommt man auch x' und $[\alpha \alpha]$.

Die Auflösung der Normalgleichungen (16) giebt also zunächst:

$$x' = + 2,205 \quad x'' = + 3,085 \quad (17)$$

$$[v v] = 70,2 \quad (18)$$

Fügt man diese x' und x'' von (18) zu den Näherungsannahmen für Gilge und Lattenwalde hinzu, welche oben in der Tabelle auf S. 238 angegeben sind, so hat man die auf der Station Nidden ausgeglichenen Winkel:

$$\left. \begin{aligned}\text{Kalleninken-Gilge} &= 26^\circ 14' 50'' + x' = 26^\circ 14' 52,205'' \\ \text{Kalleninken-Lattenwalde} &= 87^\circ 4' 50'' + x'' = 87^\circ 4' 53,085''\end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Wir brauchen auch noch die Gewichts-Coefficienten der Normalgleichungen (16) und können dazu irgend eines der Verfahren von § 28. oder § 33. benützen. Den

Station Nidden.

Quer-Summen [p_q]	Kalle- ninken l°	a Gilge l'	b Latten- walde l''	$l^\circ + l' + l''$ $= [l_q]$	l'^2	l''^2	$[l_q]^2$
	0° 0' 00"	26° 14' 50"	87° 4' 50"				
12	+ 0,00"		+ 5,00"	5,00		25,00	25,00
	0,00		5,75	5,75		33,06	33,06
	0,00		5,50	5,50		30,25	30,25
	0,00		7,00	7,00		49,00	49,00
	0,00		2,00	2,00		4,00	4,00
	0,00		2,75	2,75		7,56	7,56
	0,00		1,50	1,50		2,25	2,25
	0,00		2,50	2,50		6,25	6,25
	0,00		0,50	0,50		0,25	0,25
	0,00		1,75	1,75		3,06	3,06
	0,00		1,00	1,00		1,00	1,00
	0,00		2,00	2,00		4,00	4,00
[p_1] = 24	(12)	(0)	37,25 (12)	37,25		165,68	165,68
19	+ 0,00	+ 4,25		4,25	18,06		18,06
	0,00	3,00		3,00	9,00		9,00
	0,00	0,75		0,75	0,56		0,56
	0,00	3,50		3,50	12,25		12,25
	0,00	4,00		4,00	16,00		16,00
	0,00	2,50		2,50	6,25		6,25
	0,00	1,25		1,25	1,56		1,56
	0,00	4,50		4,50	20,25		20,25
	0,00	3,00		3,00	9,00		9,00
	0,00	6,00		6,00	36,00		36,00
	0,00	1,75		1,75	3,06		3,06
	0,00	2,75		2,75	7,56		7,56
	0,00	2,25		2,25	5,06		5,06
	0,00	0,00		0,00	0,00		0,00
	0,00	2,00		2,00	4,00		4,00
	0,00	1,75		1,75	3,06		3,06
	0,00	0,25		0,25	0,06		0,06
	0,00	1,00		1,00	1,00		1,00
	0,00	4,00		4,00	16,00		16,00
[p_2] = 38	(19)	48,50 (19)	(0)	48,50	168,73		168,73
12	0,00	+ 0,00	+ 2,75	2,75	0,00	7,56	7,56
	0,00	3,50	2,75	6,25	12,25	7,56	39,06
	0,00	1,25	3,00	4,25	1,56	9,00	18,06
	0,00	3,25	4,75	8,00	10,56	22,56	64,00
	0,00	2,25	3,75	6,00	5,06	14,06	36,00
	0,00	3,75	3,25	7,00	14,06	10,56	49,00
	0,00	- 0,25	1,25	1,00	0,06	1,56	1,00
	0,00	1,25	1,75	3,00	1,56	3,06	9,00
	0,00	2,25	1,00	3,25	5,06	1,00	10,56
	0,00	0,50	2,25	2,75	0,25	5,06	7,56
	0,00	1,00	4,75	5,75	1,00	22,56	33,06
	0,00	1,00	2,25	3,25	1,00	5,06	10,56
[p_3] = 36	(12)	19,75 (12)	33,50 (12)	53,25 s. o.	52,42 168,73	109,60 165,68	285,42
[p] = 98	[p°] = 43	[p'] = 31 [l'] = 68,25	[p''] = 24 [l''] = 70,75		496,43		

einen Wert $[\beta\beta] = 0,0764$ haben wir schon gelegentlich bei (16) gefunden. Um alle Gewichts-Coefficienten zusammen zu erhalten, verfährt man etwa nach (20) S. 90, d. h. man bildet aus unseren Normalgleichungen (16) die folgenden (voll ausgeschriebenen) Gewichtsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} + 17,50 [\alpha\alpha] - 4,00 [\alpha\beta] &= 1 \\ - 4,00 [\alpha\beta] + 14,00 [\beta\beta] &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} + 17,50 [\alpha\beta] - 4,00 [\beta\beta] &= 0 \\ - 4,00 [\alpha\beta] + 14,00 [\beta\beta] &= 1 \end{aligned} \quad (20)$$

daraus erhält man die Gewichts-Coefficienten

$$\left. \begin{aligned} [\alpha\alpha] &= + 0,0611 \\ [\alpha\beta] &= + 0,0175 \\ [\beta\beta] &= + 0,0764 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung wird nach (15) und (18):

$$m = \sqrt{\frac{70,2}{98 - 43 - 2}} = \sqrt{\frac{70,2}{53}} = \pm 1,15'' \quad (22)$$

Damit ist die Stationsausgleichung Nidden erledigt.

Die im Vorstehenden behandelte Stationsausgleichung ist zuerst von Bessel in der „Gradmessung in Ostpreussen“ 1838, S. 69–71 gelehrt worden, jedoch ohne die Berechnung des Fehlerquadratsummengliedes und des mittleren Fehlers nach den Formeln (13)–(15), welche erst später dazu gekommen sind.

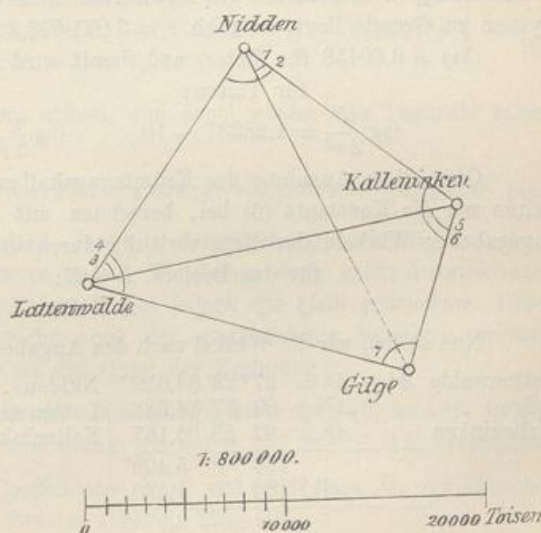
Bessel hat auf S. 70 der Gradmessung in Ostpreussen statt unserer l die Bezeichnungen m, m_1, m_2 u. s. w., und statt unserer z_1, z_2, z_3 die Zeichen x, x_1, x_2 u. s. w., ferner entsprechen unseren x', x'', x''' die Besselschen A, B, C . Unsere z_1, z_2, z_3 stehen in einer gewissen Beziehung zu derjenigen Grösse, welche auf S. 134 der Gradmessung in Ostpreussen von Bessel mit z bezeichnet ist, vgl. hierzu unseren späteren § 74.

Die Fehlerquadratsumme $[vv]$ haben wir hier nur aus der Elimination im Anschluss an (16) bestimmt, was sehr einfach geht, und z. B. bei der Landesaufnahme, in der Zeit dieser Methode, immer so gemacht wurde; man kann aber auch, was eine durchschlagende Probe giebt, ausserdem alle v einzeln ausrechnen, wozu die z nach (9) erforderlich sind. Die Einzelausrechnung und Quadrierung aller v findet man angewendet in dem Rheinischen Dreiecksnetz des geodätischen Instituts Heft III, 1882, vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1884“, S. 73.

§ 72. Dreiecksnetz-Ausgleichung nach Bessels Methode.

Wir schneiden aus dem Netz der Gradmessung in Ostpreussen das in Fig. 1. gezeichnete Viereck mit zwei Diagonalen heraus, und wählen von den Originalmessungen der Gradmessung in Ostpreussen diejenigen aus, welche sich auf dieses Viereck beziehen. (Die Messungen in Kalleninken sind mit einem schwächeren Instrument gemacht, als die Messungen auf Nidden, Lattenwalde und Gilge; da es sich aber hier nur um ein einfaches Rechenbeispiel handelt, so werden wir von diesem Unterschiede absehen, und alle Originalmessungen als gleichberechtigt in die Ausgleichung einführen.)

Fig. 1.
Viereck der Gradmessung in Ostpreussen.



Die Beobachtungen und die Ausgleichung für die Station Nidden haben wir bereits im vorigen § 71. behandelt; für die übrigen Stationen geben wir die Originalmessungen nicht mehr, sondern nur die Ergebnisse der Stationsausgleichungen; es sind dieses zuerst die ausgeglichenen Winkel und dann die Gewichts-Coefficienten:

Station Nidden.	Winkel.	Gewichts-Coefficienten.	
Kalleninken—Gilge . . . $A^1 = 26^\circ 14' 52,205''$		$[\alpha\alpha] = +0,0611$	$[\alpha\beta] = +0,0175$
Kalleninken—Lattenwalde $A^2 = 87 \quad 4 \quad 53,085$			$[\beta\beta] = +0,0764$

(1)

Station Lattenwalde.			
Nidden—Kalleninken . . . $A^3 = 45^\circ 25' 28,827''$		$[\alpha\alpha] = +0,1431$	$[\alpha\beta] = +0,0745$
Nidden—Gilge $A^4 = 72 \quad 48 \quad 53,486$			$[\beta\beta] = +0,0805$

(2)

Station Kalleninken.			
Gilge—Lattenwalde . . . $A^5 = 62^\circ 58' 36,167''$		$[\alpha\alpha] = +0,1667$	$[\alpha\beta] = +0,0833$
Gilge—Nidden $A^6 = 110 \quad 28 \quad 23,667$			$[\beta\beta] = +0,1667$

(3)

Station Gilge.			
Lattenwalde—Kalleninken $A^7 = 89^\circ 37' 54,583$		$[\alpha\alpha] = +0,3333$	

(4)

Die Anzahl der Bedingungs-gleichungen ist nach den allgemeinen Regeln von § 58. leicht anzugeben; man hat:

$W = 7$ Winkel,

$p = 4$ Punkte,

$l = 6$ Linien, darunter $l' = 1$ einseitig gemessene Linie, also nach (12)

§ 58. S. 174

$l - 2p + 3 = 1$ Seitengleichung,

$l - l' - p + 1 = 2$ Dreiecksgleichungen,

$W - 2p + 4 = 3$ Gleichungen im Ganzen.

Als Grundlinie wählen wir nach S. 168 der „Gradmessung in Ostpreussen“ die Seite:

$$\begin{aligned} \text{Nidden—Lattenwalde} &= 14\,047,7228 \text{ Toisen} = 27\,379,522 \text{ Meter} \\ (\log &= 4.147\,6059\cdot3) \quad (\log = 4.437\,4258\cdot6) \end{aligned} \quad (5)$$

Als Krümmungshalbmesser zur Excessberechnung nimmt Bessel auf S. 253 der Gradmessung in Ostpreussen den Äquatorhalbmesser der Erde, welcher dem metrischen System zu Grunde liegt, nämlich $r = 3\,271\,628,89$ Toisen = $6\,376\,522$ Meter.

($\log = 6.80458$ für Meter) und damit wird:

$$\begin{aligned} &\text{für Toisen:} && \text{für Meter:} \\ \log \frac{\rho''}{2r^2} &= 1.98387 - 10 && \log \frac{\rho''}{2r^2} = 1.40423 - 10 \end{aligned} \quad (6)$$

Ohne diese Annahme des Krümmungshalbmessers hier weiter zu erörtern, behalten wir die Konstante (6) bei, berechnen mit der Basis (5) und den bei (1)–(4) angegebenen Winkeln das Netz vorläufig durch und finden die sphärischen Excesse:

für das Dreieck $L G K$: $\varepsilon = 1,430''$

„ „ „ $L N K$: $\varepsilon = 1,835''$

Nun stellen wir die Winkel nach den Angaben (1)–(4) in Dreiecken zusammen:

Lattenwalde $A^4 - A^3 = 27^\circ 23' 34,659''$	Nidden . . . $A^2 = 87^\circ 4' 53,085''$	(7)
Gilge . . . $A^7 = 89 \quad 37 \quad 54,583$	Lattenwalde $A^3 = 45 \quad 25 \quad 23,827$	
Kalleninken $A^5 = 62 \quad 58 \quad 36,167$	Kalleninken $A^6 - A^5 = 47 \quad 29 \quad 47,500$	
180° 0' 5,409''	180° 0' 4,412''	
soll 180 0 1,430	soll 180 0 1,835	
$w = + 3,979''$	$w = + 2,577''$	

Indem wir die Winkelverbesserungen mit (1), (2), ... (7) bezeichnen, haben wir die (7) entsprechenden Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (4) - (3) + (7) + (5) + 3,979'' &= 0 \\ (2) + (3) + (6) - (5) + 2,577 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Zur Bildung der Seitengleichung kann man für G als Centralpunkt die Seite GK auf zweifache Art aus GL ableiten, dieses giebt:

$$\text{Es soll sein } \frac{\sin A^4 \sin A^5 \sin A^1}{\sin (A^2 - A^1) \sin A^6 \sin (A^4 - A^3)} = 1$$

was auf folgende logarithmische Rechnung führt:

			Diff. für 10''
$A^4 = 72^\circ 48' 58,486''$	$\log \sin A^4$	9.980 1680.4	+ 65
$A^5 = 62 \ 58 \ 36,167''$	$\log \sin A^5$	9.949 7909.0	+ 107
$A^1 = 26 \ 14 \ 52,205''$	$\log \sin A^1$	9.645 6725.3	+ 427
	Summe Z	9.575 6314.7	
$A^2 - A^1 = 60^\circ 50' \ 0,880''$	$\log \sin (A^2 - A^1)$	9.941 1176.2	+ 117
$A^6 = 110 \ 28 \ 23,667''$	$\log \sin A^6$	9.971 6634.1	- 78
$A^4 - A^3 = 27 \ 23 \ 34,659''$	$\log \sin (A^4 - A^3)$	9.662 8434.6	+ 406
	Summe N	9.575 6244.9	

$$\text{Summe } Z - \text{Summe } N = w = + 69.8.$$

Damit wird die Seitengleichung für Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:
 $+ 0,65 (4) + 1,07 (5) + 4,27 (1) - 1,17 (2 - 1) + 0,78 (6) - 4,06 (4 - 3) + 6,98 = 0$

Wenn man die Coefficienten mit den Cotangenten nach (26) § 57. S. 168 genauer berechnet, und auch das Absolutglied nach dem Legendreschen Satz kontrolliert (vgl. (10) § 59. S. 197), so wird vorstehende Gleichung mit mehr Decimalen:

$$\left. \begin{aligned} + 0,6511 (4) + 1,0739 (5) + 4,2698 (1) - 1,1751 (2 - 1) + 0,7861 (7) \\ - 4,0630 (4 - 3) + 7,0100 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wenn man nach den Nummern ordnet, und dabei wieder eine Decimale fallen lässt, bekommt man:

$$+ 5,445 (1) - 1,175 (2) + 4,063 (3) - 3,412 (4) + 1,074 (5) + 0,786 (6) + 7,010 = 0 \quad (10)$$

Nun ist alles so weit vorbereitet, dass die Ausgleichung nach der Formelanweisung von § 55. S. 156–160 beginnen kann. Wir haben diese ganze Ausgleichung in der Tabelle auf S. 244–245 vereinigt, wobei jedoch die *klein gedruckten Teile*, welche sich auf ein Funktions-Gewicht *nach* der Ausgleichung beziehen, vorerst ausser Betracht bleiben. Folgendes ist der Gang der Rechnung:

I. Man setzt die Coefficienten der Bedingungsgleichungen (9) und (8) in die Tabelle S. 244. Diese Coefficienten sind ebenso wie auf S. 157 mit ABC bezeichnet.

II. Man setzt die Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$ und $[\alpha\beta]$ u. s. w. von (1)–(4) S. 240 ebenfalls tabellarisch auf S. 244 ein (vgl. S. 158).

III. Die Übertragungs-Coefficienten \mathfrak{A} \mathfrak{B} u. s. w. werden nach den Formeln von S. 158 berechnet, z. B.:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= A_1 [\alpha \alpha] + A_2 [\alpha \beta] + A_3 [\alpha \gamma] + \dots \\ &= 5,445 \times 0,0611 - 1,175 \times 0,0175 \\ &= 0,3327 - 0,0206 = + 0,3121.\end{aligned}$$

IV. Ausrechnung der Normalgleichungs-Coefficienten $[I I]$ u. s. w. nach S. 158, z. B.:

$$\begin{aligned}[I I] &= [A \mathfrak{A}] = + 5,445 \times 0,3121 \\ &\quad - 1,175 \times 0,0053 \\ &\quad + \dots \dots \dots \text{zusammen} = + 3,3628. \\ [I II] &= [A \mathfrak{B}] \text{ oder } = [\mathfrak{A} B], \text{ mit Probe} = - 0,0544 \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

So erhält man die Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left. \begin{aligned}+ 3,3628 k_1 - 0,0544 k_2 + 0,3084 k_3 + 7,010 &= 0 \\ + 0,5745 k_2 - 0,1519 k_3 + 3,979 &= 0 \\ + 0,3861 k_3 + 2,577 &= 0\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Auflösung, welche bei IV. S. 245 in zwei Reduktionen angedeutet ist, giebt die Korrelaten:

$$\text{V.} \quad k_1 = -1,384 \quad k_2 = -9,520 \quad k_3 = -9,313 \quad (12)$$

und nebenbei auch die Fehlerquadratsumme des Netzes:

$$\text{V.} \quad [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] = 71,5863 \quad (13)$$

Die Korrelaten k setzt man auf S. 244 nach III. hinauf und hat dann die Winkelkorrekturen nach S. 159 unmittelbar, z. B.:

$$\begin{aligned}\text{VI.} \quad (1) &= \mathfrak{A}_1 k_1 + \mathfrak{B}_1 k_2 + \mathfrak{C}_1 k_3 \\ (1) &= -0,3121 \times 1,384 \dots - 0,0175 \times 9,313 \\ (1) &= -0,4319 - 0,1630 = -0,5949''\end{aligned} \quad (14)$$

Zur Probe kann man auch die Hilfsgrößen $[1]$ $[2]$ u. s. w. benützen, z. B. nach S. 159:

$$\text{VII.} \quad [1] = A_1 k_1 + B_1 k_2 + \dots = 5,445 (-1,384) = -7,5358$$

Diese $[1]$ $[2]$ u. s. w. sind auf S. 244 als VII. oben unter I. beigesetzt.

Hat man sie alle berechnet, so hat man nach den Gewichtsgleichungen von S. 159:

$$\begin{aligned}(1) &= [1] [\alpha \alpha] + [2] [\alpha \beta] + \dots \\ &= -7,536 + 0,0611 - 7,687 + 0,0175 \\ (1) &= -0,4604 - 0,1345 = -0,5949\end{aligned} \quad (15)$$

übereinstimmend mit (14). Alle diese Winkelverbesserungen sind unter der Bezeichnung (a) in dem am Schluss S. 343 angegebenen Abrisse enthalten.

Wenn alle diese Winkelkorrekturen (1) (2) ... (7) so kontrolliert sind, so fügt

man sie zu den ursprünglich gegebenen Winkeln hinzu, und hat dann folgende ausgeglichene Winkel:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Nidden} & \left. \begin{array}{l} A^1 + (1) = 26^\circ 14' 51,610'' \\ A^2 + (2) = 87 \quad 4 \quad 52,366 \end{array} \right\} & \\
 \text{Kalleninken} & \left. \begin{array}{l} A^3 + (3) = 45^\circ 25' 22,694'' \\ A^4 + (4) = 72 \quad 48 \quad 57,696 \end{array} \right\} & (16) \\
 \text{Lattenwalde} & \left. \begin{array}{l} A^5 + (5) = 62^\circ 58' 35,018'' \\ A^6 + (6) = 110 \quad 28' 21,792 \end{array} \right\} & \\
 \text{Gilge} & A^7 + (7) = 89^\circ 37' 51,410'' &
 \end{array}$$

Damit lässt sich das Netz ohne Widerspruch berechnen, und zwar giebt die sphärische Dreiecksberechnung mit 7 stelligen Logarithmen unter Zugrundlegung der schon oben bei (5) angegebenen Basisseite LN die Seitenlogarithmen, welche in dem nachfolgenden Abriss enthalten sind. Dabei sind auch die in (16) bereits mitgeteilten ausgeglichenen Winkel nochmals in Form von Richtungen vorgeführt.

Abriss der Netzausgleichung zu Fig. 1. S. 239 nach Bessels Methode.

Zielpunkt	Stations- Ausgleichung A	Netzver- besserung (a)	Netz- Ausgleichung $A + (a)$	$\log S$
<i>1. Station Nidden</i>				
Kalleninken	$0^\circ 0' 0,000''$		$0^\circ 0' 0,000''$	4.132 6080.0
Gilge A^1	26 14 52,205	— 0,595''	26 14 51,610	4.268 2865.1
Lattenwalde A^2	87 4 53,085	— 0,719	87 4 52,366	4.147 6059.3
<i>2. Station Lattenwalde</i>				
Nidden	$0^\circ 0' 0,000''$		$0^\circ 0' 0,000''$	4.147 6059.3
Kalleninken A^3	45 25 23,827	— 1,133''	45 25 22,694	4.279 4379.2
Gilge A^4	72 48 58,486	— 0,790	72 48 57,696	4.229 2360.8
<i>3. Station Kalleninken</i>				
Gilge	$0^\circ 0' 0,000''$		$0^\circ 0' 0,000''$	3.942 2898.3
Lattenwalde A^5	62 58 36,167	— 1,149''	62 58 35,018	4.279 4379.2
Nidden A^6	110 28 23,667	— 1,875	110 28 21,792	4.132 6080.0
<i>4. Station Gilge</i>				
Lattenwalde	$0^\circ 0' 0,000''$		$0^\circ 0' 0,000''$	4.229 2360.8
Kalleninken A^7	89 37 54,583	— 3,173''	89 37 51,410	3.942 2898.3

Bedingungsgleichungen.							
Berechnungs- Ordnung.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
I.	A	+ 5,445	- 1,175	+ 4,063	- 3,412	+ 1,074	+ 0,786
	B			- 1,000	+ 1,000	+ 1,000	+ 1,000
	C		+ 1,000	+ 1,000	- 1,000	+ 1,000	+ 1,000
	f		+ 0,107	- 4,063	+ 4,063	+ 1,929	- 1,929
VII.	[1] = - 7,536 [2] = - 7,687 [3] = - 5,416 [4] = - 4,798 [5] = - 1,693 [6] = - 10,401 [7] = - 9,520						
Gewichts-Coefficienten $[\alpha \alpha]$, $[\alpha \beta]$... oder numeriert [1.1], [1.2] ...							
II.	1	2	3	4	5	6	7
	(1)	+ 0,0611	+ 0,0175				
	(2)	+ 0,0175	+ 0,0764				
	(3)			+ 0,1431	+ 0,0745		
	(4)			+ 0,0745	+ 0,0805		
	(5)				+ 0,1667	+ 0,0833	
	(6)				+ 0,0833	+ 0,1667	+ 0,3333
Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} \dots$							
III.	\mathfrak{A}	+ 0,3121	+ 0,0053	+ 0,3270	+ 0,0282	+ 0,2445	+ 0,2205
	\mathfrak{B}			- 0,0686	+ 0,0060	+ 0,1667	+ 0,0833
	\mathfrak{C}	+ 0,0175	+ 0,0764	+ 0,1431	+ 0,0745	- 0,0833	+ 0,0833
	η	+ 0,0019	+ 0,0082	- 0,2787	+ 0,0244	+ 0,1609	- 0,1609
VI.	(.)	- 0,595	- 0,719	- 1,133	- 0,790	- 1,149	- 1,875
		= (1)	= (2)	= (3)	= (4)	= (5)	= (6)
							- 3,173 = (7)
							Correlaten s. unten V.
							$k_1 = - 1,384$ $k_2 = - 9,520$ $k_3 = - 9,313$

Normalgleichungen.							
	k_1	k_2	k_3	w	k_1	k_2	k_3
IV.	+ 3,3628	- 0,0544	+ 0,3084	+ 7,0100	+ 3,363	- 0,054	+ 0,308
		+ 0,5745	- 0,1519	+ 3,9790		+ 0,574	- 0,152
			+ 0,3861	+ 2,5770			+ 0,386
				+ 0,0000			
		+ 0,5736	- 0,1469	+ 4,0924		+ 0,574	- 0,147
			+ 0,3578	+ 1,9341			+ 0,358
				- 14,6130			
				+ 2,9822			+ 0,320
				- 43,8110			
V.	- 1,384	- 9,520	- 9,313	- 71,5863			
	= k_1	= k_2	= k_3	= - [33 3]			
							+ 0,677
							= $\frac{1}{P}$

§ 73. Genauigkeitsbestimmung für die Besselsche Dreiecksnetz-Ausgleichung.

Das im vorhergehenden § 72. behandelte Vierecksbeispiel zeigt unmittelbar die Besselsche Methode, welche zuerst bei der Gradmessung in Ostpreussen 1834 zur Anwendung kam, und auch bei den darauf folgenden Preussischen Triangulierungen beibehalten wurde. Bessel hat seine Methode ohne Genauigkeitsuntersuchungen abgeschlossen; und erst in den Arbeiten der Landesaufnahme seit 1870 haben wir die naturgemässe Weiterentwicklung der Besselschen Methode auch in Hinsicht auf die Genauigkeitsuntersuchungen, welche wir nun an unserem Vierecksbeispiel behandeln:

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird für jede Station durch die Stationsausgleichung geliefert, wie für Nidden in (21) § 71. S. 239 angegeben wurde.

Für alle 4 Stationen wurde so erhalten:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Nidden} & m = \sqrt{\frac{70,2}{53}} = \pm 1,15 \\ \text{Lattenwalde} & m = \sqrt{\frac{68,6}{48}} = \pm 1,20 \\ \text{Kalleninken} & m = \sqrt{\frac{183,3}{22}} = \pm 2,89 \\ \text{Gilge} & m = \sqrt{\frac{12,6}{5}} = \pm 1,59 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Diese Bestimmungen entsprechen der ersten Formel m_1 oder μ_1 S. 157. Alle 4 Stationen zusammen geben nach der zweiten Formel m_1 oder μ_1 S. 157:

$$m_1 = \sqrt{\frac{70,2 + 68,6 + 183,3 + 12,6}{53 + 48 + 22 + 5}} = \sqrt{\frac{334,7}{128}} = \pm 1,62'' \quad (2)$$

Übergehend zu der Fehlerquadratsumme, welche in der Netzausgleichung zu Tage tritt (bei der Landesaufnahme mit $[v v]$ bezeichnet), haben wir nach S. 159, unten, 3 Formeln, welche wir mit dem Material der Tabelle S. 244—245 alle ausrechnen:

$$1) [v'' v''] = [v v] = (1) [1] + (2) [2] + (3) [3] + \dots$$

	(.)	[.]	(.) [.]
1.	— 0,595	— 7,536	+ 4,484
2.	— 0,719	— 7,687	+ 5,527
3.	— 1,133	— 5,416	+ 6,136
4.	— 0,790	— 4,798	+ 3,790
5.	— 1,149	— 1,693	+ 1,945
6.	— 1,875	— 10,401	+ 19,502
7.	— 3,173	— 9,520	+ 30,207

$$71,591 = [v v] \quad (3)$$

$$2) [v'' v''] = [v v] = - [w k]$$

$w_1 = + 7,010$	$k_1 = - 1,384$	$- w_1 k_1 = + 9,702$
$w_2 = + 3,979$	$k_2 = - 9,520$	$- w_2 k_2 = + 37,880$
$w_3 = + 2,577$	$k_3 = - 9,313$	$- w_3 k_3 = + 24,000$

$$- [w k] = 71,582 = [v v] \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
3) \quad [v'' v''] &= [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] = \frac{w_1^2}{[\text{I I}]} + \frac{[w_2 \cdot 1]^2}{[\text{II II} \cdot 1]} + \frac{[w_3 \cdot 2]^2}{[\text{III III} \cdot 2]} \\
&= \frac{7,0100^2}{3,3628} + \frac{4,0924^2}{0,5736} + \frac{2,9822^2}{0,3202} \\
&= 14,613 + 29,198 + 27,775 = 71,586 = [\mathfrak{B} \mathfrak{B}] \quad (5)
\end{aligned}$$

Dasselbe Resultat (5) steht übrigens auch schon unten auf S. 245, wo es schematisch gelegentlich mitberechnet worden ist.

Wir haben also nun in hinreichender Übereinstimmung aus (3) (4) und (5):

$$[\mathfrak{B} \mathfrak{B}] = 71,58.$$

Da die Anzahl der Netzbedingungsgleichungen $r = 3$ ist, so erhält man den mittleren Richtungsfehler aus der Netzausgleichung nach der Formel m_2 unten auf S. 159:

$$m_2 = \sqrt{\frac{71,58}{3}} = \pm 4,88'' \quad (6)$$

Obgleich unser Beispiel in Bezug auf die Gewichtsbestimmung auf Kalleninken ein fingiertes ist (wie schon zu Anfang von § 72. S. 239 bemerkt wurde), so wird doch die allgemeine Erfahrung auch hier bestätigt, dass die Netzausgleichung einen grösseren mittleren Fehler m_2 ergibt, als die Stationsausgleichungen $m_1 = +1,62''$ nach (2).

Aus den Stationen und aus dem Netz zusammen hat man nun nach der Formel für m oben auf S. 160:

$$m = \sqrt{\frac{334,7 + 71,6}{128 + 3}} = \sqrt{\frac{406,5}{131}} = \pm 1,76'' \quad (7)$$

Da in dieser allgemeinen Formel (7) die Stationsausgleichungen, wie immer, bedeutend überwiegen, so ist (7) nicht erheblich verschieden von (2).

Um auch eine Anwendung der Theorie der Funktionsgewichte zu haben, bestimmen wir noch das Gewicht der Seite GK als Funktion der als fehlerfrei angenommenen Basis LN und der ausgeglichenen Viereckswinkel, d. h. es handelt sich um die Funktion:

$$GK = LN \frac{\sin A^2 \sin (A^4 - A^3)}{\sin (A^6 - A^5) \sin A^7}$$

oder für die Rechnung bequemer, um die logarithmische Funktion:

$$F = \log \sin A^2 + \log \sin (A^4 - A^3) - \log \sin (A^6 - A^5) - \log \sin A^7 \quad (8)$$

wobei unter $A^1 A^2 \dots$ die ausgeglichenen Winkel verstanden sind. Die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion werden in gleicher Weise berechnet, wie die Coefficienten $A_1 A_2 \dots$ der Seitenbedingungsgleichung (9) oder (10) § 72. S. 241. Die Resultate sind für Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:

$$\begin{aligned}
f_1 &= 0, \quad f_2 = +0,107, \quad f_3 = -4,063, \quad f_4 = +4,063, \quad f_5 = +1,929 \\
f_6 &= -1,929, \quad f_7 = -0,013
\end{aligned}$$

Diese f fügt man der Tabelle S. 244 in der Abteilung I. bei (kleingedruckt).

Dann folgt die Berechnung der q nach den Formeln von S. 160. Diese q schliessen sich auf S. 244 unmittelbar den $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ an. Man hat:

	q	f	$f q$
$q_1 =$	$0,107 \times 0,0175 = + 0,0019$		
$q_2 =$	$0,107 \times 0,0764 = + 0,0082$	$+ 0,107$	$+ 0,0009$
$q_3 = - 4,063 \times 0,1431 + 4,063 \times 0,0745 = - 0,2787$		$- 4,063$	$+ 1,1324$
$q_4 = - 4,063 \times 0,0745 + 4,063 \times 0,0805 = + 0,0244$		$+ 4,063$	$+ 0,0991$
$q_5 = 1,929 \times 0,1667 - 1,929 \times 0,0833 = + 0,1609$		$+ 1,929$	$+ 0,3104$
$q_6 = 1,929 \times 0,0833 - 1,929 \times 0,1667 = - 0,1609$		$- 1,929$	$+ 0,3104$
$q_7 = - 0,013 \times 0,3333 = - 0,0043$		$- 0,013$	$+ 0,0000$
			$1,8532$ (10)
			$= [f q]$

Hier haben wir die Berechnung der Produkt-Summe $[f q]$ sogleich an die Berechnung der q angeschlossen.

Es folgt die Berechnung der Ersatzglieder nach den Doppelformeln von S. 160:

	A	q	$A q$	\mathfrak{A}	f	$\mathfrak{A} f$
1.	$+ 5,445$	$+ 0,0019$	$+ 0,0103$	$+ 0,3121$		$0,0000$
2.	$- 1,175$	$+ 0,0082$	$- 0,0096$	$+ 0,0053$	$+ 0,107$	$+ 0,0006$
3.	$+ 4,063$	$- 0,2787$	$- 1,1324$	$+ 0,3270$	$- 4,063$	$- 1,3286$
4.	$- 3,412$	$+ 0,0244$	$- 0,0833$	$+ 0,0282$	$+ 4,063$	$+ 0,1146$
5.	$+ 1,074$	$+ 0,1609$	$+ 0,1720$	$+ 0,2445$	$+ 1,929$	$+ 0,4716$
6.	$+ 0,786$	$- 0,1609$	$- 0,1260$	$+ 0,2205$	$- 1,929$	$- 0,4253$
7.		$- 0,0043$	$0,0000$		$- 0,013$	$0,0000$
			$- 1,1690$			$- 1,1671$
			$= [A q]$			$= [\mathfrak{A} f]$

Die übrigen Ersatzglieder werden ebenso berechnet; alle 3 Ersatzglieder sind $- 1,168 + 0,459 - 0,592$. Diese werden nebst dem schon bei (10) angegebenen $[f q] = 1,853$ in der Tabelle S. 245 rechts (im Kleingedruckten) beigesetzt, worauf die Elimination ganz von selbst auf den Wert führt:

$$\frac{1}{P} = 0,677$$

Dieses entspricht der Formel für $\frac{1}{P}$ unten auf S. 160, es kann auch ausführlicher so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} &= 1,853 - \frac{1,168^2}{2,363} - \frac{0,440^2}{0,573} - \frac{0,372^2}{0,320} \\ &= 1,853 - 0,400 - 0,338 - 0,432 = 0,677 \end{aligned}$$

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler ist bereits in (7) berechnet, $m = 1,76''$, also nun nach der Schlussformel von S. 130:

$$M = m \sqrt{\frac{1}{P}} = 1,76 \sqrt{0,677} = 1,448$$

Dieses ist ein mittlerer Fehler in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale, es ist also nach der Ausgleichung:

$$\log G K = 3.942\,2898.4 \pm 14.5$$

§ 74. Die Besselsche Nullpunkts-Korrektion z .

Die Besselsche Methode rechnet durchaus mit *Winkeln*, und nicht mit *Richtungen*; auf jeder Station mit s Strahlen werden $s - 1$ Winkel als unabhängige Unbekannte eingeführt (während die Zahl der Richtungen $= s$ wäre). Es sind daher die Grössen $\alpha' \alpha'' \alpha'''$ auf den Stationen Winkelkorrekturen, und ebenso sind auch die (1) (2) (3) ... Winkelkorrekturen im Netz.

Wir wollen für die Station Nidden unseres Vierecks von § 72. die allmähliche Verbesserung nach § 71. und § 72. zusammenstellen:

Station Nidden:

Zielpunkt:	erste Annahme S. 238:	Stations-Ausgleichung S. 237:		
Kalleninken	0° 0' 0''		0° 0' 0,000''	
Gilge	26 14 50	$\alpha' = + 2,205''$	26 14 52,205	
Lattenwalde	87 4 50	$\alpha'' = + 3,085$	87 4 53,085	
Zielpunkt:	Stations-Ausgleichung S. 243:	Netz-Ausgleichung S. 243 und S. 243:		Anschnitts- zahlen:
Kalleninken	0° 0' 0,000''		0° 0' 0,000''	$[p^0] = 43$
Gilge	26 14 52,205	(1) $= - 0,595$	26 14 51,610	$[p'] = 31$
Lattenwalde	87 4 53,085	(2) $= - 0,719$	87 4 52,366	$[p''] = 24$
				$[p] = 98$

Wir haben hier sogleich die Anschnittszahlen nach der Stations-Tabelle § 71. S. 238 hinzugesetzt, weil hierauf sich eine passende Verteilung der Netzverbesserungen (1) und (2) auf alle *drei* Strahlen gründen lässt, man rechnet nämlich nach Bessel:

$$-z = \frac{[p^0] 0 + [p'] (1) + [p''] (2)}{[p^0] + [p'] + [p'']} = \frac{[p'] (1) + [p''] (2) + \dots}{[p]} \quad (1)$$

$$-z = \frac{31(-0,595) + 24(-0,719)}{98} = \frac{-35,701}{98} = -0,364$$

Diese Änderung bringt man an allen Winkeln und an dem Nullwert des Anfangsstrahls an, und reduziert damit die Winkel auf Richtungen:

Zielpunkt:	Stations-Ausgleichung:	Netz-Ausgleichung:	
Kalleninken	0° 0' 0,000''	- 0,364	359° 59' 59,636''
Gilge	26 14 52,205	- 0,595 - 0,364 = - 0,959	26 14 51,246
Lattenwalde	87 4 53,085	- 0,719 - 0,364 = - 1,083	87 4 52,002

Sachlich hat man offenbar gar nichts geändert, denn die *Differenzen* der Richtungen, auf welche es allein ankommt, sind dieselben geblieben. Deswegen ist auch diese von Bessel bei der Gradmessung in Ostpreussen eingeführte Richtungs-Reduktion später (z. B. bei der Landesaufnahme) als überflüssig wieder fallen gelassen worden, zumal die Formel (1) für z , im allgemeinen gar nicht streng begründet werden, sondern nur als Hilfsmittel zu einer passenden Verteilung der (1) (2) (3) ... auf alle Strahlen, empfohlen werden kann.

Um dieses näher zu untersuchen, betrachten wir die Nullpunktverbesserungen in den einzelnen Sätzen, nämlich nach (9) § 71. S. 235:

$$\left. \begin{aligned} -z_1 &= \frac{p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x''' - [l_1]}{[p_1]} \\ -z_2 &= \frac{p_2' x' + p_2'' x'' + p_2''' x''' - [l_2]}{[p_2]} \\ -z_3 &= \frac{p_3' x' + p_3'' x'' + p_3''' x''' - [l_3]}{[p_3]} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wenn man den $z_1 z_2 z_3$ bzw. die Gewichte $[p_1] [p_2] [p_3]$ zuteilt, und dem entsprechend den Mittelwert (z) bildet, so erhält man:

$$\text{Mittelwert } -(z) = \frac{[p_1] z_1 + [p_2] z_2 + [p_3] z_3}{[p_1] + [p_2] + [p_3]} \quad (3)$$

und mit Einsetzung der Werte $z_1 z_2 z_3$ aus der Gleichungsgruppe (2):

$$-(z) = \frac{[p'] x' + [p''] x'' + [p'''] x''' - [l]}{[p]} \quad (4)$$

Wir haben früher in § 71. diesen Mittelwert (z) nicht bestimmt, weil weder dieser, noch auch die Einzelwerte $z_1 z_2 z_3 \dots$ für die Netzausgleichung gebraucht wurden, jedoch kann man nun zusehen, was aus (z) wird, wenn man in (4), statt der Werte $x' x'' x'''$, welche die Stationsausgleichungen geliefert haben, die entsprechenden Werte der Netzausgleichung einsetzt. Infolge der Netzausgleichung gehen die $x' x'' x'''$ über in $x' + (1)$, $x'' + (2)$, $x''' + (3)$, und (z) soll übergehen in $(z) + z$, d. h. man erhält aus (4) folgendes:

$$-((z) + z) = \frac{[p'] (x' + (1)) + [p''] (x'' + (2)) + [p'''] (x''' + (3)) - [l]}{[p]} \quad (5)$$

Vergleicht man dieses wieder mit (4), so folgt:

$$-z = \frac{[p'] (1) + [p''] (2) + [p'''] (3)}{[p]} \quad (6)$$

Dieses ist die zu Anfang angegebene Besselsche Formel (1).

Das Besselsche z ist also die Änderung, welche das arithmetische Mittel (z) der einzelnen Satz-Nullpunkts-Verbesserungen $z_1 z_2 z_3$, oder das Mittel der Stationswinkel-Verbesserungen $x' x'' x'''$, durch Zuziehung der Netz-Verbesserungen (1) (2) (3) ... erfährt.

Eine bestimmte in der Gesamtausgleichung liegende Veranlassung, diese Mittel zu bilden, liegt aber nicht vor, die Besselsche Ausgleichung verzichtet von vornherein auf symmetrische Fehlerverteilung, weil auf jeder Station ein Strahl als Anfangsstrahl bevorzugt wird, und diesem Umstand kann nachträglich durch Berechnung des willkürlichen z nicht mehr abgeholfen werden.

Es giebt nur wenige Fälle, in welchen die Berechnung des Besselschen z als passende Näherung einem Bedürfnis entspricht, wenn es nämlich sich darum handelt, die Fehlerverteilung in Hinsicht auf etwaige unbekannte Fehlerquellen zu untersuchen; in diesem Falle muss man jedem Strahl einen Fehler zuteilen, und kann nicht auf jeder Station einen Strahl als Anfangsstrahl korrektionslos lassen.

Man vergleiche hiezu eine Erörterung von Helmert in der Vierteljahrsschrift der astron. Gesellschaft 1877, S. 206–208, und von Schreiber in der Zeitschr. f. Verm. 1879, S. 103.

§ 75. Theorie der vollen Richtungssätze.

Die Berechnung voller Richtungssätze haben wir bereits in § 68. behandelt; es zeigte sich, dass diese Berechnung an sich lediglich in der Mittelbildung aus den einzelnen Ablesungen besteht, und es hat sich auch daran die Berechnung eines mittleren Richtungsfehlers leicht angeschlossen. Indessen konnten wir die Begründung für jene Fehlerberechnung in § 68. noch nicht streng geben, und da auch sonst noch manches hiezu zu sagen ist, behandeln wir die vollen Richtungssätze hier nochmals, indem wir dieselben als besonderen Fall der allgemeinen Richtungsausgleichung von § 70. auffassen.

Wenn wir bei s Sichten oder Zielpunkten in jedem Satze eine Anzahl von n vollen Sätzen haben, so geben die Formeln (7) § 71. S. 234:

$$\text{die Satzgewichte} \quad [p^0] = [p'] = [p''] = [p'''] \dots = n \quad (1)$$

$$\text{und bei } s \text{ Zielpunkten} \quad [p_1] = [p_2] = [p_3] \dots = s \quad (2)$$

Damit werden die Normalgleichungs-Coefficienten nach (11) und (12) § 71. S. 236:

$$\left. \begin{aligned} (a a) &= n - \frac{n}{s} & - (a b) &= -\frac{n}{s} & - (a c) &= -\frac{n}{s} & - (a l) &= [l'] - \frac{[l]}{s} \\ & & (b b) &= n - \frac{n}{s} & - (b c) &= -\frac{n}{s} & - (b l) &= [l''] - \frac{[l]}{s} \\ & & & & (c c) &= n - \frac{n}{s} & - (c l) &= [l'''] - \frac{[l]}{s} \\ & & & & & & (l l) &= [l l] - \frac{[l]^2}{s} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die voll geschriebenen Normalgleichungen sind daher:

$$\text{Anzahl} \quad \left\{ \begin{aligned} \left(n - \frac{n}{s} \right) x' &- \frac{n}{s} x'' &- \frac{n}{s} x''' &- \left([l'] - \frac{[l]}{s} \right) &= 0 \\ - \frac{n}{s} x' &+ \left(n - \frac{n}{s} \right) x'' &- \frac{n}{s} x''' &- \left([l''] - \frac{[l]}{s} \right) &= 0 \\ - \frac{n}{s} x' &- \left(\frac{n}{s} \right) x'' &+ \left(n - \frac{n}{s} \right) x''' &- \left([l'''] - \frac{[l]}{s} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Zum Zweck der Auflösung nach x' x'' x''' werden alle diese Gleichungen addiert und geben:

$$\frac{n}{s} x' + \frac{n}{s} x'' + \frac{n}{s} x''' - \frac{[l]}{s} = 0 \quad (5)$$

Vergleicht man diese Summengleichung (5) mit den einzelnen Gleichungen (4) so erhält man die Auflösungen:

$$x' = \frac{[l']}{n} \quad x'' = \frac{[l'']}{n} \quad x''' = \frac{[l''']}{n} \quad (6)$$

d. h. ein einfaches Resultat, welches mit der Mittelbildung in § 68. übereinstimmt.

Das mittlere Fehlerquadrat einer Richtung wird nach (15) § 71. S. 236, weil die Anzahl aller gemessenen Richtungen $R = ns$ ist:

$$m^2 = \frac{[v v]}{R - n - (s - 1)} = \frac{[v v]}{ns - n - (s - 1)} = \frac{[v v]}{(n - 1)(s - 1)} \quad (7)$$

Um die Summe $[v v]$ zu bestimmen, muss man die einzelnen v ausrechnen und quadrieren, was hier wohl der einzige zweckmässige Weg ist, (vgl. die kleingedruckte Anmerkung am Schlusse von § 71. S. 239) und zwar wollen wir nun zeigen, dass

das schon in § 68. fast ohne Theorie gefundene Verfahren den Formeln von § 71. entspricht.

Wir wollen dazu der Zahlenrechnung von § 68. mit unseren Formeln folgen, jedoch zuvor bemerken, dass in § 68. und § 71. die Zahlentabellen in Bezug auf Spalten und Linien verschieden angeordnet sind, indem in § 68. die Sätze in Vertikalspalten und in § 71. die Sätze in Horizontallinien stehen. Nachfolgendes entspricht § 68. S. 225:

Zielpunkt	Satz ₁	Satz ₂	Satz ₃	Richtungsmittel
P°	l_1°	l_2°	l_3°	$\frac{[l^{\circ}]}{n} = 0$
P'	l_1'	l_2'	l_3'	$\frac{[l']}{n} = x'$
P''	l_1''	l_2''	l_3''	$\frac{[l'']}{n} = x''$
..
Satzmittel	$\frac{[l_1]}{[p_1]}$	$\frac{[l_2]}{[p_2]}$	$\frac{[l_3]}{[p_3]}$	$\frac{x' + x'' + \dots}{[p_1]} = \frac{x' + x'' + \dots}{[p_2]} = \dots$
Satzverschiebung	$\frac{[l_1]}{[p_1]} - \frac{x' + x''}{[p_1]}$	$\frac{[l_2]}{[p_2]} - \frac{x' + x''}{[p_2]}$	$\frac{[l_3]}{[p_3]} - \frac{x' + x''}{[p_3]}$	$z_1 + z_2 + z_3 + \dots = 0$
Verschobene Sätze	$l_1^{\circ} - z_1$ $l_1' - z_1$ $l_1'' - z_1$	$l_2^{\circ} - z_2$ $l_2' - z_2$ $l_2'' - z_2$	$l_3^{\circ} - z_3$ $l_3' - z_3$ $l_3'' - z_3$	0 x' x'' ..
Satzmittel	$\frac{[l_1]}{[p_1]} - z_1$	$\frac{[l_2]}{[p_2]} - z_2$	$\frac{[l_3]}{[p_3]} - z_3$	
Übrig bleibende Fehler v	$v_1^{\circ} = 0 - (l_1^{\circ} - z_1)$ $v_1' = x' - (l_1' - z_1)$ $v_1'' = x'' - (l_1'' - z_1)$	$v_2^{\circ} = 0 - (l_2^{\circ} - z_2)$ $v_2' = x' - (l_2' - z_2)$ $v_2'' = x'' - (l_2'' - z_2)$	$v_3^{\circ} = 0 - (l_3^{\circ} - z_3)$ $v_3' = x' - (l_3' - z_3)$ $v_3'' = x'' - (l_3'' - z_3)$	

Diese v sind übereinstimmend mit den v in (4) § 71. S. 234 (nur sind jene in § 71. nach Spalten und Linien umgekehrt geordnet im Vergleich mit diesen); damit ist die in § 68. gelehrt Berechnung der v und der $[v]$ und dann die Berechnung des mittleren Fehlers theoretisch begründet.

Gewichtsberechnung für volle Sätze.

Die Gewichts-Coefficienten $[\alpha \alpha]$, $[\alpha \beta]$... zu den Normalgleichungen (4) bekommt man nach (20) § 28. S. 90 dadurch, dass man die Absolutglieder der Normalgleichungen durch $-1, 0, 0$... ersetzt, d. h. man bekommt aus (4) folgende Gewichtsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = s-1 \left\{ \begin{array}{l} \left(n - \frac{n}{s} \right) [\alpha \alpha] - \frac{n}{s} [\alpha \beta] - \left(\frac{n}{s} \right) [\alpha \gamma] - \dots = 1 \\ - \frac{n}{s} [\alpha \alpha] + \left(n - \frac{n}{s} \right) [\alpha \beta] - \frac{n}{s} [\alpha \gamma] - \dots = 0 \\ - \frac{n}{s} [\alpha \alpha] - \frac{n}{s} [\alpha \beta] + \left(n - \frac{n}{s} \right) [\alpha \gamma] - \dots = 0 \\ \vdots \end{array} \right. \quad (8)$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, bildet man zuerst ihre Summe:

$$\frac{n}{s} [\alpha \alpha] + \frac{n}{s} [\alpha \beta] + \frac{n}{s} [\alpha \gamma] + \dots = 1$$

Diese Summengleichung zu jeder einzelnen Gleichung der Gruppe (8) hinzugefügt giebt:

$$\begin{array}{lll} n[\alpha\alpha] & \dots\dots & = 2 \\ & n[\alpha\beta] & \dots\dots = 1 \\ & & n[\alpha\gamma] & \dots\dots = 1 \end{array}$$

und da ähnliche Beziehungen auch für $[\beta \beta]$ u. s. w. gelten, haben wir nun:

$$[\alpha \alpha] = [\beta \beta] = [\gamma \gamma] = \dots = \frac{2}{n} \quad (9)$$

$$[\alpha \beta] = [\alpha \gamma] = \dots [\beta \gamma] = \dots = \frac{1}{n} \quad (10)$$

Die $[\alpha \alpha]$, $[\beta \beta]$, $[\gamma \gamma]$... sind die Gewichtsreciproken der Winkel x' , x'' , x''' ... welche der zweite, dritte ... Strahl, P' , P'' , P''' ... mit dem ersten Strahl P° bilden (vgl. Fig. 1. S. 232) und für den Winkel $P' P''$, welcher $= x'' - x'$ ist, erhält man die Gewichts-Reciproke nach der Theorie von § 29.

(mit $f_1 = -1$, $f_2 = +1$, $f_3 = 0$ in (3) S. 92):

$$\frac{1}{P(x'x'')} = [\alpha\alpha] - 2[\alpha\beta] + [\beta\beta] = \frac{2}{n} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \quad (11)$$

Dasselbe gilt für jeden Winkel zwischen je zwei Strahlen eines vollen Richtungs-
satzes, und deswegen können wir nun allgemein aussprechen:

Wenn eine Gruppe von n gleichartigen Richtungssätzen mit beliebig vielen Strahlen durch Mittelbildung in *einen* Satz zusammengezogen wird, so hat jedes ausgeglichene Richtungs-Mittel das Gewicht $= n$, und jeder Winkel zwischen zwei solchen Richtungen das Gewicht $= \frac{n}{2}$, wobei das Gewicht $= 1$ zu einer ursprünglichen Richtung gehört, oder in Zusammenstellung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gewicht einer beobachteten Richtung} = 1 \\ \text{" " ausgeglichenen Richtung} = n \\ \text{" eines ausgeglichenen Winkels} = \frac{n}{2} \end{array} \right\} \quad (12)$$

Eine Nebenbemerkung wollen wir noch anstellen in Bezug auf die Fehlerberechnung in einem so zusammengefassten Richtungssatze. Wie die soeben angeordnete Gewichtsbestimmung (12) zeigt, kann man statt n beobachteter einzelner Richtungen, deren Mittelwert als eine Richtung mit dem Gewichte $= n$ in weitere Rechnungen, z. B. in eine Netzausgleichung, einführen, gerade wie bei dem arithmetischen Mittel in § 7.; und wenn mehrere ungleichartige Sätze je in sich wiederholt, zusammen ausgeglichen werden sollen, so kann man auch statt aller gleichgewichtigen ursprünglichen Einzelsätze die Mittel aus den gleichartigen Sätzen als

ungleichgewichtige Elemente in die Ausgleichung einführen, so lange es sich nur um die Ausgleichung selbst und um Gewichte handelt, z. B. die ganze Tabelle für die Station Nidden in § 71. auf S. 238 könnte vor der Ausgleichung in 3 Sätzen dargestellt werden, von denen der erste nur l^o und l'' mit $p_1 = 12$, der zweite l^o und l' mit $p_2 = 19$ und der dritte l^o , l' , l'' mit $p_3 = 12$ enthielte. Damit würde man genau dieselben x' , x'' auch $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\beta\beta]$ erhalten, wie bei der ausführlichen Rechnung in § 71., aber die Summe $[vv]$ und der mittlere Fehler würden anders und viel weniger zuverlässig.

Wollte man das Mittel aus n Sätzen als *einen* Satz mit dem Gewicht $= n$ (ohne andere Sätze oder Satzmittel) in sich selbst ausgleichen, und die Formeln des § 71. auf diesen Fall anwenden, so würde man natürlich zunächst den Satz selbst mit dem Gewicht $= n$ wiederfinden, wollte man aber auch die Fehlerberechnung mit $[vv]$ darauf anwenden, so würde man finden:

$$m^2 = \frac{[vv]}{(n-1)(s-1)} = 0 \quad (13)$$

oder in Worten: Wenn lauter volle Sätze in der Anzahl n vorliegen, so besteht die Stationsausgleichung lediglich in einer Mittelbildung, wodurch *ein* Satz vom Gewichte $= n$ erhalten wird, der aber an sich keinen Aufschluss über die Genauigkeit giebt. Zur Genauigkeitsuntersuchung muss man vielmehr auf die einzelnen Sätze zurückgehen.

§ 76. Besonderer Fall dreier Sichtstrahlen.

Der Fall *dreier* Sichten, welche in verschiedenen Kombinationen zusammen gemessen sind, bietet besonderes Interesse, weil in diesem Falle, ebenso wie bei der Mittelbildung aus gleichartigen Sätzen, es möglich sein wird, das ganze Ergebnis der Ausgleichung in Form von 3 einzelnen *Richtungen* mit gewissen Gewichten darzustellen. Bei mehr als drei Sichten ist das im Allgemeinen nicht mehr der Fall.

Wir wollen den Fall dreier Sichtstrahlen zuerst in (1)–(10) noch *nicht* erschöpfend behandeln, sondern zunächst nur annehmen, dass die 3 *Winkel* gemessen sind, welche zwischen den 3 Strahlen möglich sind.

Wir haben hiezu zwei Figuren gezeichnet, Fig. 1. und Fig. 2., von denen die

Fig. 1.
3 Richtungen und 3 Winkel.

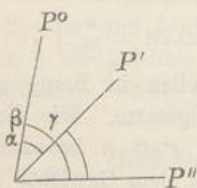
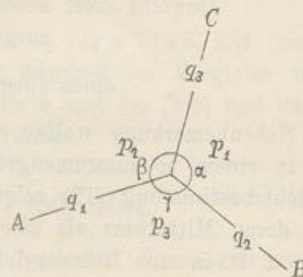


Fig. 2.
3 Richtungen und 3 Winkel.



erste Fig. 1. sich mehr den früheren Bezeichnungen von § 71. anschliesst, während Fig. 2. mehr der Symmetrie Rechnung trägt.

Nach Fig. 2. nehmen wir folgendes an:

$$\begin{array}{rcccl} \text{Strahlen} & A & B & C & \\ \text{Gemessene Winkel} & CB = \alpha & \text{mit dem Gewicht} & p_1 & \\ \text{"} & AC = \beta & \text{"} & p_2 & \\ \text{"} & BA = \gamma & \text{"} & p_3 & \end{array} \quad (1)$$

Die drei Winkel α , β , γ in Fig. 2. müssen der Bedingung genügen:

$$\text{Es soll sein} \quad \alpha + \beta + \gamma - 360^\circ = 0$$

Wegen der Beobachtungsfehler wird werden:

$$\alpha + \beta + \gamma - 360^\circ = w \quad (2)$$

Zur Tilgung des Widerspruches w werden die Verbesserungen v_1 , v_2 , v_3 angebracht, so dass wird:

$$(\alpha + v_1) + (\beta + v_2) + (\gamma + v_3) = 0$$

Dieses mit dem vorhergehenden zusammengekommen giebt:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \quad (3)$$

Dieses ist eine Bedingungsgleichung von der Form (4) § 43. S. 126, d. h. es ist:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1 \quad (4)$$

Die Ausgleichung selbst, die uns hier weniger interessiert, wird lediglich darauf führen, den Widerspruch w in (2) umgekehrt proportional den Gewichten p_1 , p_2 , p_3 auf die drei Winkel α , β , γ zu verteilen (ähnlich wie in dem Dreiecksbeispiel S. 34).

Wir wollen aber dann das Gewicht P_α des ausgeglichenen Winkels α bestimmen nach der Anleitung von (13) S. 125, welche in unserem Falle giebt:

$$\frac{1}{P_\alpha} = \left[\frac{ff}{p} \cdot 1 \right] = \left[\frac{ff}{p} \right] - \frac{\left[\frac{af}{p} \right]^2}{\left[\frac{aa}{p} \right]} \quad (5)$$

Da die Ausgleichungsfunktion $F = \alpha$ ist, also $f_1 = 1$ und $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, so wird mit den Coefficienten a in (4) und mit den Gewichten p in (1) sehr einfach:

$$\left[\frac{ff}{p} \right] = \frac{1}{p_1}, \quad \left[\frac{af}{p} \right] = \frac{1}{p_1}, \quad \left[\frac{aa}{p} \right] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \left[\frac{1}{p} \right]$$

Aus diesen Vorbereitungen setzt sich (5) so zusammen:

$$\frac{1}{P_\alpha} = \frac{1}{p_1} - \left(\frac{1}{p_1} \right)^2 \frac{1}{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{P_\alpha} = \frac{\frac{1}{p_1} \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right)}{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad (6)$$

Dieses stimmt überein mit der Bedeutung von (17) und (21) S. 34 (mit geändertem Zeichen p_α statt p_1 u. s. w.) und man kann auch unsere Formel (6) wieder ebenso wie früher die Formeln von S. 34 kurz so begründen, dass man das Gewicht des ausgeglichenen Winkels α zusammensetzt aus dem Gewichte p_1 des gemessenen Winkels α selbst und dem Gewichte $\frac{p_2 p_3}{p_2 + p_3}$ der Bestimmung von α auf dem Umweg über $360^\circ - (\beta + \gamma)$.

Indessen, solche Nebenentwicklungen nicht weiter verfolgend, betrachten wir

die zweite Form in (6), welcher man noch eine andere sehr wichtige Bedeutung unterlegen kann, indem man schreibt:

$$\frac{1}{P_\alpha} = \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_2} \quad (7)$$

wobei

$$\frac{1}{q_3} = \frac{\frac{1}{p_1} \frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad \frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{p_1} \frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p} \right]} \quad (8)$$

Hier haben q_3 und q_2 die Bedeutung unabhängiger *Richtungs*-Gewichte.

Wenn man die Formeln (8) auf alle Kombinationen 1.2, 2.3, 2.3 anwendet und auch noch etwas umformt, so hat man folgendes:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{\frac{1}{p_2} \frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p} \right]} = \frac{p_1}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad \text{oder} \quad q_1 = (p_2 + p_3) + \frac{p_2 p_3}{p_1} \quad (9a)$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{p_1} \frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p} \right]} = \frac{p_2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad , \quad q_2 = (p_3 + p_1) + \frac{p_3 p_1}{p_2} \quad (9b)$$

$$\frac{1}{q_3} = \frac{\frac{1}{p_1} \frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p} \right]} = \frac{p_3}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad , \quad q_3 = (p_1 + p_2) + \frac{p_1 p_2}{p_3} \quad (9c)$$

Hiezu gilt auch (7) in allen Kombinationen; und wir können nun den Satz aussprechen, dass, in Hinsicht auf die ausgeglichenen Winkel α , β , γ , man die durch Ausgleichung erlangte Genauigkeit darstellen kann durch Richtungsgewichte q_1 , q_2 , q_3 , aus welchen sich die Winkelgewichte P_α , P_β , P_γ nach der Ausgleichung ebenso zusammensetzen, wie wenn die q zu unabhängigen Richtungsmessungen gehörten. (Vgl. hiezu Fig. 2.)

Als Gewichts-Einheit, $p = 1$, dient hiebei eine Winkelmessung (α , β oder γ) vom Gewichte 1, und wenn wir nun die Änderung machen wollen, dass ein *Richtungsgewicht* zur Einheit wird, so müssen wir nach (3) § 70. S. 231 statt (9a) schreiben:

$$q_1 = \frac{p_2 + p_3}{2} + \frac{p_2 p_3}{2 p_1} \quad (10)$$

wobei nun z. B. p_1 das Gewicht der gemessenen Richtung B und das Gewicht der gemessenen Richtung C ist, welche nach Fig. 2. den Winkel α zusammensetzen, wobei ausserdem angenommen ist, dass auch ein Satz $A C$ mit 2 Richtungsgewichten p_2 und ein Satz $B A$ mit 2 Richtungsgewichten p_3 gemessen ist.

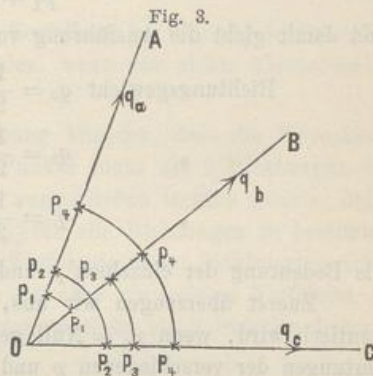
Die Formel (9a) oder (10) hat das eigenthümliche, dass sie $q_1 = \infty$ giebt, wenn $p_1 = 0$ wird; wenn also der Winkel α gar nicht gemessen ist, aber der Winkel β mit dem Gewicht p_2 und der Winkel γ mit dem Gewicht p_3 , so bekommt die Richtung A das Gewicht $q_1 = \infty$, die Richtung B das Gewicht $q_2 = p_3$ und die Richtung C das Gewicht $q_3 = p_2$; oder man kann sagen, wenn nur 2 Winkel zwischen 3 Sichten gemessen sind, so werden die Richtungsgewichte nur eine erzwungene Form, welche die ursprünglichen Winkelgewichte wieder in sich schliesst. Der Umstand, dass einzelne Gewichte unendlich werden, schadet übrigens nichts, wenn man solche Messungen in Richtungsform in eine Triangulierungsausgleichung nach bedingten

Beobachtungen einführen will, weil hierbei (nach § 40.) stets die Gewichtsreciproken gebraucht werden, z. B. $\left[\frac{a a}{p}\right]$, $\left[\frac{a b}{p}\right]$ u. s. w. auszurechnen ist, was mit einzelnen $p = \infty$ entsprechende Glieder-Null giebt, ohne die Rechnung formell zu beeinträchtigen.

Allgemeinster Fall für 3 Sichten.

Ausser den drei möglichen *Winkeln* zwischen drei Sichten kann auch noch ein *Richtungssatz* gemessen sein, welcher alle 3 Sichten zusammen trifft, und dann haben wir den allgemeinsten Fall der Messungs-Combinationen zwischen 3 Sichten, wie in Fig. 3. gezeigt und in nachfolgendem Schema dargestellt ist, im Anschluss an die Bezeichnungen von § 71.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Satz 1 } p_1^\circ p_1' \dots \text{ dabei ist } [p_1] = 2 p_1 \\ \text{Satz 2 } p_2^\circ \dots p_2'' \quad [p_2] = 2 p_2 \\ \text{Satz 3 } \dots p_3' p_3'' \quad [p_3] = 2 p_3 \\ \text{Satz 4 } p_4^\circ p_4' p_4'' \quad [p_4] = 3 p_4 \end{array} \right\} (11)$$



Wenn man hierauf die allgemeinen Formeln (11) § 71. S. 236 anwendet, so bekommt man:

$$\left. \begin{array}{l} (a a) = p_1 + p_3 + p_4 - \frac{p_1^2}{2 p_1} - \frac{p_3^2}{2 p_3} - \frac{p_4^2}{3 p_4} = \frac{3 p_1 + 3 p_3 + 4 p_4}{6} \\ - (a b) \quad \frac{p_3^2}{2 p_3} + \frac{p_4^2}{3 p_4} = \frac{3 p_3 + 2 p_4}{6} \\ (b b) = p_2 + p_3 + p_4 - \frac{p_2^2}{2 p_2} - \frac{p_3^2}{2 p_3} - \frac{p_4^2}{3 p_4} = \frac{3 p_2 + 3 p_3 + 4 p_4}{6} \end{array} \right\} (12)$$

Zur Gewichtsrechnung brauchen wir hieraus nach § 17. S. 58–59:

$$D = [a a] [b b] - [a b] [a b] \quad (13)$$

$$[\alpha \alpha] = \frac{[b b]}{D}, \quad [\alpha \beta] = \frac{-[a b]}{D}, \quad [\beta \beta] = \frac{[a a]}{D} \quad (14)$$

Die Ausführung mit (12) giebt:

$$D = \frac{3(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) + 4 p_4 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)}{12} \quad (15)$$

Daraus kann man zunächst die *Winkelgewichte* bilden; nämlich das Gewicht $P(A B)$ des Winkels $A B$ und das Gewicht $P(A C)$ des Winkels $A C$ sind so bestimmt:

$$\frac{1}{P(A B)} = [\alpha \alpha] \quad \text{und} \quad \frac{1}{P(A C)} = [\beta \beta] \quad (16)$$

der Winkel $B C$ setzt sich zusammen aus $A C - A B$ und deswegen wird das Gewicht des Winkels $B C$ nach (11) und (12) S. 78 (mit $f_1 = -1$, $f_2 = +1$) bestimmt durch:

$$\frac{1}{P(B C)} = [\alpha \alpha] + [\beta \beta] - 2 [\alpha \beta] \quad (17)$$

All dieses kann man auf die Form von *Richtungsgewichten* q bringen, indem man bestimmt, dass sein soll:

$$\frac{1}{P(A B)} = \frac{1}{q_a} + \frac{1}{q_b}, \quad \frac{1}{P(A C)} = \frac{1}{q_a} + \frac{1}{q_c}, \quad \frac{1}{P(B C)} = \frac{1}{q_b} + \frac{1}{q_c} \quad (18)$$

Dieses sind 3 Gleichungen zur Bestimmung von q_a , q_b , q_c , wozu die 3 Gleichungen (16) und (17) gerade hinreichen; man findet aus (16), (17), (18) die Auflösungen:

$$\frac{1}{q_a} = [\alpha \beta] \quad , \quad \frac{1}{q_b} = [\alpha \alpha] - [\alpha \beta] \quad , \quad \frac{1}{q_c} = [\beta \beta] - [\alpha \beta] \quad (19)$$

Vor der Einsetzung wollen wir noch zur Abkürzung schreiben:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = [p] \quad (20)$$

und damit giebt die Ausführung von (19) mit (13)–(15):

$$\left. \begin{aligned} \text{Richtungsgewicht } q_a &= \frac{1}{2} \frac{3(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) + 4 p_4 [p]}{3 p_3 + 2 p_4} \\ " \quad q_b &= \frac{1}{2} \frac{3(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) + 4 p_4 [p]}{3 p_2 + 2 p_4} \\ " \quad q_c &= \frac{1}{2} \frac{3(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) + 4 p_4 [p]}{3 p_1 + 2 p_4} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Die Bedeutung der einzelnen p und q liegt in Fig. 3. S. 257.

Zuerst überzeugen wir uns, dass q_c nach (21) mit dem früheren q_1 in (10) identisch wird, wenn $p_4 = \text{Null}$ gesetzt wird, wie es sein muss, wenn man die Bedeutungen der verschiedenen p und q in Fig. 2. und Fig. 3. vergleicht.

Wir wollen die Formeln (21) auf den Fall unseres Beispiels Station Nidden von S. 238 anwenden, und haben dann:

	$A = \text{Kalleninken}$	$B = \text{Gilge}$	$C = \text{Lattenwalde}$	
Satz 1	$p_1 = 19$	$p_1 = 19$	$\cdot \cdot \cdot$	} (22)
Satz 2	$p_2 = 12$	$\cdot \cdot \cdot$	$p_2 = 12$	
Satz 3	$p_3 = 0$	$\cdot \cdot \cdot$	$\cdot \cdot \cdot$	
Satz 4	$p_4 = 12$	$p_4 = 12$	$p_4 = 12$	

Nach (20) und (21): $[p] = 19 + 12 + 12 = 43$

$$p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = 19 \times 12 = 228$$

$$q_a = \frac{1374}{24} = 57,25 \quad , \quad q_b = \frac{1374}{60} = 22,90 \quad , \quad q_c = \frac{1374}{81} = 16,96 \quad (23)$$

Zur Probe haben wir von früher (21) § 71. S. 239:

$$[\alpha \alpha] = 0,0611 \quad [\alpha \beta] = 0,0175 \quad [\beta \beta] = 0,0764$$

also nach (19):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{q_a} &= 0,0175 & \frac{1}{q_b} &= 0,0436 & \frac{1}{q_c} &= 0,0589 \\ q_a &= 57,14 & q_b &= 22,94 & q_c &= 16,98 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die Ergebnisse von (23) und (24) stimmen genügend überein.

Zur Vergleichung wollen wir auch die sogenannten „Anschnittszahlen“ hersetzen, welche man zuweilen als Richtungsgewichte genommen hat.

Als „Anschnittszahl“ wurde genommen die Anzahl von Einstellungen, welche eine Sicht im ganzen Verlaufe der Messungen auf einer Station erfahren hat, ohne Rücksicht auf die übrigen Sichten und die Verbindungen der Sichten unter sich.

Das Beispiel (22) giebt nach dieser Erklärung die Anschnittszahlen:

	Kalleninken	Gilge	Lattenwalde
Anschnittszahl	$q'_a = 43$	$q'_b = 31$	$q'_c = 24$

Wollte man diese (25) als Näherungen für die richtigen Gewichte (23) oder

(24) gelten lassen, so würde man also in A erheblich zu wenig und in B und C zu viel erhalten.

Wir wollen auch nochmals die Eigenthümlichkeit hervorheben, dass ein Richtungsgewicht $q = \infty$ werden kann, z. B. $p_3 = 0$ und $p_4 = 0$ giebt $q_3 = \infty$ und dabei $q_1 = \frac{1}{2} p_1$ und $q_2 = \frac{1}{2} p_2$, also wieder wie schon bei (9) und (10) bemerkt wurde, nur gezwungene Richtungsform und thatsächlich Zerfallung in Winkelgewichte. Dasselbe wird auch stattfinden bei mehr als 3 Strahlen, wenn gar nichts überschüssiges gemessen ist.

Wir wollen hieran auch noch die Bemerkung knüpfen, dass die Vierecksausgleichung von § 72, da das Viereck in keinem Punkte mehr als 3 Richtungen hat, auch nach dem Verfahren der Richtungsgewichte ausgeglichen werden könnte, indem man einfach die Gewichte q nach den Formeln (21) für alle Richtungen zu bestimmen und dann im wesentlichen nach § 59. (jedoch mit Zuziehung dieser Richtungsgewichte) zu verfahren hätte. Als Anwendung im Grossen ist aber ein solches Verfahren unmöglich, weil die Punkte eines Netzes im Allgemeinen mehr als 3 Strahlen haben.

§ 77. Winkelmessung in allen Combinationen.

Die Winkelmessung in allen Combinationen ist nach den vollen Sätzen (§ 75.) und dem Falle dreier Strahlen (§ 76.) die dritte wichtige Anordnung von Winkelmessungen, weil sie, wie die beiden vorher erwähnten, die Ausgleichung mit der Form von Richtungsgewichten bieten wird.

Schon von Gauss und Gerling als Ideal gepriesen und von Hansen 1871 theoretisch behandelt, ist die Winkelmessung in allen Combinationen in neuester Zeit durch General Schreiber bei der Landesaufnahme zu neuem Leben gebracht worden, und bildet seit etwa 1880 den Grundton der preussischen Triangulierungen I. Ordnung.

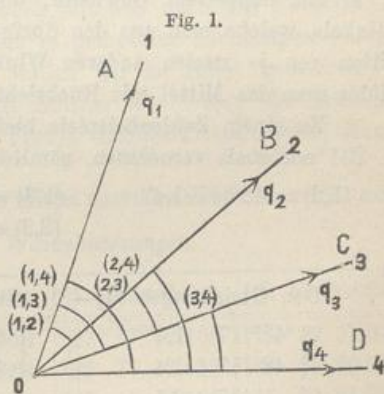
Schon in § 67. haben wir die vorliegende Aufgabe mit einem Beispiele nach Gerling behandelt, und zwar mit gleichen und mit ungleichen Gewichten. Die ungleichen unregelmässig zerstreuten Gewichte sind aber in diesem Falle nicht erwünscht; gerade die *gleichen* Gewichte in Verbindung mit der gleichmässigen Verteilung geben dem Verfahren die Geschmeidigkeit und Übersichtlichkeit, welche seine Vorteile ausmachen.

Damit nehmen wir nun mit Fig. 1. an, man habe zwischen 4 Strahlen alle 6 möglichen Winkel gleichartig gemessen, nämlich:

Gemessene Winkel

(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) (1)

Als unabhängige Unbekannte sollen die 3 Winkel zwischen dem ersten Strahl und den 3 folgenden Strahlen gelten, welche zur Unterscheidung von den gemessenen Winkeln (1,2), (1,3), (1,4) nun mit [1,2], [1,3], [1,4] bezeichnet werden, und damit bekommen wir für die 6 gemessenen Winkel folgende 6 Fehlergleichungen:



Fehlergleichungen.

	[1,2]	[1,3]	[1,4]	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	
$v_{12} =$	[1,2]	-(1,2)	} (2)
$v_{13} =$...	[1,3]	-(1,3)	
$v_{14} =$	[1,4]	-(1,4)	
$v_{23} =$	-[1,2]	+ [1,3]	-(2,3)	
$v_{24} =$	-[1,2]	...	+ [1,4]	-(2,4)	...	
$v_{34} =$...	- [1,3]	+ [1,4]	-(3,4)	

Daraus bildet man die

Normalgleichungen

$$\left. \begin{aligned} 3 [1,2] - [1,3] - [1,4] - (1,2) \quad \dots \quad \dots + (2,3) + (2,4) \quad \dots &= 0 \\ - [1,2] + 3 [1,3] - [1,4] \quad \dots - (1,3) \quad \dots - (2,3) \quad \dots + (3,4) &= 0 \\ - [1,2] - [1,3] + 3 [1,4] \quad \dots \quad \dots - (1,4) \quad \dots - (2,4) - (3,4) &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

Um diese Normalgleichungen aufzulösen, bildet man zuerst deren Summe:

$$[1,2] + [1,3] + [1,4] - (1,2) - (1,3) - (1,4) = 0 \quad (4)$$

Diese Summengleichung (4) zu jeder einzelnen der Gleichungen (3) addiert, gibt, ohne weitere Elimination sofort die Auflösungen nach den 3 Unbekannten:

$$\text{Winkel } [1,2] = \frac{2(1,2) + (1,3) - (2,3) + (1,4) - (2,4)}{4} \quad (5)$$

$$\text{Winkel } [1,3] = \frac{2(1,3) + (1,4) - (3,4) + (1,2) + (2,3)}{4} \quad (6)$$

$$\text{Winkel } [1,4] = \frac{2(1,4) + (1,2) + (2,4) + (1,3) + (3,4)}{4} \quad (7)$$

Diese Auflösungen kann man in Worten so darstellen: Um irgend einen Winkel $[i, k]$ endgültig zu berechnen, nimmt man zunächst seine unmittelbare eigene Messung (i, k) mit doppeltem Gewichte, und dazu *eingewichtet* alle diejenigen Werte des Winkels, welche man aus den übrigen Winkelmessungen durch Subtraktion oder Addition von je zweien anderen Winkeln zusammensetzen kann, und aus all diesem bildet man das Mittel mit Rücksicht auf die Gewichte.

Zu einem Zahlenbeispiele hierfür wollen wir das Gerlingsche Beispiel von § 67. S. 231 nochmals vornehmen, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} (1,2) &= 48^\circ 17' 1,4'' & (1,3) &= 96^\circ 52' 16,8'' & (1,4) &= 152^\circ 54' 6,8'' \\ & & (2,3) &= 48^\circ 35' 14,3'' & (2,4) &= 104^\circ 37' 7,8'' \\ & & & & (3,4) &= 56^\circ 1' 48,9'' \end{aligned} \right\} (8)$$

Den Gleichungen (4)–(6) entspricht folgende Ausrechnung:

$\left\{ \begin{array}{l} 48^\circ 17' 1,4'' \\ 48 \quad 17 \quad 1,4 \\ 17 \quad 2,5 \\ 16 \quad 59,0 \\ \hline 4,3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 96^\circ 52' 16,8'' \\ 96 \quad 52 \quad 16,8 \\ 17,9 \\ 15,7 \\ \hline 27,2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 152^\circ 54' 6,8'' \\ 152 \quad 54 \quad 6,8 \\ 9,2 \\ 5,7 \\ \hline 28,5 \end{array} \right.$
---	---	---

$$\begin{aligned}
 [1,2] &= 48^\circ 17' 1,075'' & [1,3] &= 96^\circ 52' 16,800'' & [2,3] &= 152^\circ 54' 7,125'' \\
 \text{Ebenso auch } [2,3] &= 48^\circ 35' 15,725'' & [2,4] &= 104^\circ 37' 6,050'' & & \\
 & & [3,4] &= 56^\circ 1' 50,325'' & &
 \end{aligned} \quad (9)$$

Diese ausgeglichenen $[1,2] \dots$ mit den gemessenen $(1,2)$ verglichen, geben die übrigbleibenden Fehler v und deren Quadrate:

$$\begin{aligned}
 v_{12} &= -0,225'' & v_{13} &= 0,000'' & v_{14} &= +0,325'' \\
 & & v_{23} &= +1,425'' & v_{24} &= -1,750'' \\
 & & & & v_{34} &= +1,425'' \\
 v^2 \dots & 0,0506 & 0,0000 & 0,1056 & & \\
 & & 2,0306 & 3,0625 & & \\
 & & & 2,0306 & &
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$[v v] = 7,2799, \quad m = \sqrt{\frac{7,2799}{6-3}} = \pm 1,56''$$

Dieses m ist der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels (vor der Ausgleichung).

Wir wollen einen Schritt weiter gehen, und die Rechnung in die Form von *Richtungen* bringen, indem wir $(2,1) = -(1,2)$ einführen, und auch noch der Symmetrie wegen $(1,1) = 0$ und $(2,2) = 0$ hinzufügen, so dass die Gleichung (5) folgende Gestalt annimmt:

$$\text{Winkel } [1,2] = \frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + (1,4)}{4} - \frac{(2,1) + (2,2) + (2,3) + (2,4)}{4}$$

Die ausgeglichenen Richtungen (bzw. deren Verbesserungen), sollen nach Fig. 1. mit $A, B, C \dots$ bezeichnet werden, dann hat man für 3 Strahlen:

$$\begin{aligned}
 \text{Richtung } A &= -\frac{(1,1) + (1,2) + (1,3) + (1,4) + \dots}{s} \\
 \text{Richtung } B &= -\frac{(2,1) + (2,2) + (2,3) + (2,4) + \dots}{s} \\
 \text{Richtung } C &= -\frac{(3,1) + (3,2) + (3,3) + (3,4) + \dots}{s} \\
 &\dots \dots \dots \text{u. s. w.} \dots \dots \dots
 \end{aligned} \quad (11)$$

dann braucht man nur die hiernach berechneten $A, B, C \dots$ wie unabhängig in einem Satze gemessene Richtungen von einander zu subtrahieren, um alle ausgeglichenen Winkel zu erhalten; oder man kann auch mit den nach den Formeln (11) berechneten Richtungen weiter rechnen, wie wenn es gemessene Richtungen wären.

Die Anwendung der neuen Formeln (11) wollen wir an einem grösseren Beispiele mit 5 Sichtstrahlen zeigen, und zwar mit Station Keulenberg der Märkisch-Schlesischen Kette in dem Werke „Die Königl. Preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, II. Teil, Berlin 1874*, S. 357–361.

Wenn man alle dort angegebenen Werte im Mittel zusammenzieht, so erhält man:

I. Station Keulenberg. 10 Winkelmessungen.

	1. Collm.	2. Strauch.	3. Brautberg.	4. Brandberg.	5. Hochstein.
1.	0° 0' 0,000''	25° 54' 20,367''	76° 40' 49,008''	127° 17' 42,100''	175° 20' 21,075''
2.		25 54 20,000	76 40 47,658	127 17 42,958	175 20 20,392
3.			76 40 49,000	127 17 43,100	175 20 21,725
4.				127 17 42,000	175 20 20,667
5.					(12)

Dieses sind 10 Winkel, welche aber in der Form von 14 Richtungen zusammengestellt sind, indem die 5 Werte der ersten Linie erhalten wurden aus 4 Winkeln, welche sämtlich den linken Schenkel Collm = $0^{\circ} 0' 0''$ gemeinsam haben, und ebenso in der zweiten Linie 3 Winkel, welche alle den linken Schenkel Strauch = $25^{\circ} 54' 20''$ gemeinsam haben.

Aus der vorstehenden Tabelle bilden wir mit Absonderung von Näherungswerten folgende zweite Tabelle:

II. Station Keulenberg. Ausgleichung von 10 Winkeln in Richtungsform.

	1. $0^{\circ} 0' 0''$	2. $25^{\circ} 54' 20''$	3. $76^{\circ} 40' 49''$	4. $127^{\circ} 17' 42''$	5. $175^{\circ} 20' 21''$	Quer-Summe
1.	0,000"	+ 0,367"	+ 0,008"	+ 0,100"	+ 0,075"	+ 0,550"
2.	- 0,367	0,000	- 1,342	+ 0,958	- 0,608	- 1,359
3.	- 0,008	+ 1,342	0,000	+ 1,100	+ 0,725	+ 3,159
4.	- 0,100	- 0,958	- 1,100	0,000	- 0,333	- 2,491
5.	- 0,075	+ 0,608	- 0,725	+ 0,333	0,000	+ 0,141
Summen S	- 0,550	+ 1,359	- 3,159	+ 2,491	- 0,141	
Mittel	$A = - 0,110''$	$B = + 0,272''$	$C = - 0,632''$	$D = + 0,498''$	$E = - 0,028''$	
Ausgeglichene Richtung	$359^{\circ} 59' 59,890''$	$25^{\circ} 54' 20,272''$	$76^{\circ} 40' 48,368''$	$127^{\circ} 17' 42,498''$	$175^{\circ} 20' 20,972''$	(13)
oder	$0^{\circ} 0' 0,000''$	$25^{\circ} 54' 20,382''$	$76^{\circ} 40' 48,478''$	$127^{\circ} 17' 42,608''$	$175^{\circ} 20' 21,082''$	

Die letzte Linie ist aus der vorhergehenden entstanden durch Zufügung von $0,110''$, um die Anfangsrichtung wieder auf $0^{\circ} 0' 0''$ zu bringen.

Diese Ausgleichung (12)–(13) bietet in etwas anderer Form dasselbe, was zuerst in der Abhandlung von General Schreiber in der „Zeitschr. f. Verm. 1878“, S. 220 u. S. 232 gegeben wurde. Unsere Summen S sind $= s - \sigma$ jener Abhandlung S. 220.

Um auch den mittleren Fehler zu bestimmen, hat man jedenfalls den sicheren Weg, auf die eigentlichen 10 Winkelmessungen zurückzugreifen, und sie mit den ausgeglichenen Winkeln (die man durch Subtraktionen aus (13) erhält) zu vergleichen. Wir wollen dieses im folgenden thun, indem wieder mit (1,2) ein gemessener und mit [1,2] ein ausgeglichener Winkel bezeichnet wird:

(1,2) = $25^{\circ} 54' 20,367''$	(1,3) = $76^{\circ} 40' 49,008''$	(1,4) = $127^{\circ} 17' 42,100''$	(1,5) = $175^{\circ} 20' 21,075''$
[1,2] = $25^{\circ} 54' 20,382''$	[1,3] = $76^{\circ} 40' 48,478''$	[1,4] = $127^{\circ} 17' 42,608''$	[1,5] = $175^{\circ} 20' 21,082''$
$v_{12} = + 0,015$	$v_{13} = - 0,530$	$v_{14} = + 0,508$	$v_{15} = + 0,007$
v	v^2	(2,3) = $50^{\circ} 46' 27,658''$	(2,4) = $101^{\circ} 22' 22,958''$
+ 0,015	0,0002	[2,3] = $50^{\circ} 46' 28,096''$	[2,4] = $101^{\circ} 22' 22,226''$
- 0,530	0,2809	$v_{23} = + 0,438$	(2,5) = $49^{\circ} 26' 0,392''$
+ 0,508	0,2581		[2,5] = $49^{\circ} 26' 0,700''$
+ 0,007	0,0000		$v_{25} = + 0,308$
+ 0,438	0,1918	(3,4) = $50^{\circ} 36' 54,100''$	(3,5) = $98^{\circ} 39' 32,725''$
- 0,732	0,5358	[3,4] = $50^{\circ} 36' 54,130''$	[3,5] = $98^{\circ} 39' 32,604''$
+ 0,308	0,0949	$v_{34} = + 0,030$	$v_{35} = - 0,121$
+ 0,030	0,0009		(4,5) = $48^{\circ} 2' 38,667''$
- 0,121	0,0146		[4,5] = $48^{\circ} 2' 38,474''$
- 0,193	0,0372		$v_{45} = - 0,193$
[v] = 1,4144			

$$m = \sqrt{\frac{1,4144}{10-4}} = \pm 0,486'' \quad (14)$$

Dieses m ist der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels (mittlerer Winkelfehler vor der Ausgleichung).

Ausser dieser unmittelbar sich darbietenden Berechnung (14) kann man auch eine Berechnung von $[v v]$ an die Ausrechnung von (13) anschliessen, indem man der Formel (8) S. 85 folgt, welche wegen der einfachen Form unseres Falles, mit $[a b] = 0$, $[a c] = 0$ u. s. w. sich so darstellt:

$$[v v] = [l l] - \frac{[a l]^2}{[a a]} - \frac{[b l]^2}{[b b]} - \frac{[c l]^2}{[c c]} \dots \quad (15)$$

Die Ausrechnung nach (15) giebt mit den Zahlen der Tabelle von (13) folgendes:

l	l^2			
+ 0,367	0,1347	$[a l] = -0,550$	$[a l]^2 = 0,3025$	$[a a] = 5$
+ 0,008	0,0001	$[b l] = +1,359$	$[b l]^2 = 1,8469$	$[b b] = 5$
+ 0,100	0,0100	$[c l] = -3,159$	$[c l]^2 = 9,9793$	$[c c] = 5$
+ 0,075	0,0056	$[d l] = +2,491$	$[d l]^2 = 6,2051$	$[d d] = 5$
- 1,342	1,8010	$[e l] = -0,141$	$[e l]^2 = 0,0199$	$[e e] = 5$
+ 0,958	0,9178			
- 0,608	0,3697		18,3537	
+ 1,100	1,2100			
+ 0,725	0,5256			
- 0,333	0,1109			
	5,0854			

$$[v v] = 5,0854 - \frac{18,3537}{5} = 5,0854 - 3,6707 = 1,4147 \quad (16)$$

Dieses stimmt genügend mit 1,4144, also auch wieder der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels

$$m = \sqrt{\frac{1,4147}{10-4}} = \pm 0,486'' \quad (17)$$

Der Nenner $10 - 4 = 6$ gilt hier für 5 Strahlen; im allgemeinen Falle mit s Strahlen ist die Anzahl der Winkel in allen Combinationen $= \frac{s(s-1)}{2}$ und die Anzahl der unabhängigen Winkel $= s - 1$, also nach (19) § 28. S. 87:

$$n - u = \frac{s(s-1)}{2} - (s-1) = \frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

also der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{2[v v]}{(s-1)(s-2)}} \quad (18)$$

und der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{[v v]}{(s-1)(s-2)}} \quad (19)$$

Die Ausrechnung (16) entspricht der „Königl. Preuss. Landestriangulation, II. Teil, 1874“, S. 361, welcher wir unser Beispiel entlehnt haben, es steht nämlich dort:

$$(V V) = (V_0 V_0) - \frac{(a n)^2}{(a a)} - \frac{(b n)^2}{(b b)} - \dots = 82,05 - 22,01 = 60,04 \text{ mit Divisor} = 116.$$

Dieses ist mit unserem (16) und (17) deswegen nicht unmittelbar zu vergleichen, weil in der Landestriangulation S. 357-360, 120 Einzelwinkel (je aus l und r zusammengesetzt) verwertet sind, welche

Zwischen s Strahlen werden die Winkel in allen $\frac{s(s-1)}{2}$ Combinationen gemessen, wobei $(s-1)$ unabhängige Winkel oder s Richtungen bestimmt werden.

Wenn ein gemessener Winkel das Gewicht = 1 hat, so erhält jeder Winkel nach der Ausgleichung das Gewicht $P = \frac{s}{2}$ oder jede ausgeglichene Richtung das Gewicht $q = s$ (z. B. $s = 2$ giebt $P = 1$ und $q = 2$).

Wenn eine gemessene Richtung das Gewicht = 1 hat, also ein gemessener Winkel das Gewicht = $\frac{1}{2}$, so erhält jeder Winkel nach der Ausgleichung das Gewicht $P = \frac{s}{4}$ und jede ausgeglichene Richtung das Gewicht $q = \frac{s}{2}$ (z. B. $s = 2$ giebt $P = \frac{1}{2}$ und $q = 1$ wie es sein muss).

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird immer nach den schon früher angegebenen Formeln (18) oder (19) berechnet, wozu $[v v]$ nach dem Beispiel (14) oder (16) zu bestimmen ist.

Zweite Entwicklung für Winkelmessung in allen Combinationen.

Um die wichtige und elegante Ausgleichung unseres Falles nach allen Beziehungen zu beleuchten, wollen wir noch eine zweite von allem früheren unabhängige Entwicklung vornehmen, und dabei von vornherein auf Richtungen ausgehen, deren ausgeglichene Werte mit A, B, C, D nach Fig. 1. S. 259 bezeichnet seien; die gemessenen Winkel seien (1,2), (1,3) u. s. w.

Dann nehmen die Fehlergleichungen statt (1) folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} v_{12} &= -A + B \dots - (1,2) \dots \\ v_{13} &= -A \dots + C \dots - (1,3) \dots \\ v_{14} &= -A \dots + D \dots - (1,4) \dots \\ v_{23} &= \dots - B + C \dots - (2,3) \dots \\ v_{24} &= \dots - B \dots + D \dots - (2,4) \dots \\ v_{34} &= \dots - C + D \dots - (3,4) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Wenn man diese 6 Ausdrücke der v einzeln quadriert und addiert, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} [v v] &= 3 A^2 - 2 A B - 2 A C - 2 A D + 2 A ((1,2) + (1,3) + (1,4)) \\ &\quad + 3 B^2 - 2 B C - 2 B D + 2 B ((2,3) + (2,4) - (1,2)) \\ &\quad + 3 C^2 - 2 C D + 2 C ((3,4) - (1,3) - (2,3)) \\ &\quad + 3 D^2 + 2 D (- (1,4) - (2,4) - (3,4)) \\ &\quad + (1,2)^2 + (1,3)^2 + \dots (3,4)^2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Dieses wird zunächst auf folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned} [v v] &= A (3 A - B - C - D) + 2 A ((1,2) + (1,3) + (1,4)) \\ &\quad + B (-A + 3 B - C - D) + 2 B ((2,3) + (2,4) - (1,2)) \\ &\quad + C (-A - B + 3 C - D) + 2 C ((3,4) - (1,3) - (2,3)) \\ &\quad + D (-A - B - C + 3 D) + 2 D (- (1,4) - (2,4) - (3,4)) \\ &\quad + (1,2)^2 + (1,3)^2 + \dots (3,4)^2 \end{aligned}$$

Nun wird die an sich willkürliche Bedingung eingeführt:

$$A + B + C + D = 0 \quad (25)$$

und damit wird, wenn zugleich $(1,3) = -(3,1)$ u. s. w. gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} [vv] = & 4A^2 + 2A((1,2) + (1,3) + (1,4)) + (1,2)^2 + (1,3)^2 \\ & + 4B^2 + 2B((2,3) + (2,4) + (2,1)) + (1,4)^2 + (2,3)^2 \\ & + 4C^2 + 2C((3,4) + (3,1) + (3,2)) + (2,4)^2 + (3,4)^2 \\ & + 4D^2 + 2D((4,1) + (4,2) + (4,3)) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Die Bedingung, dass dieses (26) ein Minimum werde, führt auf:

$$\left. \begin{aligned} A = & -\frac{(1,2) + (1,3) + (1,4)}{4} \\ B = & -\frac{(2,3) + (2,4) + (2,1)}{4} \\ C = & -\frac{(3,4) + (3,1) + (3,2)}{4} \\ D = & -\frac{(4,1) + (4,2) + (4,3)}{4} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Dieses stimmt überein mit dem früheren (11) S. 261, indem dort $(1,1) = 0$ u. s. w. zugesetzt wurde. Setzt man nun wieder die A, B, C, D aus (27) in (26), so erhält man:

$$[vv] = (1,2)^2 + (1,3)^2 + (1,4)^2 + (2,3)^2 + (2,4)^2 + (3,4)^2 - 4(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)$$

dieses gilt für 4 Strahlen; allgemein für s Strahlen hat man:

$$\left. \begin{aligned} [vv] = & (1,2)^2 + (1,3)^2 + (1,4)^2 \dots (2,3)^2 + (2,4)^2 + \dots (s-1,s)^2 \\ & - s(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + \dots S^2) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Dieses ist übereinstimmend mit dem früheren (15) S. 263, womit nun alles auf verschiedenen Wegen bestimmt ist.

Winkelmessung in symmetrischer Anordnung.

Nicht bloss bei Winkelmessungen in allen Combinationen, d. h. Combinationen der Strahlen zu je zweien, kann man die Ausgleichungs-Ergebnisse der Station in Form von Richtungen mit Richtungsgewichten darstellen, sondern auch noch in dem allgemeineren Falle der Stationsbeobachtungen in irgendwie symmetrischer Anordnung.

Dieser Fall ist von *Vogler* und *Helmert* in der „Zeitschr. f. Verm. 1885“ S. 49–59 und S. 263–266 behandelt worden. Auch hier, wie bei Winkelmessungen mit je 2 Strahlen findet man eine Zerfällung der Gewichtsgleichungen in Einzelgewichte. Wenn man p Strahlen in symmetrischen Sätzen von je i Richtungen, also in $\binom{p}{i}$ Combinationen beobachtet, so wird das Gewicht eines ausgeglichenen Winkels $P = \frac{p}{2i} \binom{p-2}{i-2}$, oder wenn die Zahl der Strahlen $= s$ gesetzt wird, so ist $P = \frac{s}{2i} \binom{s-2}{i-2}$, also mit $i=2$, wird $\binom{s-2}{i-2} = 1$ und $P = \frac{s}{4}$. Dabei ist das Gewicht einer gemessenen Richtung $= 1$ gesetzt.

Würde man das Gewicht eines gemessenen Winkels $= 1$ setzen, so würde das Gewicht eines ausgeglichenen Winkels werden $P = \frac{s}{i} \binom{s-2}{i-2}$, also mit $i=2$ würde $P = \frac{s}{2}$, was mit unserem Ergebnis von S. 265 stimmt.

§ 78. Winkelmessung in allen Combinationen mit Anschlusszwang.

Bei Ausgleichung freier Dreiecksnetze, mit denen wir uns in diesem Kapitel hauptsächlich beschäftigen, kommt Anschlusszwang nur ausnahmsweise vor. (Ein praktisches Beispiel dazu bietet die in dem späteren § 80. zu behandelnde Elbkette).

Um indessen alles im Zusammenhange zu haben, was sich auf Winkelmessungen in allen Combinationen bezieht, wollen wir auch den Anschlusszwang mit 2 festen Strahlen, nach Fig. 1., hier behandeln, indem dabei angenommen wird, es seien OA und OD zwei feste aus älteren Messungen und Ausgleichungen unabänderlich festliegende Strahlen, an welche zwei neue Strahlen OB und OC durch Winkelmessungen angeschlossen werden sollen.

Nach den Regeln von General Schreiber (Zeitschr. f. Verm. 1878 S. 217) sind zwei solche feste Anschlussstrahlen bezüglich der Anordnung der Beobachtungen wie eine einzige Richtung anzusehen und jede neue zu bestimmende Richtung ist ebenso oft mit der einen wie mit der anderen Anschlussrichtung zu verbinden.

In Fig. 1. ist angenommen, dass OA und OB zwei feste Richtungen sind, welche einen unabänderlich gegebenen Winkel W zwischen sich fassen, und die neuen Strahlen OB und OC sollen durch Winkelmessungen gegen A und D und unter sich bestimmt werden.

Es seien gemessen:

Winkel (1,2)	mit dem Gewichte	1
" (1,3)	" " "	1
" (1,4)	" " "	0 d. h. nicht gemessen
" (2,3)	" " "	2
" (2,4)	" " "	1
" (3,4)	" " "	1

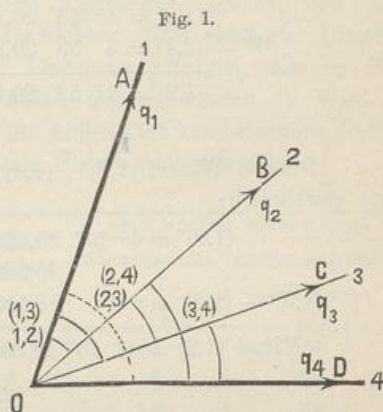
Bei dieser Anordnung kann man die ganze Behandlung auf den Fall eines festen Strahles A , d. h. auf den Fall gänzlich freier Winkelmessung zwischen 3 Strahlen A, B, C zurückführen, indem man bei gegebenem Winkel $AOD = W$ den Winkel (2,4) reduziert auf $W - (2,4) = (1,2)$ und ebenso $W - (3,4) = (1,3)$.

Wir wollen dieses sogleich an einem Beispiele erproben, und zwar aus der Vermessung der freien Hansestadt Bremen, von Geisler, 1890, S. 18—19, Station Weyerberg, wo 2 feste Strahlen und 2 neue Strahlen vorhanden sind, nämlich:

1. Bremen $A = 207^\circ 40' 32,91''$ fest gegeben
2. Oberblockland B
3. Scharmbeck C
4. Garlstadt $D = 291^\circ 6' 9,47''$ fest gegeben

$$[1,4] = W = D - A = 83^\circ 25' 36,56''$$

Die 5 gemessenen Winkel stellen wir nun nebst dem fest gegebenen $[1,4]$ in gleicher Form zusammen, wie wenn $[1,4]$ auch gemessen wäre:



$$\begin{array}{lll}
 (1,2) = 4^\circ 53' 20,18'' & (1,3) = 71^\circ 38' 27,73'' & [1,4] = 83^\circ 25' 36,56'' = W \\
 & \left\{ \begin{array}{l} (2,3) = 66^\circ 45' 8,99'' \\ (2,3) = 66 \quad 45 \quad 8,99 \end{array} \right. & \begin{array}{l} (2,4) = 78^\circ 32' 15,69'' \\ (3,4) = 11^\circ 47' 9,22'' \end{array}
 \end{array}$$

Nach dem angegebenen Prinzip der Reduktion von 4. auf 1. erhält man:

$$\begin{array}{ll}
 (1,2) = 4^\circ 53' 20,18'' & (1,3) = 71^\circ 38' 27,73'' \\
 W - (2,4) = 4 \quad 53 \quad 20,87 & W - (3,4) = 71 \quad 38 \quad 27,34 \\
 \hline
 (1,2)' = 4^\circ 53' 20,525'' & (1,3)' = 71^\circ 38' 27,535'' \\
 & (2,3)' = 66^\circ 45' 8,990''
 \end{array}$$

Diese 3 Winkel $(1,2)'$, $(1,3)'$ und $(2,3)'$ werden nun unter sich ausgeglichen wie gewöhnlich:

$$\begin{array}{ll}
 (1,2)' = 4^\circ 53' 20,525'' & (1,3)' = 71^\circ 38' 27,535'' \\
 \quad \quad \quad 20,525 & \quad \quad \quad 27,535 \\
 (1,3)' - (2,3)' = & 18,545 \quad (1,2)' + (2,3)' = \quad 29,515 \\
 \hline
 \text{Mittel } [1,2] = 4^\circ 53' 19,865'' & [1,3] = 71^\circ 38' 28,195'' \\
 & (2,3)' = 66^\circ 45' 8,990'' \\
 & \quad \quad \quad 8,990 \\
 (1,3)' - (1,2)' = & 7,010 \\
 \hline
 \text{Mittel } [2,3] = 66^\circ 45' 8,330''
 \end{array}$$

Diese ausgeglichenen Winkel stimmen überein mit den von Geisler auf S. 19 der Bremer Triangulierung auf anderem Wege erhaltenen Werten, und indem man diese Winkel an die festen Richtungen anschliesst, hat man das Schluss-Ergebnis:

Station Weyerberg.

- | | | |
|------------------|--------------------------------|---------------|
| 1. Bremen | $A = 207^\circ 40' 32,91''$ | fest gegeben |
| 2. Oberblockland | $B = 212 \quad 33 \quad 52,77$ | eingeschaltet |
| 3. Scharmbeck | $C = 279 \quad 19 \quad 1,10$ | " |
| 4. Garlstedt | $D = 291 \quad 6 \quad 9,47$ | fest gegeben |

Dieses ist ein Messungsabriss in Form von orientierten Richtungswinkeln (Katasterbezeichnung „Neigungen“), die zwei neuen Richtungen B und C gehen in eine Netzausgleichung oder eine Koordinatenausgleichung als beobachtet ein.

Bei *Winkelmessung* auf einer Station mit Anschluss an beliebig viele feste Strahlen kann man die Winkelausgleichung und die Fehlerberechnung, kurz alles, was sich auf eine solche Station bezieht, mittelst des angegebenen formellen Kunstgriffs immer auf den Fall *eines* festen Strahles, oder was hier dasselbe ist, auf den Fall völlig freier Strahlen zurückführen, so dass es nicht nötig ist, für Stations-Winkelausgleichung mit Anschlusszwang an feste Strahlen besondere Formeln aufzustellen.

§ 79. Triangulierung nach Schreibers Methode.

Nachdem in § 77. S. 265 erkannt ist, dass die Winkelmessung in allen Combinationen sich nach der Stationsausgleichung darstellen lässt als *ein* Satz von Richtungsmessungen mit einem gewissen Gewichte für jede ausgeglichene Richtung, kann

man auch einsehen, dass ein ganzes Dreiecksnetz mit lauter so behandelten Stationen schlechthin nach Richtungen ausgeglichen werden kann, ähnlich wie an den zwei kleinen Beispielen von § 59. und § 61. früher gezeigt worden ist.

Der einzige Unterschied besteht noch darin, dass zwar alle ausgeglichenen Richtungen *derselben* Station gleichgewichtig sind, dass aber *verschiedene* Stationen mit verschieden vielen Sichten, ungleichgewichtige Richtungen ergeben, weil das Gewicht nach der Ausgleichung von der Anzahl der Sichten selbst abhängt. Diesem Umstande wurde von General Schreiber dadurch Rechnung getragen, dass er die Combinationsmessungen an sich mehrfach wiederholte, und es wurden die Wiederholungszahlen n der Stationen so bemessen, dass die schliesslich erscheinenden Richtungsgewichte möglichst gleich werden, wie folgende Übersichtstabelle zeigt:

Anzahl der Strahlen einer Station s	ohne Wiederholung			Wiederholungszahl $2\ n$	bei $2\ n$ facher Wiederholung	
	Anzahl der Winkel $\frac{s-1}{2}$	Richtungsgewicht für			Winkelgewicht $p = \frac{n\ s}{2}$	Richtungsgewicht $q = 2\ p = n\ s$
		Messung	Ausgleichung			
2	1	1	1,0	24	12	24
3	3	1	1,5	16	12	24
4	6	1	2,0	12	12	24
5	10	1	2,5	10	12,5	25
6	15	1	3,0	8	12	24
7	21	1	3,5	8	14	28
8	28	1	4,0	6	12	24

Als Messung für die Gewichtseinheit $p = 1$ zählt hiebei die Messung einer Richtung in *einer* Fernrohrlage I oder II, oder, was dasselbe bedeutet, die Messung eines Winkels in zwei Fernrohrlagen I und II. Die angegebene Wiederholungszahl $2n$ bezieht sich auf Richtungen oder Winkel in *einer* Fernrohrlage, also $2n = 24$ malige Wiederholung eines Winkels bedeutet $n = 12$ Messungen des Winkels in Fernrohrlage I und $n = 12$ Messungen in Fernrohrlage II bei denselben Kreisstellungen wie in Lage I. Bei den Messungen der Landesaufnahme sind die Fernrohrlagen I und II (in den amtlichen Druckwerken gewöhnlich mit l und r bezeichnet) stets auseinandergehalten, und auf diese getrennten Messungen der beiden Fernrohrlagen beziehen sich also die Wiederholungszahlen $2n$.

Die Wiederholungen werden nun natürlich nicht an denselben Kreisstellungen gemacht, sondern zur Eliminierung der Teilungsfehler an Kreisstellungen, welche für n Wiederholungen je um $\frac{360^\circ}{2n}$ oder $\frac{180^\circ}{n} = d$ gegenseitig verdreht sind, so dass die Kreisstellungen $0, d, 2d, 3d \dots$ auftreten. Weiter kommt es darauf an, die Kreisstellungen auf die $\frac{s(s-1)}{2}$ Winkel so zu verteilen, dass keine Richtung in irgend einer Kreisstellung mehr als *einmal* vorkommt, und dass die Anzahl der Kreisstellungen möglichst klein wird. Da man nun $\frac{s(s-1)}{2}$ Winkel zu messen, also $s(s-1)$ Richtungseinstellungen paarweise zu machen hat, also in einer Kreisstellung höchstens s Richtungen vorkommen dürfen, wenn s eine gerade Zahl ist, und höchstens $s-1$ Richtungen, wenn s eine ungerade Zahl ist, so muss irgend eine Richtung in zwei

aufeinander folgenden Kreisstellungen um den Betrag $\frac{180^\circ}{n(s-1)} = \delta$ oder $\frac{180^\circ}{ns} = \delta$ verändert erscheinen, je nachdem $(s-1)$ eine ungerade Zahl ist, oder s eine ungerade Zahl.

Nach diesen Grundsätzen sind die nachfolgenden Tabellen aufgestellt (nach Mitteilung von General Schreiber in „Zeitschr. f. Verm. 1878“, S. 215—217 und „Königl. Preuss. Landes-Triangulation“, IV. Teil, die Elbkette, 1891, S. 54—55). Dabei bedeuten I und II die Fernrohrlagen und $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ \dots$ die Kreisstellungen.

$$s = 2 \text{ Richtungen, } \frac{s-1}{2} = 1 \text{ Winkel, } n(s-1) = 12, d = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ, \delta = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

Winkel	I	I	I	I	I	I	II	II	II	II	II	II
1,2	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°

$$s = 3 \text{ Richtungen, } \frac{s-1}{2} = 3 \text{ Winkel, } ns = 24, d = \frac{180^\circ}{8} = 22,5^\circ, \delta = \frac{180^\circ}{24} = 7,5^\circ$$

Winkel	I	I	I	I	II	II	II	II
1,2	0°	22,5°	45°	67,5	90°	112,5°	135°	157,5°
1,3	7,5°	30°	52,5°	75°	97,5°	120°	142,5°	165°
2,3	15°	37,5°	60°	82,5°	105°	127,5°	150°	172,5°

$$s = 4 \text{ Richtungen, } \frac{s-1}{2} = 6 \text{ Winkel, } n(s-1) = 18$$

Winkel	I	I	I	II	II	II	
1,2	0°	30°	60°	90°	120°	150°	$d = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$
1,3	10	40	70	100	130	160	
1,4	20	50	80	110	140	170	$\delta = \frac{180^\circ}{18} = 10^\circ$
2,3	20	50	80	110	140	170	
2,4	10	40	70	100	130	160	
3,4	0	30	60	90	120	150	

$$s = 5 \text{ Richtungen, } \frac{s-1}{2} = 10 \text{ Winkel, } ns = 25$$

Winkel	I	I	I	II	II	II	
1,2	0°	36°	72°		108°	144°	
1,3	7,2	43,2	79,2		115,2	151,2	$d = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$
1,4	14,4	50,4	86,4		122,4	158,4	
1,5	21,6	57,6	93,6		129,6	165,6	$\delta = \frac{180^\circ}{25} = 7,2^\circ$
2,3	14,4	50,4	86,4		122,4	158,4	
2,4	21,6	57,6		93,6	129,6	165,6	
2,5	28,8	64,8		100,8	136,8	172,8	
3,4	28,8	64,8		100,8	136,8	172,8	
3,5	0	36		72	108	144	
4,5	7,2	43,2		79,2	115,2	151,2	

Zu der Tabelle für $s=5$ wollen wir bemerken, dass das frühere Beispiel von § 77. S. 262. Station Keulenberg, auch $s=5$ Strahlen hat, aber nicht $n=5$ Wiederholungen, sondern $n=6$; d. h. jenes Beispiel Keulenberg von 1872 war zwar in Hinsicht auf die Winkelmessungen in allen Combinationen, aber noch nicht in Hinsicht auf die Wiederholungszahlen nach der neuen Schreiber'schen Methode angeordnet.

$s = 6$ Richtungen, $s \frac{s-1}{2} = 15$ Winkel

$n = 4$, $d = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

$n(s-1) = 20$ $\delta = \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ$

Winkel	I	I	II	II
1,2	0°	45°	90°	135°
1,3	9	54	99	144
1,4	18	63	108	153
1,5	27	72	117	162
1,6	36	81	126	171
2,3	36	81	126	171
2,4	27	72	117	162
2,5	9	54	99	144
2,6	18	63	108	153
3,4	0	45	90	135
3,5	18	63	108	153
3,6	27	72	117	162
4,5	36	81	126	171
4,6	9	54	99	144
5,6	0	45	90	135

$s = 7$ Richtungen, $s \frac{s-1}{2} = 21$ Winkel

$n = 4$, $d = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

$ns = 28^\circ$ $\delta = \frac{180^\circ}{28} = 6,4286^\circ$

Winkel	I	I	II	II
1,2	0,0°	45,0°	90,0°	135,0°
1,3	6,4	51,4	96,4	141,4
1,4	12,9	57,9	102,9	147,9
1,5	19,3	64,3	109,3	154,3
1,6	25,7	70,7	115,7	160,7
1,7	32,1	77,1	122,1	167,1
2,3	13,9	57,9	102,9	147,9
2,4	19,3	64,3	109,3	154,3
2,5	25,7	70,7	115,7	160,7
2,6	32,1	77,1	122,1	167,1
2,7	38,6	83,6	128,6	173,6
3,4	25,7	70,7	115,7	160,7
3,5	32,1	77,1	122,1	167,1
3,6	38,6	83,6	128,6	173,6
3,7	0,0	45,0	90,0	135,0
4,5	38,6	83,6	128,6	173,6
4,6	0,0	45,0	90,0	135,0
4,7	6,4	51,4	96,4	141,4
5,6	6,4	51,4	96,4	141,4
5,7	12,9	57,9	102,9	147,9
6,7	19,3	64,3	109,3	154,3

Diese vorstehenden Tabellen gelten für freie Stationen; dagegen für Stationen mit Anschlusszwang wird nach § 78. verfahren, wie folgendes Beispiel zeigt, mit 2 festen Richtungen 1. und 2. und 3 neuen Richtungen 3. 4. 5.

Winkel	I	I	I. II	I. II	II	II
1,3	0°	..	60°	..	120°	..
2,3	..	30°	..	90°	..	150°
1,4	10	..	70	..	130	..
2,4	..	40	..	100	..	160
1,5	20	..	80	..	140	..
2,5	..	50	..	110	..	170
	I	I	I	II	II	II
3,4	20°	50°	80°	110°	140°	170°
3,5	10	40	70	100	130	160
4,5	0	30	60	90	120	150

Dieses Täfelchen ist wie folgt zu lesen:

Winkel 1,3 wird gemessen:

in der Kreisstellung 0°, Hingang und Rückgang in Fernrohrlage I

" " " 60 , Hingang in I, Rückgang in II

" " " 120 , Hingang und Rückgang in II.

Winkel 2, 3 wird gemessen:

in der Kreisstellung 30°, Hingang und Rückgang in Fernrohrlage I
 „ „ „ 90, Hingang in I, Rückgang in II
 „ „ „ 150, Hingang und Rückgang in II u. s. w.

Da jeder Winkel im ganzen ebenso oft in Fernrohrlage I wie in Fernrohrlage II gemessen werden muss, so ist es bei ungerader Kreisstellungszahl nicht anders zu machen, als mindestens in *einer* Kreisstellung Hingang und Rückgang in verschiedenen Fernrohrlagen zu messen.

Wenn die Winkelmessungen nach den vorstehenden Regeln auf allen Stationen angeordnet und ausgeglichen sind, so nimmt die Netzausgleichung in allem Wesentlichen die Form der Richtungsausgleichungen von § 59. und § 61. an, nur mit dem kleinen Unterschied, dass die einzelnen Richtungen nicht alle gleiches Gewicht (Gewicht = 1) haben, sondern Gewichte, welche nach der Tabelle auf S. 269 zwischen 24 und 28 schwanken. Man könnte vielleicht wohl auch die Gewichtsunterscheidungen zwischen 24, 25 und äusserstenfalls 28 vernachlässigen, doch bringt deren Mitführung gar keine Schwierigkeit.

Der Nachweis, dass die allgemeine Besselsche Netzausgleichung von § 72. mit § 55. durch die Schreibersche Winkelmessung in allen Combinationen übergeht in Netzausgleichung mit einzelnen Richtungen, ist in unserer vorigen 3. Auflage, 1890, S. 252–256 im einzelnen formell geführt worden, was wir diesesmal übergehen wollen, da der Grundgedanke dazu im Vorhergehenden genügend dargelegt ist. Statt dessen wollen wir im nächsten § 80. noch ein Netz-Beispiel zu dem besprochenen Verfahren betrachten.

§ 80. Die Elbkette.

Zu einem Beispiel der Triangulierungsbehandlung nach Schreibers Winkel-Methode nehmen wir die „Elbkette“, deren Netzbild auf S. 280–281 gegeben ist, nach dem amtlichen Werke: „Die königl. preussische Landestriangulation“. Hauptdreiecke. Vierter Teil. Die Elbkette. Zweite Abteilung, die Beobachtungen und deren Ausgleichung, gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme. Berlin 1891, (vgl. Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 399 und 1891, S. 455–459. Zur Anlage dieser Kette im Allgemeinen ist mitzuteilen:

Die Elbkette hat im Osten und im Westen feste Anschlüsse, welche in der Zeichnung auf S. 280–281 durch *starke Linien* angedeutet sind, nämlich:

im Osten Küstenvermessung:

Eichstädt-Eichberg $\log S = 4.619\,7943 \cdot 5$
 Azimut ($Et - Eg$) $= 177^\circ 19' 53,221''$
 „ ($Eg - Et$) $= 357^\circ 21' 14,480''$

im Westen: Boursberg-Havighorst $\log S = 4.430\,7451 \cdot 8$

Boursberg-Kaiserberg $\log S = 4.638\,2214 \cdot 6$

Winkel Havighorst-Boursberg-Kaiserberg $= 236^\circ 39' 50,203''$

Der Anschluss im Osten ist ein in allen Beziehungen fester, während im Westen, mit zwei Seiten und einem Winkel, nur ein Anschluss in Hinsicht auf die *relative* Lage der drei Punkte Kaiserberg, Boursberg, Havighorst stattfindet.

Abgesehen von den Nebenpunkten Schwarzenberg, Lüneburg und Brockhöfe hat die Elbkette:

$p = 28$ Punkte,

$l = 62$ zweiseitige Sichtlinien.

Es folgen hieraus nach den Regeln (11) S. 173:

$l - 2p + 3 = 9$ Seitengleichungen

und $l - p + 1 = 35$ Dreiecksgleichungen.

Im Ganzen 44 Bedingungsgleichungen.

Hiezu kommen aber noch zwei Seitengleichungen (V und XLVI) für linearen Zwangsanschluss, erstens im Westen mit den zwei Seiten Kaiserberg-Baursberg und Baursberg-Havighorst, und zweitens eine durchlaufende Seitengleichung von Westen nach Osten bei Eichstädt-Eichberg. Was den *Winkelzwang* in Baursberg betrifft, so erzeugt dieser nicht eine neue Gleichung, sondern wird dadurch ausgedrückt, dass die Richtungen von Baursberg nach Kaiserberg und nach Havighorst beide die *gleiche* Verbesserung erhalten. (Verbesserung (6) in der Gesamtnumerierung.)

Was die Anordnung der Messungen betrifft, so besteht die Eigentümlichkeit, dass die Messungen teils nach der alten Besselschen Satzmethode, teils nach der Schreiber'schen Methode ausgeführt sind, und zwar in folgender Verteilung (S. 280—281):

Stationen mit Winkelmessung in allen Combinationen nach Schreiber's Methode.

1. Kaisersberg . . .	2 Sichten
2. Stade	3 "
3. Baursberg	5 " (4)
4. Litberg	4 "
5. Havighorst	3 "
6. Vahrendorf	5 "
7. Wilsede	5 "
8. Steinhöhe	5 "
9. Hohen-Bünstorf . .	6 "
10. Lüss	3 "
11. Glienitz	4 "
12. Redemoissel	4 "
13. Pugelatz	6 "
14. Hölbeck	7 "
16. Zichtauer Berg . .	3 "
Summe 65 Sichten	

Stationen mit Richtungsmessungen nach der alten, Besselschen Methode.

15. Dolchauer Berg . .	6 Sichten
17. Polkern	4 "
18. Woltersdorf	6 "
19. Ruhnerberg	3 "
20. Hexenberg	3 "
21. Landsberg	5 "
22. Arneburg	6 "
23. Stöllner Berg	7 "
24. Gollwitzer Berg . .	5 "
25. Götzer Berg	5 "
26. Hagelsberg	3 "
27. Eichstädt	3 "
28. Eichberg	3 "
Summe 59 Sichten	

Im Ganzen $65 + 59 = 124$ Sichten, entsprechend den schon vorher erwähnten $l = 62$ zweiseitigen gemessenen Verbindungslinien.

Die Station Baursberg hat *zwei* feste Anschlussrichtungen, weshalb die Winkelmessung und Ausgleichung nach dem in § 78. beschriebenen Verfahren geschah.

Die Station Baursberg giebt nochmals Gelegenheit zur Ausgleichung von Winkeln mit Anschluss an zwei feste Richtungen. Man hat nämlich aus „Kön. Preuss. Landes-Triang., Hauptdreiecke, IV. Teil“, die Elbkette 1891, S. 69—70 durch Mittelbildung die folgenden 9 gemessenen Winkel und dazu einen fest gegebenen Winkel [1,5].

1. Havighorst	2. Vahrendorf	3. Litberg.	4. Stade.	5. Kaiserberg.
	(1,2) = $50^{\circ} 46' 35,17''$ $p = 1$	(1,3) = $107^{\circ} 55' 45,37''$ $p = 1$	(1,4) = $178^{\circ} 56' 37,13''$ $p = 1$	[1,5] = $236^{\circ} 41' 37,75''$ fest gegeben
		(2,3) = $57^{\circ} 9' 10,24''$ $p = 2$	(2,4) = $128^{\circ} 10' 3,29''$ $p = 2$	(2,5) = $186^{\circ} 55' 0,50''$ $p = 1$
			(3,4) = $71^{\circ} 0' 52,95''$ $p = 2$	(3,5) = $128^{\circ} 45' 51,98''$ $p = 1$
				(4,5) = $57^{\circ} 44' 58,60''$ $p = 1$

Zuerst eliminiert man den Anschlusszwang, wobei wir nur noch die Sekunden schreiben:

$$\begin{array}{lll}
 (1,2) = 35,17'' & (1,3) = 45,37'' & (1,4) = 37,13'' \\
 [1,5] - (2,5) = 37,25 & [1,5] - (3,5) = 45,77 & [1,5] - (4,5) = 39,15 \\
 \hline
 \text{Mittel } (1,2) = 36,21'' & \text{Mittel } (1,3) = 45,57'' & \text{Mittel } (1,4) = 38,14'' \\
 \text{Dazu von oben:} & (2,3) = 10,24 & (2,4) = 3,29 \\
 & & (3,4) = 52,95
 \end{array}$$

Diese 6 Winkel haben nun alle $p = 2$, sind also gleichgewichtig. Man gleicht dieselben so aus:

$$\begin{array}{llll}
 (1,2) = \begin{cases} 36,21'' \\ 36,21 \end{cases} & (1,3) = \begin{cases} 45,57'' \\ 45,57 \end{cases} & (1,4) = \begin{cases} 38,14'' \\ 38,14 \end{cases} & (2,3) = \begin{cases} 10,24'' \\ 10,24 \end{cases} \\
 (1,3) - (2,3) = 35,33 & (1,4) - (3,4) = 45,19 & (1,2) + (2,4) = 39,50 & (1,3) - (1,2) = 9,36 \\
 (1,4) - (2,4) = 34,85 & (1,2) - (2,3) = 46,45 & (1,3) + (3,4) = 38,52 & (3,4) - (2,4) = 10,34 \\
 \hline
 \text{Mittel } [1,2] = 35,65'' & [1,3] = 45,70'' & [1,4] = 38,58'' & [2,3] = 10,04''
 \end{array}$$

Ebenso auch noch $[2,4] = 2,92''$ und $[3,4] = 52,88''$.

Wenn man alles zusammen nimmt, die Grade und Minuten wieder zusetzt, und das Ergebnis der Ausgleichung in Form eines Richtungssatzes mit Havighorst als Anfang $= 0^\circ 0' 0''$ schreibt, so hat man:

1. Havighorst = $0^\circ 0' 0,00''$
2. Vahrendorf = $50 46 35,65$
3. Litberg = $107 55 45,70$
4. Stade = $178 56 38,58$
5. Kaiserberg = $236 41 37,75$

Betrachten wir weiter beispielshalber die Station Litberg näher, so sehen wir zuerst, dass dieselbe 4 Richtungen hat: Boursberg, Vahrendorf, Wilsede, Stade; es ist daher nach der Tabelle von § 79. auf S. 270 mit $s = 4$ gemessen worden, d. h. 6 Winkel mit $n = 6$ facher Wiederholung in Lage I und II oder $2n = 12$ facher Wiederholung der Einzellagen. Es treten daher auf S. 72—73 des amtlichen Werkes „Elbkette“ im Ganzen 72 Winkelmessungen auf mit den Normalgleichungen:

$$\begin{array}{ll}
 24 A = +1,35'' & A = +0,056'' \\
 24 B = +1,20 & B = +0,050 \\
 24 C = -3,80 & C = -0,158 \\
 24 D = +1,25 & D = +0,052
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 24 A \\ 24 B \\ 24 C \\ 24 D \end{array}} \right\} \quad (a)$$

Die hierzu gehörigen Gewichtsgleichungen werden ebenso einfach, nämlich:

$$\begin{array}{ll}
 (10) = 0,0417 [10] \\
 (11) = 0,0417 [11] \\
 (12) = 0,0417 [12] \\
 (13) = 0,0417 [13]
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (10) \\ (11) \\ (12) \\ (13) \end{array}} \right\} \quad (b)$$

Diese Gewichtsgleichungen sind entsprechend den Gewichtsgleichungen XV auf S. 159, deren erste heisst:

$$(1) = (\alpha \alpha) [1] + (\alpha \beta) [2] + (\alpha \gamma) [3]$$

Es ist also in der vorstehenden Gleichungsgruppe (b):

$$\begin{aligned}
 (\alpha \alpha) &= (\beta \beta) = (\gamma \gamma) = 0,0417 = \frac{1}{24} \\
 (\alpha \beta) &= (\alpha \gamma) = \dots = 0
 \end{aligned}$$

Auch die vorstehende Gruppe (a) ist im allgemeinen Falle durch die viel umständlicheren Gleichungen III und VIII c unten auf S. 156 vertreten.

Man sieht also deutlich, dass die Schreibersche Methode in der allgemeinen alten Besselschen Methode von S. 156—160 in aller Strenge mit enthalten ist, aber viel einfacher ist als jene.

In allem übrigen verweisen wir auf das oben S. 272 citierte amtliche Original-Werk „die Elbkette“.

Litteratur-Angaben zu § 75.—80.

Die ersten allgemeinen theoretischen Untersuchungen über Stations- und Netzausgleichungen mit Winkeln und Richtungen hat Hansen angestellt in seinen Abhandlungen „Von der Methode der kleinsten Quadrate 1868—1871“, (vgl. die Anmerkung unten auf S. 145). Hansen hat bereits die 3 Fälle erkannt, in welchen Stationsausgleichungen in Form von unabhängigen Richtungen dargestellt werden können, nämlich 1) lauter volle Sätze, 2) nicht mehr als 3 Strahlen, 3) Winkelmessung in allen Combinationen. Namentlich diesen dritten Fall hat Hansen behandelt in „fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in 10 Supplementen“ u. s. w. Abh. d. math. phys. Cl. d. K. sächs. Ges. d. Wiss., IX. Band, 1871, S. 169—184, „das Beobachtungsverfahren betreffend, welches Gauss in der Hannöverschen Gradmessung angewendet hat.“

General Schreiber hat die Methode der Winkelmessung in allen Combinationen, sowohl theoretisch behandelt als auch praktisch verwertet in dem amtlichen Werk: „Die Königl. Preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, II. Teil., 2. Abteilung, Berlin 1874“. Dazu gehört auch „Über die Anordnung von Horizontalwinkel-Beobachtungen auf der Station“, von Schreiber, „Zeitschr. f. Verm. 1878“, S. 209—237 und Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen, Schreiber, „Zeitschr. f. Verm., 1879“, S. 97—149.

Die Charakterisierung des Verfahrens der Winkelmessung in allen Combinationen ist von General Schreiber in der „Zeitschr. f. Verm. 1878“, S. 209—211 gegeben worden, wobei die Zeichen p , n , q andere Bedeutungen haben als in unserem Vorhergehenden, wie folgt:

Wenn auf einer Station n Richtungen vorhanden und p volle Beobachtungsreihen oder $\frac{p}{2}$ volle Sätze (zwei Beobachtungsreihen hin und her bilden einen Satz) gemessen sind, so ist mit $n \cdot p$ Einstellungen das Gewicht p für jede Richtung erreicht, wobei das Gewicht einer einmaligen Richtungsbeobachtung gleich 1 gesetzt ist. Misst man dagegen jeden Winkel q mal, so ist die Anzahl der Einstellungen gleich $n(n-1)q$, (da n Richtungen $\frac{1}{2}n(n-1)$ Winkel bilden). Um daher in beiden Fällen gleiche Gewichte der Resultate zu erhalten, muss man haben:

$$\frac{nq}{2} = p, \text{ woraus } q = \frac{2p}{n}$$

Es wird somit das Gewicht p für jede Richtung erreicht:

- 1) mit $n \cdot p$ Einstellungen bei Messung voller Sätze,
- 2) mit $2(n-1)p$ Einstellungen bei Messung von Winkeln.

Demnach erfordern Winkelbeobachtungen mehr, niemals aber doppelt so viel Einstellungen als Richtungsbeobachtungen, selbst nicht in deren günstigstem Falle (bei vollen Sätzen). Je weniger es auf einer Station möglich gewesen ist, in lauter vollen Sätzen zu beobachten (was schon bei Stationen von 4 Richtungen selten möglich ist), um so mehr geht die Überlegenheit der Richtungsbeobachtungen bezüglich der Einstellungszahl verloren; immerhin bleiben die letzteren gegen Winkelbeobachtungen im Vorteil. Oder mit andern Worten: je länger auf einer Station die Beobachtungsreihen, desto weniger Einstellungen sind nötig, um ein bestimmtes Gewicht der Resultate zu erreichen.

Trotz dieses Ergebnisses und im Widerspruch mit der seit Bessel allgemein befolgten geodätischen Praxis bin ich bei der Preussischen Landestriangulation (1868—1874) immer mehr zu der Überzeugung gekommen, dass die Überlegenheit langer Beobachtungsreihen gegenüber den kurzen, im Sinne der wie oben berechneten Gewichte, nur eine nominelle, an wirklicher Genauigkeit aber eine illusorische ist; dass vielmehr kurze Beobachtungsreihen den langen, insbesondere aber die kürzesten allen andern, d. h. reine Winkelbeobachtungen den Richtungsbeobachtungen vorzuziehen sind, weil sie bei gleichem Zeitaufwand genauere Resultate geben.

Die Gründe, die mich zu der oben ausgesprochenen Ansicht geführt haben, sind folgende:

1. Eine kurze Beobachtungsreihe giebt die Richtungsunterschiede im Allgemeinen genauer,

als eine lange, und dies ist um so mehr der Fall, je weniger fest die Aufstellung des Instrumentes und dieses selbst ist. Der obige Vergleich der Einstellungszahlen bei gleichen Gewichten der Resultate wird dadurch wesentlich zu Gunsten der Winkelbeobachtungen modifiziert. Dies tritt im stärksten Masse bei Pfeilerdrehung hervor, die bei Triangulationen in flachen, und selbst in bergigen, aber walddreichen Gegenden gar nicht zu vermeiden ist.

2. Bei kurzen Beobachtungsreihen kann man in derselben Zeit mehr Einstellungen machen, als bei langen, besonders aus dem Grunde, weil bei diesen der Zeitverlust infolge des Ausbleibens von Lichtern und sonstiger Unterbrechungen viel grösser ist, als bei jenen.

3. Bei Anwendung von Winkelbeobachtungen kann auf jeder Station nach einem bestimmten, im voraus entworfenen Beobachtungsplan, welcher die Anzahl der Messungen jedes Winkels, die Fernrohr- und Kreislagen u. s. w. genau vorschreibt, beobachtet werden, während eine derartige Anordnung für Richtungsbeobachtungen undurchführbar ist. Bei erstern wird dadurch eine weit vollständigere Elimination von konstanten Fehlern und Teilungsfehlern möglich.

4. Auf den meisten Stationen giebt es eine oder mehrere Richtungen, deren Beobachtung weit schwerer und seltener als die der übrigen, und nur mittelst rascher Wahrnehmung einzelner Gelegenheiten von kurzer Dauer gelingt. Zur Ausnützung solcher Gelegenheiten ist die Winkel-methode weit geeigneter als die Richtungsmethode.

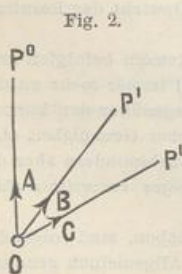
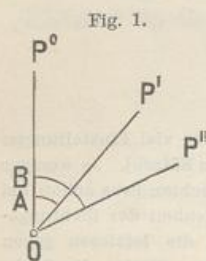
Diese Erwägungen und Erfahrungen sind es, die mich schon seit dem Jahre 1871 zur ausschliesslichen Anwendung von Winkelbeobachtungen geführt haben (vgl. Hauptdreiecke, 2. Band, 2. Abteilung: die Stationen Marienberg, Brautberg, Keulenberg, Brandberg und Schneekoppe der Märkisch-Schlesischen Kette, sowie im 3. Bande sämtliche Stationen des Märkischen Netzes); aber erst 1875 habe ich dieser Methode diejenige Ausbildung gegeben, in der sie seitdem konsequent von der trigonometrischen Abteilung für alle Messungen erster Ordnung angewandt ist, und zwar mit grossem Gewinn, nicht nur an Genauigkeit, sondern auch an Zeit.

§ 81. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkelausgleichung und Richtungsangleichung.

Nachdem wir im Bisherigen schon manche Beziehungen zwischen Winkeln und Richtungen betrachtet haben, z. B. die Stationsausgleichung von Winkelmessungen in allen Combinationen sowohl mit Winkeln als auch mit Richtungen als Unbekannten (§ 77.), wollen wir noch eine zur Aufklärung im Allgemeinen nützliche Theorie vorführen aus dem Werke: „Die Königlich Preussische Landestriangulation“, Hauptdreiecke. Zweiter Teil. Zweite Abteilung. Berlin 1874. Auf S. 303–313

dieselbst findet sich eine Abhandlung von *Schreiber*: „Vereinfachte Form der Stationsausgleichungsergebnisse“, deren Grundgedanken darin besteht, dass den Stationsausgleichungsergebnissen nicht (wie bei Bessel) die Form von *Winkeln* ..., sondern die Form von *Richtungen* gegeben wird.

Wenn 3 Strahlen $OP^0 OP' OP''$ mehrfach eingeschnitten sind, so kann man als Unbekannte der Ausgleichung zunächst die 2 Winkel A, B betrachten, welche die Strahlen $OP' OP''$ mit dem Strahl OP^0 bilden (Fig. 1.). In dieser Weise wird bei der Besselschen Ausgleichung verfahren (welche in unserem § 71. gelehrt wurde). Wir gehen nun aber zu einer anderen Anschauung über, und betrachten nach Fig. 2. die 3 Richtungen ABC als Unbekannte, dann ist vorerst so viel klar, dass $B - A$ nach Fig. 2. = A nach Fig. 1. ist, oder allgemeiner:



Annahme Fig. 1.

Winkel A = Richtungsunterschied

„ B „

Annahme Fig. 2.

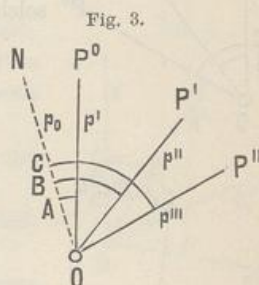
$B - A$

$C - A$

(1)

Um die zweite Annahme aus der ersten hervorgehen zu lassen, erinnere man sich, dass „Richtungen“ nichts anderes sind, als Winkel, welche die geodätischen Strahlen OP^0, OP', OP'' mit irgend einem, seiner geodätischen Lage nach unbekannten, aber für alle Richtungen gemeinsamen Anfangsstrahl ON bilden, weshalb die Richtungen A, B, C von Fig. 2. ausführlicher durch Fig. 3. dargestellt werden können. Wenn nun in Fig. 3. ON ebenfalls ein geodätischer, miteingeschnittener Strahl wäre, so würde man offenbar für Fig. 3. ein Normalgleichungssystem von der allgemeinen Form (10) § 71. S. 235 erhalten, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} (a a) A + (a b) B + (a c) C + (a l) &= 0 \\ (a b) A + (b b) B + (b c) C + (b l) &= 0 \\ (a c) A + (b c) B + (c c) C + (c l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



wobei die Coefficienten $(a a), (a b), \dots$ die Bedeutungen von § 71. S. 236 haben, jedoch so, dass (nach Fig. 3.) p^0 dem fingierten Strahl ON entspricht, p' dem Strahl P^0 u. s. w.

Um vollends die Normalgleichungen (2) völlig dem Falle von Fig. 3. oder Fig. 2. anzupassen, hat man nichts zu thun, als alle p^0 , d. h. $p_1^0, p_2^0, p_3^0, \dots = \text{Null}$ zu setzen. Thut man dieses in (8), (9) und (11) § 71. S. 235–236, so findet man:

$$\begin{aligned} (a a) + (a b) + (a c) &= [p'] - \frac{p_1'}{[p_1]} (p_1' + p_1'' + p_1''' + \dots) \\ &\quad - \frac{p_2'}{[p_2]} (p_2' + p_2'' + p_2''' + \dots) \\ &\quad - \frac{p_3'}{[p_3]} (p_3' + p_3'' + p_3''' + \dots) \end{aligned}$$

Nun ist aber in diesem Falle, weil alle $p^0 = 0$ sind,

$$\begin{aligned} [p_1] &= p_1' + p_1'' + p_1''' + \dots \\ [p_2] &= p_2' + p_2'' + p_2''' + \dots \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

also $(a a) + (a b) + (a c) = [p'] - (p_1' + p_2' + p_3' + \dots) = 0$

Auf ähnliche Weise beweist man auch, dass alle anderen Vertikalreihen der Normalgleichungen (2) die Summe Null geben, d. h.:

$$\left. \begin{aligned} (a a) + (a b) + (a c) &= 0 \\ (a b) + (b b) + (b c) &= 0 \\ (a c) + (b c) + (c c) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$(a l) + (b l) + (c l) = 0 \quad (4)$$

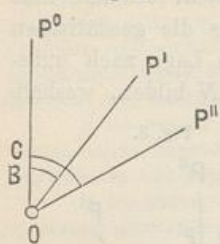
Natürgemäß haben wir damit gefunden, dass ein Normalgleichungssystem von der Form (2), welches sich auf *Richtungen* A, B, C, \dots bezieht, keine eindeutige Auflösung zulässt, denn diese Gleichungen (2) sind vermöge (3) und (4) nicht untereinander unabhängig.

Obgleich die elementare Algebra die Unmöglichkeit einer eindeutigen Auflösung der Gleichungen (2) lehrt, wollen wir dieses doch noch unmittelbar verfolgen: Wenn A, B, C ein System ist, welches den Gleichungen (2) genügt, und man setzt an deren Stelle bzw. $A+z, B+z, C+z$, so hat man aus (2):

$$(a a)(A+z) + (a b)(B+z) + (a c)(C+z) + (a l) = 0,$$

d. h.: $(a a)A + (a b)B + (a c)C + (a l) + \{(a a) + (a b) + (a c)\}z = 0$

Fig. 4.



Der erste Teil verschwindet wegen (2) und der zweite Teil wegen (3); es ist also die Gleichung, welche für A, B, C befriedigt war, auch für $A+z, B+z, C+z$ allgemein richtig.

Da eine Richtung unbestimmt bleibt, so kann man eine solche $= 0$ setzen, z. B. $A = 0$ gesetzt, giebt aus (2):

$$\left. \begin{aligned} (a\ b) B + (a\ c) C + (a\ l) &= 0 \\ (b\ b) B + (b\ c) C + (b\ l) &= 0 \\ (c\ b) B + (c\ c) C + (c\ l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wegen (3) und (4) kann man hier eine Gleichung beliebig weglassen, z. B. die erste, und dann erhält man die Winkel B und C (Fig. 4.) eindeutig bestimmt durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (b\ b) B + (b\ c) C + (b\ l) &= 0 \\ (c\ b) B + (c\ c) C + (c\ l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die umgekehrte Operation, nämlich Winkelgleichungen in Richtungsgleichungen zu verwandeln, ergibt sich ebenfalls aus (3) und (4), wie an einem Zahlenbeispiel erläutert werden soll.

Wenn gegeben ist (zu Fig. 5.):

$$\left. \begin{aligned} + 27 A - 9 B - 4 C + 13,4 &= 0 \\ - 9 A + 18 B - 6 C - 7,0 &= 0 \\ - 4 A - 6 B + 15 C - 12,9 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

so bildet man die Summengleichung:

$$+ 14 A + 3 B + 5 C - 6,5 = 0$$

und diese setzt man mit Änderung der Vorzeichen zu den Gleichungen (7); also:

Summen:

$$\left. \begin{array}{l} - 22 \\ + 14 \\ + 3 \\ + 5 \end{array} \right\} \left. \begin{aligned} - 14 A - 3 B - 5 C + 6,5 &= 0 \\ + 27 A - 9 B - 4 C + 13,4 &= 0 \\ - 9 A + 18 B - 6 C - 7,0 &= 0 \\ - 4 A - 6 B + 15 C - 12,9 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Endlich bildet man daraus, mit Verschiebung der Bezeichnungen $A B C D$ nach Fig. 1. und Fig. 2.:

$$\left. \begin{aligned} + 22 A - 14 B - 3 C - 5 D + 6,5 &= 0 \\ - 14 A + 27 B - 9 C - 4 D + 13,4 &= 0 \\ - 3 A - 9 B + 18 C - 6 D - 7,0 &= 0 \\ - 5 A - 4 B - 6 C + 15 D - 12,9 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Dadurch haben wir nun die 3 Normalgleichungen (7), welche sich auf 3 Winkel A, B, C von Fig. 5. beziehen, umgewandelt in 4 Normalgleichungen (9) mit 4 Richtungen A, B, C, D von Fig. 6.

Man kann nun wieder irgend eine *andere* Richtung $= 0$ setzen, z. B. D , und erhält damit aus (9):

$$\left. \begin{aligned} + 22 A - 14 B - 3 C + 6,5 &= 0 \\ - 14 A + 27 B - 9 C + 13,4 &= 0 \\ - 3 A - 9 B + 18 C - 7,0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Fig. 5.

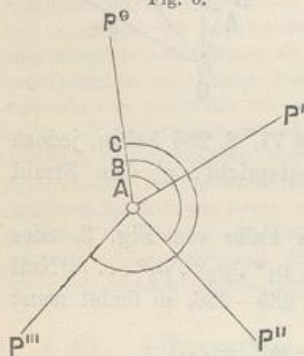


Fig. 6.

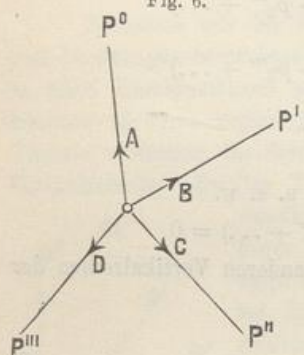
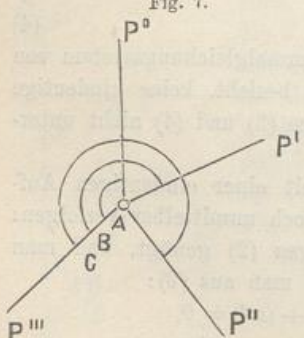


Fig. 7.



Dieses Winkelsystem (10) bezieht sich auf dieselben 4 Strahlen wie das Winkelsystem (7), abgesehen von den Bezeichnungen $A B C$ (vgl. Fig. 5. und 7.). Man kann also durch Vermittlung von Richtungen ein Winkelsystem auf andere Nullpunkte reduzieren.

Wir wollen diese allgemeine Theorie dazu benützen, bzw. daran erproben, dass wir den schon in § 77. erledigten Fall von Winkelmessungen in allen Combinationen *nochmals* vornehmen:

Fig. 8. stellt einen solchen Fall mit 4 Strahlen und 6 Winkeln vor.

Zwischen den Strahlen 1, 2, 3, 4 sind alle 6 Winkelcombinationen (1,2) (1,3) (1,4) (2,3) (2,4) (3,4) gemessen.

Die 3 Winkel $A B C$ von Fig. 8. seien die unabhängigen Unbekannten, dann hat man für die erste Messung die Fehlergleichung:

$$v_{12} = A - (1,2),$$

oder für die 4te Messung besteht die Fehlergleichung:

$$v_{23} = B - A - (2,3) \text{ u. s. w.}$$

Alle 6 derartigen Fehlergleichungen sind (ebenso wie in (2) S. 260):

$$\left. \begin{aligned} v_{12} &= +A \quad \dots - (1,2) \\ v_{13} &= \dots + B \quad \dots - (1,3) \\ v_{14} &= \dots \dots + C - (1,4) \\ v_{23} &= -A + B \quad \dots - (2,3) \\ v_{24} &= -A \quad \dots + C - (2,4) \\ v_{34} &= \dots - B + C - (3,4) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

die Normalgleichungen hiezu:

$$\left. \begin{aligned} 3A - B - C - (al) &= 0 \\ -A + 3B - C - (bl) &= 0 \\ -A - B + 3C - (cl) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Absolutglieder hiezu sind (ebenso wie bei (3) S. 260):

$$\left. \begin{aligned} (al) &= (1,2) - (2,3) - (2,4) \\ (bl) &= (1,3) + (2,3) - (3,4) \\ (cl) &= (1,4) + (2,4) + (3,4) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Nach dem Verfahren, welches an dem Beispiel von (7) bis (9) erläutert wurde, wird das auf Winkel $A B C$ bezügliche System (12) in ein für Richtungen giltiges System umgewandelt, worin nach Fig. 8. jetzt die Richtungen X, A', B', C' statt der Winkel $A B C$ eingeführt sind.

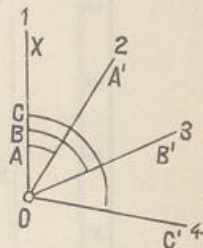
Man findet:

$$\left. \begin{aligned} +3X - A' - B' - C' + (al) + (bl) + (cl) &= 0 \\ -X + 3A' - B' - C' - (al) &= 0 \\ -X - A' + 3B' - C' - (bl) &= 0 \\ -X - A' - B' + 3C' - (cl) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Dass dieses (14) ein dem Winkelsystem (12) äquivalentes Richtungssystem ist, zeigt sich darin, dass die Summen-Beziehungen (3) und (4) in (14) erfüllt sind.

(Fortsetzung s. S. 282.)

Fig. 8.



(Fortsetzung von S. 279.)

Da das System (14) keine eindeutige Lösung giebt, muss eine Willkür eintreten; man nimmt möglichst bequem:

$$X + A' + B' + C' = 0 \quad (15)$$

addiert diese Gleichung zu jeder einzelnen von (14) und erhält damit:

$$\left. \begin{aligned} 4X \dots + (al) + (bl) + (cl) &= 0 \\ 4A' \dots - (al) &= 0 \\ 4B' \dots - (bl) &= 0 \\ 4C' + (cl) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Damit bekommt man 4 Werte X, A', B', C' , deren Differenzen $A' - X, B' - X, C' - X$ nichts anderes sind als die A, B, C aus (12), was sich am einfachsten dadurch beweist, dass man in (12) die Summe der 3 Gleichungen zu jeder einzeln addiert und dann bequem nach A, B, C auflöst.

Dem System (16) entspricht das folgende Gewichtsgleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4(\alpha\alpha) \dots &= 0 \\ 4(\alpha\beta) \dots &= 0 \\ 4(\alpha\gamma) \dots &= 0 \\ 4(\alpha\delta) &= 0 \end{aligned}$$

woraus

$$(\alpha\alpha) = \frac{1}{4}$$

$$(\alpha\beta) = 0 \quad (\alpha\gamma) = 0 \quad (\alpha\delta) = 0$$

oder allgemein für eine Station mit s Strahlen:

$$(\alpha\alpha) = (\beta\beta) = (\gamma\gamma) = \dots = \frac{1}{s}$$

$$(\alpha\beta) = (\alpha\gamma) = (\beta\gamma) = \dots = 0$$

Damit haben wir die Hauptteile der Theorie von § 77. auf einem zweiten Wege gefunden.

§ 82. Genäherte Richtungsgewichte.

Die Zusammenfassung und Ausgleichung von Stationsmessungen ist in Form von Richtungen mit Richtungsgewichten nach dem bisherigen möglich in 3 Fällen:

- 1) bei lauter vollen Richtungssätzen (§ 75.),
- 2) in dem Falle dreier Richtungen (§ 76.),
- 3) bei Winkelmessungen in allen Combinationen (§ 77.)

In diesen Fällen kann die Gesamtheit aller auf einer Station gemachten Theodolitmessungen für Netzausgleichungszwecke vollkommen ersetzt werden durch einen Satz von Richtungsmessungen, dessen Richtungen gewisse angebbare (bei 1) und 3) gleiche) Einzelgewichte zukommen, so dass darauf eine Ausgleichung nach § 40. gegründet werden kann.

In fast allen anderen Fällen von Stationsmessungen kann das Ergebnis der Stationsausgleichung nur als ein Satz von Winkeln oder Richtungen in Verbindung mit einer Gruppe von Gewichtsgleichungen weiter zur Netzausgleichung benützt werden, und diese Gewichtsgleichungen (XV. S. 159) mit ihren Gewichtscoefficienten $[\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\alpha\gamma] \dots$ sind es hauptsächlich, welche eine derartige Netzausgleichung ungemein schwerfällig und mühsam machen, wie schon an unserem kleinen Schulbeispiel von § 72. gesehen werden kann.

Aber auch abgesehen von dieser Rechenmühe hat diese Besselsche Netzausgleichung mit Gewichtsgleichungen sich stets mit einem noch wichtigeren Übelstande behaftet gezeigt, indem der mittlere Fehler der Netzausgleichung (m_2 oder μ_2 unten auf S. 159) erheblich grösser gefunden wurde als der mittlere Stationsfehler (m_1 oder μ_1 auf S. 157), was auf Fehlerursachen hindeutet, welche auf den Stationen verborgen bleiben und erst im Netze zu Tage treten.

Alle diese Umstände haben schon lange den Wunsch der Geodäten erzeugt, Netzausgleichungen für beliebige Stationsmessungen ohne Gewichtsgleichungen, mit näherungsweise anzunehmenden Einzelgewichten der Richtungen durchzuführen. So wurde schon etwa 1850 die grosse britische Triangulierung (Ordnance trigonometrical survey) nach Einzelgewichten ausgeglichen, wobei teils die Abweichungen der einzelnen Richtungsmessungen von ihrem Mittel, teils die Zahl der Einstellungen als Genauigkeitsmass diente. Damals vor 1858 war die Theorie der Netzausgleichungen überhaupt noch nicht völlig klar vorhanden, und jedenfalls den britischen Geodäten noch nicht verfügbar; jenes Verfahren war das Ergebnis einer gesunden Empirie.

Später, etwa um 1870 haben wir ein ähnliches Verfahren bei der Neuausgleichung der alten Bayerischen Triangulierung durch v. Orff, welcher schlechtweg die „Anschnittszahlen“ als Richtungsgewichte nahm, wie wir beispielshalber in § 76. S. 258 gezeigt haben.

Einen wesentlichen Fortschritt hat die Bestimmung genäherter Richtungsgewichte gemacht in einer Theorie von *Helmert*, welche enthalten ist in der „Veröffentlichung des Königlich preussischen Geodätischen Instituts und Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Die Europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft, Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von England bis Polen“, Berlin 1893, S. 37–42, und in einer Abhandlung in „Astr. Nachrichten“, 134. Band, 1893, S. 281–296 „Über eine Vereinfachung bei der Einführung von Stationsergebnissen in der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes.“ (Bericht hierüber Z. f. V. 1894, S. 212–222).

Indem wir diese Theorie hier mitteilen, wollen wir auch die Helmertschen Bezeichnungen wegen des Anschlusses an die citierten Originalschriften, hier beibehalten, und müssen dazu zuerst bemerken, dass nun mit q eine Gewichts-*Reciproke* bezeichnet werden soll im Gegensatz zu unserem vorhergehenden § 76. u. s. w., wo q das Gewicht selbst einer ausgeglichenen Richtung war.

Auch seien die Gewichts-Coefficienten, welche in unserem früheren § 28. teils mit Q_1, Q_2, Q_3 , teils mit $[\alpha\alpha], [\alpha\beta], [\alpha\gamma]$ u. s. w. bezeichnet waren, nun in erster Linie mit Q_{22}, Q_{23}, Q_{24} u. s. w. bezeichnet.

Wenn eine Stationsausgleichung nach § 71. vorliegt mit zwei Winkeln x' und x'' als unabhängigen Unbekannten, so findet man die Gewichte von x' und x'' bei der Ausgleichung bzw. $p' = \frac{1}{[\alpha\alpha]}$ und $p'' = \frac{1}{[\beta\beta]}$, wobei $[\alpha\alpha]$ und $[\beta\beta]$ die Gewichts-Coefficienten nach § 28. und § 29. sind. Auch das Gewicht P der Differenz $x'' - x'$, d. h. des Winkels zwischen den zwei Strahlen P' und P'' von Fig. 1. S. 232 lässt sich angeben, denn es ist $x'' - x'$ eine lineare Funktion der unabhängigen x' und x'' , nämlich nach (1) S. 92.:

$$x'' - x' = F = f_1 x' + f_2 x'' + f_3 x''' \\ f_1 = -1, \quad f_2 = +1, \quad f_3 = 0$$

wobei

folglich nach (3) S. 92:

$$\frac{1}{P} = [\alpha \alpha] - 2 [\alpha \beta] + [\beta \beta]$$

Eine solche Formel gilt für jeden nach der Ausgleichung erhaltenen Winkel, und wenn wir nach dem vorhergehenden Citate die Gewichtscoefficienten anders bezeichnen, nämlich $[\alpha \alpha] = Q_{22}$, $[\alpha \beta] = Q_{23}$, $[\beta \beta] = Q_{33}$, und die Winkel selbst $x' = (1,2)$, $x'' = (1,3)$, also $x'' - x' = (2,3)$, so wird die Gewichtsreciproke des Winkels (2,3) ausgedrückt durch

$$q_{23} = Q_{22} - 2 Q_{23} + Q_{33}$$

Nach diesen Festsetzungen über die Wahl der Bezeichnungen betrachten wir zunächst den Fall einer Stationsausgleichung mit 4 Strahlen.

Zwischen diesen 4 Strahlen 1, 2, 3, 4 bestehen 6 Winkel, welche nach der Ausgleichung folgende Gewichte haben sollen:

$$\left. \begin{array}{llll} \text{Winkel (1,2) mit Gewicht} = 1 : Q_{22} & & = 1 : q_{12} \\ \text{„ (1,3) „ „ „ } 1 : Q_{33} & & = 1 : q_{13} \\ \text{„ (1,4) „ „ „ } 1 : Q_{44} & & = 1 : q_{14} \\ \text{„ (2,3) „ „ „ } 1 : (Q_{22} + Q_{33} - 2 Q_{23}) = 1 : q_{23} \\ \text{„ (2,4) „ „ „ } 1 : (Q_{22} + Q_{44} - 2 Q_{24}) = 1 : q_{24} \\ \text{„ (3,4) „ „ „ } 1 : (Q_{33} + Q_{44} - 2 Q_{34}) = 1 : q_{34} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Nun soll ein Satz von Richtungsmessungen mit Einzelgewichten der einzelnen Strahlen an die Stelle des Ausgleichungsergebnisses gesetzt werden; sind die Reciproken der Einzelgewichte der 4 Strahlen bzw. q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\left. \begin{array}{lll} q_{12} = q_1 + q_2 & q_{13} = q_1 + q_3 & q_{14} = q_1 + q_4 \\ & q_{23} = q_2 + q_3 & q_{24} = q_2 + q_4 \\ & & q_{34} = q_3 + q_4 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Wenn nur drei Strahlen vorhanden wären, so würden auch nur 3 von diesen Gleichungen vorhanden sein, nämlich:

$$\left. \begin{array}{ll} q_{12} = q_1 + q_2 & q_{13} = q_1 + q_3 \\ & q_{23} = q_2 + q_3 \end{array} \right\} \quad (3)$$

und daraus lassen sich die 3 Unbekannten q_1 , q_2 , q_3 geradezu bestimmen, nämlich:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = \frac{q_{12} + q_{13} - q_{23}}{2} \\ q_2 = \frac{q_{12} - q_{13} + q_{23}}{2} \\ q_3 = \frac{-q_{12} + q_{13} + q_{23}}{2} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Wenn man nach (1) hier einführt:

$$\begin{aligned} q_{12} &= Q_{22} \quad , \quad q_{13} = Q_{33} \quad , \quad q_{23} = Q_{22} + Q_{33} - 2 Q_{23}, \\ \text{so erhält man aus (4) die Gewichtsreciproken (ebenso wie (19) S. 258):} \\ q_1 &= Q_{23} \quad , \quad q_2 = Q_{22} - Q_{23} \quad , \quad q_3 = Q_{33} - Q_{23} \end{aligned} \quad (5)$$

Durch diese Gleichungen (3)–(5) haben wir in neuer Form nochmals dasselbe gefunden, was als Spezialfall schon in § 76. behandelt worden ist, nämlich dass in dem besonderen Falle dreier Strahlen die Stationsausgleichung sich stets in der Form von Richtungen mit Einzelgewichten $\frac{1}{q}$ der ausgeglichenen Richtungen erledigen lässt.

wobei noch die Summenprobe besteht:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \frac{S}{2(n-1)} \quad (12)$$

Geht man auf die Bedeutung von s und S als Funktionen der Q zurück, so findet man die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{2(Q_{23} + Q_{24} + \dots)}{(n-1)(n-2)} \\ q_2 &= q_1 + Q_{22} - \frac{2(Q_{23} + Q_{24} + Q_{25} + \dots + Q_{2n})}{n-2} \\ q_3 &= q_1 + Q_{33} - \frac{2(Q_{32} + Q_{34} + Q_{35} + \dots + Q_{3n})}{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

u. s. w., wobei in den Summen nur nichtquadratische Indices zu beachten sind, also nur z. B. Q_{32} , Q_{34} ... nicht aber Q_{33} , u. s. w.

Wir betrachten bei n Strahlen die $(n-1)$ Winkel, welche irgend ein Strahl mit den übrigen Strahlen bildet, z. B. den Strahl 1 in Verbindung mit den Strahlen 2, 3, 4..., dann kann man die Fehlerquadratsumme für solche $n-1$ Winkel doppelt ausdrücken, sowohl in den q_{12} , q_{13} ... als auch in den q_1 , q_2 , q_3 ..., nämlich wegen (9):

$$q_{12} + q_{13} + q_{14} + \dots = s_1$$

oder zweitens wegen der Normalgleichung (8):

$$(q_1 + q_2) + (q_1 + q_3) + (q_1 + q_4) + \dots = (n-1)q_1 + q_2 + q_3 + \dots = s_1 \quad (14)$$

Diese beiden Summen sind also *gleich*, was sehr zu Gunsten der Näherungen q_1 , q_2 , q_3 , q_4 spricht, während es nicht günstig ist, dass die Abweichungen zwischen q_{12} und $q_1 + q_2$ u. s. w. in der Ausgleichung alle als *gleich* zulässig behandelt wurden. Den besonderen Fall nur *dreier* Strahlen haben wir bereits bei (3)–(5) als Zwischenbemerkung abgehandelt, und wir haben in (5) gesehen, dass man die Reciproken q der Richtungsgewichte schlechthin in den Gewichtscoefficienten ausdrücken kann; indessen kann man in diesem einfachen Falle auch alles in den Normalgleichungscoefficienten $[a a]$, $[a b]$, $[b b]$ selbst ausdrücken, denn nach (18) und (19) S. 58 ist:

$$[a a] = Q_{22} = \frac{[b b]}{D}, \quad [a b] = Q_{23} = \frac{-[a b]}{D}, \quad [b b] = Q_{33} = \frac{[a a]}{D} \quad (15)$$

wo

$$D = [a a][b b] - [a b][a b]$$

daraus findet man in Verbindung mit (5):

$$q_1 = \frac{-[a b]}{D}, \quad q_2 = \frac{[b b] + [a b]}{D}, \quad q_3 = \frac{[a a] + [a b]}{D} \quad (16)$$

dieses (15) gilt dann, wenn die Stationsausgleichung mit 2 *Winkeln* als Unbekannten gemacht ist; wenn dagegen 3 *Richtungen* als Unbekannte eingeführt sind, so werden die Normalgleichungen folgende Formen annehmen:

$$\left. \begin{aligned} (a a) A + (a b) B + (a c) C + (a l) &= 0 \\ (a b) A + (b b) B + (b c) C + (b l) &= 0 \\ (a c) A + (b c) B + (c c) C + (c l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Da A , B , C *Richtungen* (und nicht zwei Winkel) sind, können diese 3 Gleichungen nicht unabhängig sein, sondern nach (3) § 81. S. 277 bestehen die Beziehungen:

$$(a a) + (a b) + (a c) = 0, \quad (a b) + (b b) + (b c) = 0, \quad (a c) + (b c) + (c c) = 0 \quad (18)$$

und eine der 3 Unbekannten ist willkürlich, weshalb etwa $A = 0$ gesetzt wird und dann bleibt von (17) nur:

$$\left. \begin{aligned} (b\ b) B + (b\ c) C + (b\ l) &= 0 \\ (b\ c) B + (c\ c) C + (c\ l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Bei zwei Gleichungen kann man aber wieder die Gewichtscoefficienten Q unmittelbar in den Coefficienten $(b\ b)$ $(b\ c)$ ausdrücken, nämlich ebenso wie bei (15):

$$\left. \begin{aligned} Q_{22} &= \frac{(c\ c)}{(b\ b)(c\ c) - (b\ c)(b\ c)} & Q_{33} &= \frac{(b\ b)}{(b\ b)(c\ c) - (b\ c)(b\ c)} \\ Q_{23} &= \frac{-(b\ c)}{(b\ b)(c\ c) - (b\ c)(b\ c)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Wegen (18) lässt sich (20) mit (5) auf folgende Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{q_1} &= (a\ a) - \frac{(a\ b)(a\ c)}{(b\ c)} \\ \frac{1}{q_2} &= (b\ b) - \frac{(a\ b)(b\ c)}{(a\ c)} \\ \frac{1}{q_3} &= (c\ c) - \frac{(a\ c)(b\ c)}{(a\ b)} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

In den allgemeinen Formeln muss auch der Fall inbegriffen sein, dass zwischen n Strahlen alle $n \frac{n-1}{2}$ Winkel gleichgewichtig gemessen sind. Setzt man dabei das Gewicht eines gemessenen Winkels $= 1$, so werden nach § 77. S. 265 nach der Ausgleichung alle Winkelgewichte $= \frac{n}{2}$, also die Reciproken der Gewichte werden:

$$q_{12} = q_{13} = q_{14} = \dots q_{1(n-1)} = \frac{2}{n}$$

dann nach (9):

$$q_{12} + q_{13} + q_{14} + \dots + q_{1(n-1)} = \frac{2(n-1)}{n} = s_1$$

Ebenso auch $s_2, s_3 \dots s_n$ und also $S = n s_1 = 2(n-1)$

Also nun nach (11):

$$q_1 = \frac{2(n-1)}{n(n-2)} - \frac{2(n-1)}{2(n-1)(n-2)} = \frac{1}{n}$$

d. h. das Gewicht einer ausgeglichenen Richtung ist $= n$, als Ergebnis des Näherungsverfahrens, was mit dem strengen Verfahren stimmt.

Hat man endlich m volle Sätze bei n Strahlen, so sind nach der Mittelbildung alle Richtungsgewichte $= m$ oder die Reciproken der Winkelgewichte:

$$q_{12} = q_{13} = \dots = \frac{2}{m}$$

$$\text{also } s_1 = s_2 = \dots = \frac{2(n-1)}{m}, \quad S = \frac{2n(n-1)}{m}$$

$$q_1 = \frac{2(n-1)}{(n-2)m} - \frac{2n(n-1)}{2m(n-1)(n-2)} = \frac{1}{m}$$

also wieder Übereinstimmung mit der strengen Theorie.

Das Helmert'sche Näherungsverfahren befolgt also in den betrachteten 3 Fällen,

in welchen strenge Richtungsgewichte möglich sind, die strenge Theorie und schliesst sich im übrigen näherungsweise an.

Um ein vollständiges Beispiel zu haben, nehmen wir eine Stationsausgleichung, welche an anderem Orte (Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen I. S. 66) völlig durchgerechnet wurde, nach Königl. Preuss. Landestriangulation, Hauptdreiecke, I. Teil, 2. Auflage. Berlin 1870, S. 57.

Station Lautern:

Sternberg	Paulinen	Schuppenbeil	Rössel	
$p_1^\circ = 18$	$p_1' = 18$	$p_1'' = 18$	$p_1''' = 18$	$[p_1] = 72$
$p_2^\circ = 6$	$p_2' = 6$	$p_2'' = 6$	$p_2''' = 6$	$[p_2] = 12$
$p_3^\circ = 6$	$p_3' = 6$	$p_3'' = 6$	$p_3''' = 6$	$[p_3] = 18$
$[p^\circ] = 24$	$[p'] = 24$	$[p''] = 24$	$[p'''] = 30$	$[p] = 102$

Nach (11) § 71. S. 236 berechnet man:

$$(a a) = 24 - \frac{18}{72} 18 - \dots - \frac{6}{18} 6 = 17,50$$

$$(a b) = -\frac{18}{72} 18 - \dots - \frac{6}{18} 6 = -6,50 \text{ u. s. w.}$$

Die Stationsausgleichung selbst interessiert uns hier nicht, sondern nur die Gewichtsbestimmungen; wir bilden daher sofort die Gewichtsgleichungen nach (20) S. 90:

Auflösung

$$+ 17,50 [\alpha \alpha] - 6,50 [\alpha \beta] - 6,50 [\alpha \gamma] - 1 = 0 \quad [\alpha \alpha] = 0,094$$

$$- 6,50 [\alpha \alpha] + 17,50 [\alpha \beta] - 6,50 [\alpha \gamma] = 0 \quad [\alpha \beta] = 0,052$$

$$- 6,50 [\alpha \alpha] - 6,50 [\alpha \beta] + 20,50 [\alpha \gamma] = 0 \quad [\alpha \gamma] = 0,046$$

Die beiden anderen Gruppen von Gewichtsgleichungen geben auch noch:

$$[\beta \beta] = 0,093, \quad [\beta \gamma] = 0,046, \quad [\gamma \gamma] = 0,078$$

Wenn wir nun die Bezeichnungen Q nach (1) anwenden, haben wir:

$$\left. \begin{aligned} Q_{22} &= [\alpha \alpha] = +0,094 = q_{12} \\ Q_{33} &= [\beta \beta] = +0,093 = q_{13} \\ Q_{44} &= [\gamma \gamma] = +0,078 = q_{14} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_{23} &= 0,052 \\ Q_{24} &= 0,046 \\ Q_{34} &= 0,046 \end{aligned} \quad 0,144$$

$$Q_{22} + Q_{33} - 2 Q_{23} = 0,094 + 0,093 - 0,104 = +0,083 = q_{23}$$

$$Q_{22} + Q_{44} - 2 Q_{24} = 0,094 + 0,078 - 0,092 = +0,080 = q_{24}$$

$$Q_{33} + Q_{44} - 2 Q_{34} = 0,093 + 0,078 - 0,092 = +0,079 = q_{34}$$

$$\left. \begin{aligned} q_{12} + q_{13} + q_{14} &= s_1 = 0,265 \\ q_{12} + q_{23} + q_{24} &= s_2 = 0,257 \\ q_{13} + q_{23} + q_{34} &= s_3 = 0,255 \\ q_{14} + q_{24} + q_{34} &= s_4 = 0,237 \end{aligned} \right\} S = 1,014, \quad \frac{S}{12} = 0,0845$$

Dann nach (7):

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= 0,1325 - 0,0845 = 0,0480 \\ q_2 &= 0,1285 - 0,0845 = 0,0440 \\ q_3 &= 0,1275 - 0,0845 = 0,0430 \\ q_4 &= 0,1185 - 0,0845 = 0,0340 \end{aligned} \right\} 0,1690 = \frac{S}{6} \text{ (Probe)}$$

Um auch noch die Formeln (13) anzuwenden, haben wir mit $n = 4$:

$$q_1 = \frac{0,144}{3} = 0,048$$

$$q_2 = 0,048 + 0,094 - 0,098 = 0,044$$

$$q_3 = 0,048 + 0,093 - 0,098 = 0,043$$

$$q_4 = 0,048 + 0,078 - 0,092 = 0,034$$

Damit haben wir alle q und deren Reciproken, d. h. die Richtungsgewichte $\frac{1}{q}$ berechnet, und sogar mit Proben.

Nun handelt es sich noch darum, zu sehen, wie genau die Näherungsgewichte mit den strengen Gewichten oder die Näherungs-Gewichts-Reciproken mit den strengen Gewichtsreciproken aller Winkel übereinstimmen. Z. B. der erste Winkel Sternberg-Paulinen hat die strenge Gewichtsreciproke $q_{12} = 0,094$ und genähert $q_1 + q_2 = 0,092$ was sehr nahe stimmt.

Für alle 6 Winkel ergibt sich folgende Vergleichung:

streng	genähert	Abweichung	
$q_{12} = 0,094$	$q_1 + q_2 = 0,092$	$- 0,002$	
$q_{13} = 0,093$	$q_1 + q_3 = 0,091$	$- 0,001$	durchschnittliche
$q_{14} = 0,078$	$q_1 + q_4 = 0,082$	$+ 0,004$	Abweichung
$q_{23} = 0,083$	$q_2 + q_3 = 0,087$	$+ 0,004$	$= 0,0025$
$q_{24} = 0,080$	$q_2 + q_4 = 0,078$	$- 0,002$	oder 3 %
$q_{34} = 0,079$	$q_3 + q_4 = 0,077$	$- 0,002$	

Dieses sind die Gewichts-Reciproken; wir wollen auch noch die Gewichte selbst ausrechnen und mit den Anschnittszahlen vergleichen:

	Gewicht	Anschnittszahl	Abweichung
$q_1 = 0,048$	$1 : q_1 = 20,8$	$[p^{\circ}] = 24$	$+ 3,2$
$q_2 = 0,044$	$1 : q_2 = 22,7$	$[p'] = 24$	$+ 1,3$
$q_3 = 0,043$	$1 : q_3 = 23,3$	$[p''] = 24$	$+ 0,7$
$q_4 = 0,034$	$1 : q_4 = 29,4$	$[p'''] = 30$	$+ 0,6$

Durchschnitt 1,45 oder 6 %.

Die Anschnittszahlen weichen von den Näherungsgewichten im Mittel nur um 6 % ab, es könnten daher die Anschnittszahlen in diesem Falle wohl auch noch als Näherungsgewichte benützt werden, indessen ist unser Fall ein sehr einfacher; im allgemeinen werden die Anschnittszahlen grössere Abweichungen von den theoretischen Gewichten geben.

Ein grösseres Beispiel zur Vergleichung zwischen den strengen und den genäherten Winkelgewichten, sowie zwischen den genäherten Richtungsgewichten und den Anschnittszahlen giebt die bereits citierte Helmertsche Abhandlung in „Astr. Nachr., 134. Band, 1893“, S. 287; es ist eine spanische Station mit 12 Richtungen; die strengen $q_{12}, q_{13} \dots$ weichen von den genäherten $q_1 + q_2, q_1 + q_3 \dots$ ab im Mittel um 11 %, äusserstenfalls um 30 %. Zwischen den q und den Reciproken der Anschnittszahlen besteht eine durchschnittliche Abweichung von 31 %.

Ebendasselbst S. 289 wird auch über die Anwendung des Näherungsverfahrens auf 12 Stationen mit zusammen 71 Richtungen berichtet. Zwischen den strengen

q_{12} , q_{13} als Gewichts-Reciproken der Winkel und den genäherten $q_1 + q_2$, $q_1 + q_3 \dots$ ergab sich im Mittel eine Abweichung von 9 ‰.

Zur weiteren Charakterisierung des Verfahrens wird noch auf S. 290—291 der citierten Astr. Nachr. für das kleine Württembergische aus 6 Dreiecken bestehenden Dreiecksnetz für Erdmessung (von E. Hammer, Stuttgart 1892) die von Helmert nach seinem Näherungsverfahren durchgeführte Ausgleichung mitgeteilt, in Vergleichung mit der strengen Ausgleichung. Die grösste Differenz der beiderseitigen Ergebnisse für die 33 möglichen Winkel beträgt 0,038"; die mittlere Veränderung ist $\pm 0,014''$ bei einem mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels von $\pm 0,47''$ und einem mittleren Fehler eines im Netz ausgeglichenen Winkels von $\pm 0,4''$. Letzteres bekundet eine mittlere Veränderung von nur $\pm 3,5$ ‰ und eine maximale Änderung von 9,5 ‰.

Teilungsfehler und Netzfehler.

Die im vorstehenden behandelte Theorie betrifft nur die reinen Messungsfehler im engeren Sinne, nämlich Einstellungsfehler (mit dem Fernrohr) und Ablesungsfehler (am Mikroskop oder Nonius), oder die „*nackten*“ Beobachtungsfehler. Die Teilungsfehler des Theodolitkreises können durch symmetrische Kreisverstellungen in den verschiedenen Messungssätzen teilweise eliminiert sein, sie spielen aber immer noch eine Rolle in dem Gesamtfehler einer Richtung.

Im Allgemeinen darf für eine Sicht nicht schlechthin ein Beobachtungsfehler angenommen werden, sondern eine Zusammenwirkung von verschiedenen Fehlerursachen, welche teils unregelmässig, (nackter Beobachtungsfehler) teils regelmässig oder gar konstant sind.

Als konstante Fehler treten auf: Die Instrumentalfehler, besonders die regelmässigen Teilungsfehler und die zufälligen Teilungsfehler, die persönlichen Fehler des Beobachters bei der Auffassung der Zielpunkte, Centrierungsfehler, zeitliche Veränderungen in der Lage der Stationen — „aus den verschiedensten Gründen“ — und seitliche Brechungen der Lichtstrahlen in der Luft. Wenn diese Fehler unter Umständen bei verschiedenen Gruppen der Winkelmessungen einer Station von Gruppe zu Gruppe in wechselnder Weise wirken, so ist ihr Einfluss ein systematischer.

Von dieser Anschauung ausgehend verfährt Helmert auf S. 36 der oben S. 283 citierten Veröffentlichung weiter so:

Angenommen man habe einen Satz unabhängiger ungleich gewichtiger Richtungen, von denen eine das Gewicht n habe, oder mit n facher Einstellung einer ideellen Einheitsvisur gleichgewichtig sei, und es sei μ der mittlere nackte Beobachtungsfehler für die Gewichtseinheit, so ist $\frac{\mu^2}{n}$ der mittlere nackte Beobachtungsfehler der fraglichen Richtung. Ferner sei $\frac{\tau^2}{r}$ der Einfluss des zufälligen Teilungsfehlers bei r gleich verteilten Einstellungen. Dann hat man das mittlere Fehlerquadrat der Richtung nach dem bisherigen $= \frac{\mu^2}{n} + \frac{\tau^2}{r}$.

Nun wird aber hierzu noch ein mittlerer Netzrichtungsfehler r genommen, welcher sich aus den konstanten Fehlern zusammensetzt, die in der Regel auf den Stationen verborgen bleiben und erst in den Widersprüchen des Netzes erkannt

werden können. Dazu gehören auch Reste regelmässiger Teilungsfehler und anderer systematischer Einflüsse, die eigentlich durch das Messverfahren eliminiert sein sollten.

Auf diese Weise wird das vollständige mittlere Fehlerquadrat einer Richtung dargestellt durch:

$$M^2 = \frac{\mu^2}{n} + \frac{\tau^2}{r} + r^2 \quad (22)$$

Um r^2 kennen zu lernen wurde ein Durchschnittswert von M^2 aus den Widersprüchen der Dreiecksabschlüsse oder aus älteren Netzausgleichungen und zum Teil aus der Vergleichung von Stationsergebnissen verschiedener Epochen entnommen, μ^2 und τ^2 aber nach Möglichkeit geschätzt. Nach S. 55, 56, 89, 109, 110, 125 der citierten Veröffentlichung sind solche Ermittlungen $r^2 = 0,19$, $0,43$, $0,09$, $0,18$, $0,09$, $0,15$, $0,09$

$$\text{Im Mittel } r^2 = 0,17 \text{ oder } r = \pm 0,4'' \quad (23)$$

Dieser Netzfehler $r = \pm 0,4''$ ist ein verhältnismässig hoher Wert!

Noch eine Eigentümlichkeit wird auf S. 37 hinzugefügt: Wenn auf derselben Station Messungen aus verschiedenen Jahren mit einander zu verbinden waren, so wurde zunächst M^2 für jede Epoche für sich berechnet. Dafür sprach das Auftreten grosser Differenzen selbst in den besten Messungen *verschiedener Jahre*, wobei es allerdings unaufgeklärt blieb, was die Gründe solcher Änderungen mit der Zeit sein mögen.

§. 83. Das Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz mit Ausgleichung von Helmert.

Aus der Veröffentlichung des geodätischen Instituts von 1893 (Citat s. oben S. 283) entnehmen wir von S. 87—95 das „Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz“, welches in unserer nachfolgenden Fig. 1. dargestellt ist, und wir führen die Hauptmomente der Richtungsausgleichung vor, welche nach der neuen Helmertschen Gewichtstheorie (im vorigen § 82.) gemacht ist.

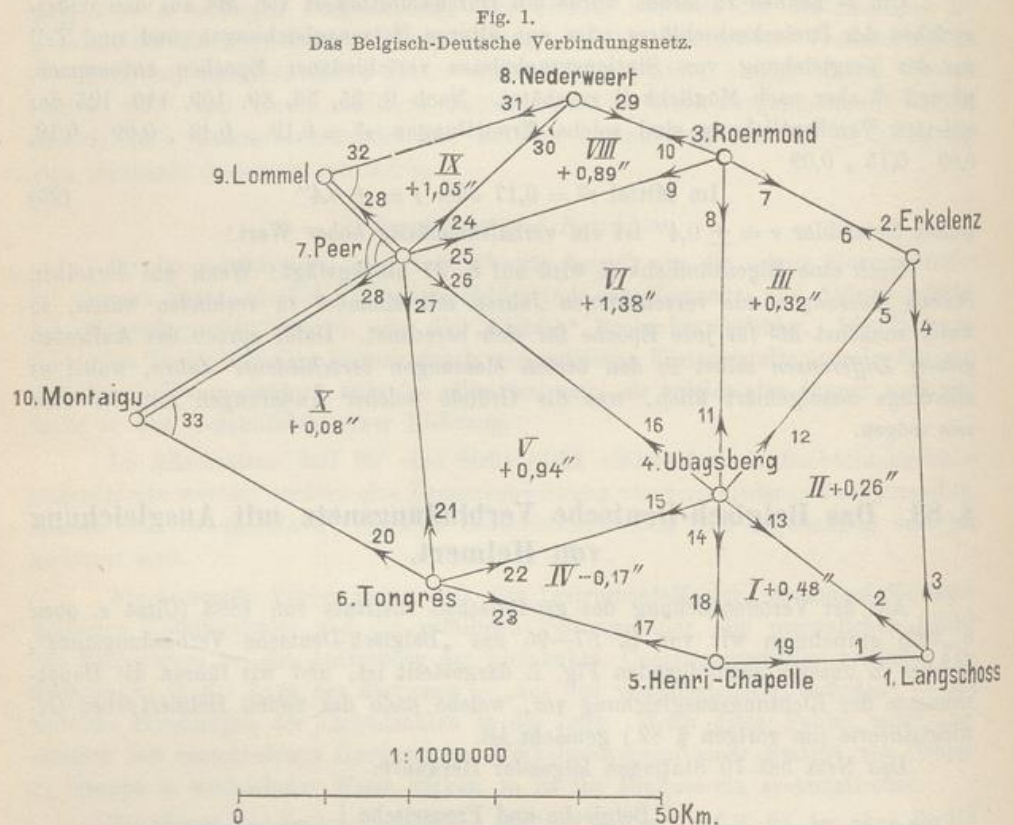
Das Netz hat 10 Stationen folgender Herkunft:

Belgische Messungen	Belgische und Preussische Messungen	Preussische Messungen
Nederweert Lommel Peer Montaigu Tongres	Roermond Ubagsberg Henri-Chapelle	Erkelenz Langschoss
$M_B = \frac{0,89''}{\sqrt{2}} = \pm 0,63''$	$M_B = \pm 0,73''$, $M_F = \frac{\pm 0,79''}{\pm 0,66''}$	$M_P = \frac{0,73''}{\sqrt{2}} = \pm 0,52''$

Die hier sofort beigesetzten mittleren Winkelfehler $\pm 0,89''$ und $\pm 0,73''$ sind aus Dreiecksschlüssen der Belgischen Triangulierung und des neueren rheinischen Dreiecksnetzes des geodätischen Instituts im Allgemeinen ermittelt, und geben den mittleren Fehler einer im Netz ausgeglichenen Belgischen Richtung oder Preussischen Richtung bzw. $= \pm 0,63''$ und $\pm 0,52''$, während die Vergleichen auf den An-

schluss-Stationen grössere Beträge ergaben, nämlich $\pm 0,73''$ für Belgien, und $+ 0,79''$ für Preussen 1861, $\pm 0,66''$ für Preussen 1869.

Aus solchen Erwägungen wurde für Belgien im Allgemeinen $M = \pm 0,64''$, $M^2 = \pm 0,41$ angenommen, und für Preussen die M^2 nach der Theorie der Gleichung (22) im vorigen § 82. S. 291 im einzelnen bestimmt, was auf S. 89—90 der Veröffentlichung selbst nachzusehen ist.



Als Gewichtseinheit ist derjenige Wert $p = \frac{1}{q}$ genommen, welcher zu dem mittleren Fehlerquadrat $M^2 = 0,17$ einer in das Netz eingehenden Richtung gehört, also:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{p} = \frac{M^2}{0,17} = \left(\frac{M}{0,412} \right)^2 = \text{Gewichts-Reciproke} \\ p &= \frac{0,17}{M^2} = \left(\frac{0,412}{M} \right)^2 = \text{Gewicht einer Richtung} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

So sind die Gewichte p bemessen, welche in dem vollständigen Abrisse der Netzausgleichung auf S. 293 angegeben sind.

Das Netz ist nicht ein völlig freies, sondern ein auf den 3 Stationen Lommel, Peer und Montaigu festgebundenes Netz, wodurch die Bedingungsgleichungen in jener nordwestlichen Gegend beeinflusst werden.

Ehe darauf eingegangen wird, ist zu den „beobachteten Richtungen“ eine Bemerkung zu machen bei den Stationen Lommel und Montaigu, weil in dem Abrisse

Ausgleichungs-Abriss des Belgisch-Deutschen Verbindungsnetzes.

No.	Ziel- punkt	vor der Ausgleichung			nach der Ausgleichung			
		mittl. Fehler M	$q = \frac{1}{p}$ $= \left(\frac{M}{0,412}\right)^2$	beobachtete Richtung A	Netz- verbess. v	ausgeglichene Richtung $A + v - v_1$ u.s.w.	$v \sqrt{p}$ $= \frac{0,412 v}{M}$	$v^2 p$ $= \frac{v^2}{q}$
1. Langschoss.								
1	H. Ch.	$\pm 0,79''$	3,7	0° 0' 0,00''	+1,30''	0° 0' 0,00''	0,67''	0,45
2	Ub.	0,34	0,7	37 39 39,16	-0,29	37 39 37,57	0,35	0,12
3	Er.	0,34	0,7	89 38 19,68	+0,04	89 38 18,42	0,05	0,00
2. Erkelenz.								
4	La.	$\pm 0,32''$	0,6	0° 0' 0,00''	+0,27''	0° 0' 0,00''	0,35''	0,12
5	Ub.	0,41	1,0	42 11 47,80	-0,29	42 11 47,24	0,29	0,08
6	Ro.	0,41	1,0	117 3 49,47	-0,16	117 3 49,04	0,16	0,03
3. Roermond.								
7	Er.	$\pm 0,34''$	0,7	0° 0' 0,00''	+0,26''	0° 0' 0,00''	0,31''	0,10
8	Ub.	0,34	0,7	64 6 33,96	-0,06	64 6 33,64	0,07	0,00
9	Pe.	0,37	0,8	140 18 33,79	-0,15	140 18 33,38	0,17	0,03
10	Ne.	0,37	0,8	182 4 19,06	-0,24	182 4 18,56	0,14	0,02
4. Ubagsberg.								
11	Ro.	$\pm 0,34''$	0,7	0° 0' 0,00''	+0,07''	0° 0' 0,00''	0,08''	0,01
12	Er.	0,34	0,7	41 1 27,05	-0,06	41 1 26,92	0,07	0,00
13	La.	0,34	0,7	126 51 1,84	-0,10	126 51 1,67	0,12	0,01
14	H. Ch.	0,49	1,4	183 39 50,22	+0,45	183 39 50,60	0,37	0,14
15	To.	0,37	0,8	255 2 35,84	+0,16	255 2 35,93	0,17	0,03
16	Pe.	0,37	0,8	309 6 7,89	-0,30	309 6 7,52	0,33	0,11
5. Henri-Chapelle.								
17	To.	$\pm 0,47''$	1,3	0° 0' 0,00''	+0,50''	0° 0' 0,00''	0,44''	0,19
18	Ub.	0,47	1,3	76 53 13,63	-0,53	76 53 12,60	0,46	0,21
19	La.	0,47	1,3	162 24 47,82	+0,03	162 24 47,35	0,03	0,00
6. Tongres.								
20	Mo.	$\pm 0,64''$	2,4	0° 0' 0,00''	+0,58''	0° 0' 0,00''	0,37''	0,14
21	Pe.	0,64	2,4	55 26 16,96	+0,35	55 26 16,73	0,22	0,05
22	Ub.	0,64	2,4	134 41 43,47	-1,22	134 41 41,67	0,77	0,59
23	H. Ch.	0,64	2,4	166 25 45,66	+0,28	166 25 45,36	0,18	0,03
7. Peer.								
24	Ne.	$\pm 0,73''$	3,1	0° 0' 0,00''	+0,04''	0° 0' 0,00''	0,02''	0,00
25	Ro.	0,70	2,9	28 32 11,13	+0,56	28 32 11,65	0,33	0,11
26	Ub.	0,70	2,9	81 26 24,22	-1,10	81 26 23,08	0,64	0,41
27	To.	0,43	1,1	128 7 30,03	-0,01	128 7 29,98	0,01	0,00
28	Mo.	0,34	0,7	192 34 27,58	+0,13	192 34 27,67	0,16	0,03
28	Lo.	0,34	0,7	267 43 23,04	+0,13	267 43 23,13	0,16	0,03
75° 8' 55,46''								
8. Nederweert.								
29	Ro.	$\pm 0,64''$	2,4	0° 0' 0,00''	+0,56''	0° 0' 0,00''	0,36''	0,13
30	Pe.	0,64	2,4	109 42 5,72	-0,76	109 42 4,40	0,48	0,23
31	Lo.	0,64	2,4	137 11 35,79	+0,21	137 11 35,44	0,13	0,02
9. Lommel.								
32	Ne.	$\pm 0,00''$..	0° 0' 0,00''	..	0° 0' 0,00''
32	Pe.	0,90	4,8	60 13 54,99	-1,93''	60 13 58,06	0,87''	0,76
10. Montaigne.								
33	Pe.	$\pm 0,00''$..	0° 0' 0,00''	..	0° 0' 0,00''
33	To.	0,71	3,0	60 6 48,90	+0,01''	60 6 48,91	0,01''	0,00
4,19								

$$m = \sqrt{\frac{4,19}{11}} = \pm 0,62''$$

S. 293 für 32 und 33 nicht eigentlich Richtungen, sondern Winkel eingesetzt sind, indem z. B. auf Montaign die Richtung von Peer als fest und fehlerfrei betrachtet und nur die Richtung nach Tongres als fehlerhaft mit den Gewichtsreciproken $q = 3,0$ eingeführt ist. Warum das so angeordnet ist, hängt wahrscheinlich mit den Gewichtsuntersuchungen zusammen; rein formell betrachtet hätte die Sache auch so gemacht werden können, dass zwei Messungsrichtungen Montaign-Peer und Montaign-Tongres mit Gewichtsreciproken je $= 1,5$ angesetzt würden, und ähnlich auf Lommel.

Auf der Station Peer ist der Winkel zwischen Montaign und Lommel unabänderlich fest gegeben $= 75^{\circ} 8' 55,46''$, was in den beobachteten Richtungen A auf S. 293 bereits dadurch ausgedrückt ist, dass die Richtungen Peer-Montaign und Peer-Lommel mit dieser Differenz in Ansatz gebracht sind. (Man kann sich etwa denken, die Stationsausgleichung auf Peer sei nach § 78. gemacht.) Damit nun durch die Netzausgleichung dieser Anschlusswinkel nicht nochmals geändert werde, sind die Richtungsverbesserungen Peer-Montaign und Peer-Lommel beide *gleich* anzunehmen und deswegen mit derselben Nummer 28 und 28 bezeichnet.

Nach diesem zu den Bedingungsgleichungen übergehend, betrachten wir zuerst das Netz als völlig frei, und dann wäre bei $p = 10$ Punkten und $l = 18$ Linien hin und her, nach den Regeln von (17) S. 176, $l - 2p + 3 = 1$ Seitengleichung und $l - p + 1 = 9$ Dreiecksgleichungen (mit $180^{\circ} + \text{Excess}$) zu berücksichtigen. Diese 10 Gleichungen sind jedenfalls da, aber es kommt wegen des Anschlusses im Nordwesten noch eine Zwangsseitengleichung hinzu, so dass im Ganzen 11 Bedingungsgleichungen auftreten werden.

Betrachten wir zuerst die 9 Dreiecksschlüsse, so werden dieselben ganz ebenso gemacht, wie früher bei den kleinen Beispielen S. 178 und S. 189. Z. B. das erste Dreieck I. giebt:

$$\begin{array}{r} (1,2) = 37^{\circ} 39' 39,16'' \\ (13,14) = 56 \quad 48 \quad 48,38 \\ (18,19) = 85 \quad 31 \quad 34,19 \\ \hline 180^{\circ} 00' \quad 0,73'' \\ \text{soll } 180^{\circ} + \text{Excess} \quad 1,25 \\ \hline \text{Widerspruch } W = + 0,48'' \end{array}$$

Also die zugehörige Bedingungsgleichung:

$$\text{I. } -v_1 + v_2 - v_{13} + v_{14} - v_{18} + v_{19} + 0,48'' = 0 \quad (\text{a})$$

Die übrigen Dreiecksschlussgleichungen werden ebenso gebildet:

$$\begin{array}{ll} \text{II. } -v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_{12} + v_{13} + 0,26'' = 0 & (\text{b}) \\ \text{III. } -v_5 + v_6 - v_7 + v_8 - v_{11} + v_{12} + 0,32'' = 0 & (\text{c}) \\ \text{IV. } -v_{14} + v_{15} - v_{17} + v_{18} - v_{22} + v_{23} - 0,17'' = 0 & (\text{d}) \\ \text{V. } -v_{15} + v_{16} - v_{21} + v_{22} - v_{26} + v_{27} + 0,94'' = 0 & (\text{e}) \\ \text{VI. } -v_8 + v_9 + v_{11} - v_{16} - v_{25} + v_{26} + 1,38'' = 0 & (\text{f}) \\ \text{VIII. } -v_9 + v_{10} - v_{24} + v_{25} - v_{29} + v_{30} + 0,89'' = 0 & (\text{h}) \\ \text{IX. } +v_{24} - v_{23} - v_{30} + v_{31} + v_{32} + 1,05'' = 0 & (\text{i}) \\ \text{X. } -v_{20} + v_{21} - v_{27} + v_{28} + v_{33} + 0,08'' = 0 & (\text{k}) \end{array}$$

Die Widersprüche $+ 0,48''$ zu I., $+ 0,26''$ zu II. u. s. w. sind auch in dem Netzbilde Fig. 1. S. 292 in den betreffenden Dreiecken eingeschrieben.

Übergehend zu den Seitengleichungen haben wir für das Centralsystem Ubagsberg, als Sinusrechnung durch die Dreiecke I, II, III, VI, V, IV die Bedingung:

$$\frac{\sin(2,3) \sin(5,6) \sin(8,9) \sin(26,27) \sin(22,23) \sin(18,19)}{\sin(1,2) \sin(4,5) \sin(7,8) \sin(25,26) \sin(21,22) \sin(17,18)} = 1$$

Die Ausrechnung ist ebenso wie schon früher auf S. 180 und S. 192, weshalb wir hier nur einen Teil der Ausrechnung schreiben:

		Diff. für 10"
(2,3) = 51° 58' 40,52"	$\log \sin(2,3) = 9.896\,4014$	165
(5,6) = 74 52 1,67	" " (5,6) = 9.984 6727	57
.		
	$\log \text{Zähler} = 9.449\,8818$	

Ebenso $\log \text{Nenner} = 9.449\,8995$
 $w = \quad - 177$

Also die lineare Seitengleichung zunächst in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimalen:

$$+ 1,65 (v_3 - v_2) + 0,57 (v_6 - v_5) + \dots - 2,73 (v_2 - v_1) - 17,7 = 0$$

$$+ 1,65 v_3 - 4,38 v_2 \dots - 17,7 = 0 \quad (g')$$

Diese streng zu erfüllende Bedingungsgleichung wollen wir noch mit 2 dividieren, wodurch sie nun, voll ausgeschrieben, wird:

$$\left. \begin{aligned} + 1,37 v_1 - 2,19 v_2 + 0,82 v_3 + 1,16 v_4 - 1,45 v_5 + 0,29 v_6 + 0,51 v_7 \\ - 0,77 v_8 + 0,26 v_9 + 0,25 v_{17} - 0,33 v_{18} + 0,08 v_{19} + 0,20 v_{21} \\ - 1,91 v_{22} + 1,71 v_{23} + 0,79 v_{25} - 1,79 v_{26} + 1,00 v_{27} - 8,85 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Der Umstand, dass wir die ursprüngliche Gleichung (g') mit 2 dividiert haben, um die endgültige Gleichung (g) zu erhalten, beruht auf dem Wunsche, die Coefficienten aller Bedingungsgleichungen möglichst einander *gleich* zu machen, und da alle vorhergehenden Gleichungen (a) bis (k) die Coefficienten = 1 (nämlich + 1 oder - 1) hatten, war es angezeigt, auch die Coefficienten in (g') noch etwas zu verkleinern, doch ist das nur eine Sache der Rechenbequemlichkeit, und von Willkür abhängig, ob man in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale, oder wie hier in halben solchen Einheiten rechnen will (vgl. den späteren § 84. und 85.).

Man könnte für die Seitengleichung (g'), d. h. für deren wichtiges Absolutglied - 17,7 auch noch eine Kontrollrechnung nach dem Legendreschen Satze machen, wie in (8) S. 181, doch sei davon jetzt nicht die Rede.

Dagegen wollen wir nun die andere, nämlich die *Zwangs*-Seitenberechnung zum Anschluss an die *beiden* Grundlinien Lommel-Peer und Peer-Montaigu vornehmen.

Als unabänderlich sind gegeben:

Lommel-Peer	Peer-Montaigu	
$\log s_1 = 4.155\,0338\cdot4$	$\log s_2 = 4.570\,5942\cdot6$	(2)

Wir rechnen nach der sogenannten Additamentenmethode (in unserem III. Bande Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890, S. 240-243) und berechnen das logarithmische Additament einer Seite s nach der Formel $\frac{\mu}{6 r^2} s^2$, wo $\mu = 0,43429$ und r der Erdhalbmesser in unserem Falle für 51° 10' Breite $\log r = 6.80495$, dieses giebt:

$$\frac{\mu}{6 r^2} s_1^2 = \dots \quad 3\cdot6 \qquad \frac{\mu}{6 r^2} s_2^2 = \dots \quad 24\cdot6$$

Diese Werte von den obigen $\log s_1$ und $\log s_2$ abgezogen geben:

$$\log s_1' = 4.155\,0334\cdot 8 \quad \log s_2' = 4.570\,5918\cdot 0 \quad (3)$$

$$\log \frac{s_1'}{s_2'} = 9.584\,4416\cdot 8$$

und nun besteht nach dem Anblick des Netzbildes Fig. 1. S. 292 folgende Gleichung:

$$\frac{s_1' \sin(32) \sin(29,30) \sin(8,9) \sin(15,16) \sin(20,21)}{s_2' \sin(30,31) \sin(9,10) \sin(16,11) \sin(21,22) \sin(33)} = 1$$

Die Ausrechnung giebt zunächst in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale:

$$1,21 v_{32} - 0,75 (v_{30} - v_{29}) + 0,52 (v_9 - v_8) + \dots - 2,36 (v_{10} - v_9) \dots - 6,2 = 0$$

Wenn man wieder halbiert und nach den Nummern der v ordnet und zusammenfasst, bekommt man die vollständige lineare Zwangsanschluss-Seitengleichung:

$$\left. \begin{aligned} &+ 0,26 v_8 - 1,44 v_9 + 1,18 v_{10} + 0,86 v_{11} + 0,76 v_{15} - 1,62 v_{16} \\ &+ 0,73 v_{20} - 0,93 v_{21} + 0,20 v_{22} - 0,38 v_{29} - 1,65 v_{30} + 2,03 v_{31} \\ &- 0,61 v_{32} + 0,61 v_{33} + 3,10 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Nun besitzen wir in (a) (b) ... (l) die richtige Anzahl von 11 linearen Bedingungsgleichungen, welche zuvörderst in eine Tabelle, ähnlich wie früher in (12) S. 182 oder S. 194—195 geordnet werden müssen. Zur Raumersparung sind wir genötigt, diese Tabelle hier nur anzudeuten:

		1	2	3	4	5	6	7	8	..
$\frac{1}{p} = q =$		3,7	0,7	0,7	0,6	1,0	1,0	0,7	0,7	..
1	a	-1	+1
2	b	.	-1	+1	-1	+1
3	c	-1	+1	-1	+1	..
4	d
5	e
6	f	-1	..
7	g	+1,37	-2,19	+0,82	+1,16	-1,45	+0,29	+0,51	-0,77	..
..

Es folgt die Berechnung der Summen $\left[\frac{a a}{p} \right]$ u. s. w. als Coefficienten der Normalgleichungen (5) S. 126, z. B.:

$$\left[\frac{a a}{p} \right] = [q a a] = 3,7 + 0,7 \dots = + 9,1$$

$$\left[\frac{a b}{p} \right] = [q a b] = - 0,7 \dots = - 1,4$$

$$\left[\frac{a c}{p} \right] = [q a c] = \dots = 0$$

$$\left[\frac{a g}{p} \right] = [q a g] = - 1,37 \times 3,7 - 2,19 \times 0,7 \dots = - 6,07$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{g g}{p} \right] &= [q g g] = 1,37^2 \times 3,7 + 2,19^2 \times 0,7 + 0,82^2 \times 0,7 \\ &= 7,00 + 3,36 + 0,47 \dots = 42,70 \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots$$

Nachdem so alle Coefficienten ohne Schwierigkeiten ausgerechnet sind, bildet man die Normalgleichungen (5) S. 126, welche in abgekürzter Schreibweise (nach S. 80 unten) sich so darstellen:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	w
+ 9,1	- 1,4	.	- 2,7	.	.	- 6,07	+ 0,48
	+ 4,4	- 1,7	.	.	.	- 0,05	+ 0,26
		+ 4,8	.	.	- 1,4	+ 0,84	.	.	.	- 0,42	+ 0,32
			+ 9,6	- 3,2	.	+ 7,92	.	.	.	+ 0,13	- 0,17
				+ 10,4	- 3,7	+ 1,23	.	.	- 3,5	+ 0,80	+ 0,94
					+ 8,8	- 6,73	- 3,7	.	.	+ 0,57	+ 1,38
						+ 42,70	+ 2,08	.	- 0,62	- 1,81	- 8,85
							+ 14,5	- 5,5	.	+ 1,52	+ 0,89
								+ 13,4	- 0,7	+ 5,90	+ 1,05
									+ 9,6	- 2,15	+ 0,08
										+ 31,97	- 3,10

Die Auflösung dieser Normalgleichungen giebt:

$$\begin{array}{lll}
 k_1 = + 0,0010 & k_5 = - 0,3748 & k_9 = - 0,2897 \\
 k_2 = - 0,1459 & k_6 = - 0,2942 & k_{10} = - 0,1082 \\
 k_3 = - 0,2329 & k_7 = + 0,2569 & k_{11} = + 0,1849 \\
 k_4 = - 0,3213 & k_8 = - 0,3025 &
 \end{array}$$

Mit diesen Werten k berechnet man die Verbesserungen v nach den Formeln (3) S. 120, wobei man der Tabelle (4) nach Vertikalspalten folgt, z. B.:

$$p_1 v_1 = -k_1 + 1,37 k_7 = -0,001 + 0,352 = + 0,351$$

dabei ist $\frac{1}{p_1} = q_1 = 3,7$

also $v_1 = + 1,30''$, wie es bereits auf S. 293 eingeschrieben ist.

Übrigens macht man diese Ausrechnung aller v selbst tabellarisch, wie früher S. 194—195 gezeigt worden ist, weshalb dazu nun nichts weiter bemerkt wird. Die Ausrechnung der verbesserten Richtungen durch Zufügung der v zu den gemessenen Richtungen ist auch auf der Abriss-Tabelle S. 293 bereits gemacht, und es wäre dazu nur zu bemerken, dass die ausgeglichenen Richtungen $A + v$ nochmals in jedem Satze so verschoben wurden, dass der Satz wieder mit $0^\circ 0' 0''$ beginnt, was rein formelle Änderung ist.

Das nächste ist nun, auch die ausgeglichenen Winkel als Differenzen der Richtungen auszuziehen, die 9 Dreiecke auf $180^\circ 0' 0'' + \text{Excess}$ zu erproben und alle Dreiecksseiten auszurechnen. Anleitung dazu ist nicht nötig, da solche Ausrechnungen bereits auf S. 183—184 und auf S. 196—197 durchgenommen sind; die Dreiecksseiten können in unserem Falle im Anschluss an die Basisseiten (2) bzw. (3) nach der „Additamentenmethode“ oder auch nach dem Legendreschen Satze berechnet werden.

Folgendes sind hiefür die Ergebnisse, nur mit Nummern nach Fig. 1. S. 292 bezeichnet:

1. $\log s = 4.415\ 6477$	19.	15. $\log s = 4.546\ 5598$	22.
2. „ 4.491 6525	13.	16. „ 4.676 9917	26.
3. „ 4.663 3423	4.	17. „ 4.534 6840	23.
5. „ 4.650 8960	12.	20. „ 4.610 2294	33.
6. „ 4.423 9849	7.	21. „ 4.592 9508	27.
8. „ 4.591 5057	11.	24. „ 4.429 2849	30.
9. „ 4.579 5859	25.	28. „ 4.570 5943	(33.)
10. „ 4.284 9536	29.	28. „ 4.155 0338	(32.)
14. „ 4.279 0039	18.	31. „ 4.490 4037	32.

Mehr Interesse bietet die Verteilung der v und die aus den v zu ziehenden Genauigkeitsberechnungen. Wir haben in dem Gesamtabriss S. 293 ausser den v selbst auch die $v\sqrt{p}$ und die v^2p nebst der Summe $[v^2p]$ ausgerechnet, welche den mittleren Gewichtseinheitsfehler giebt:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2p]}{11}} = \pm 0,62'' \quad (5)$$

(Man hat dazu auch die Probe $-[wk]$, welche ausgerechnet ebenfalls sehr nahe $= 4,2$ giebt übereinstimmend mit $[v^2p] = 4,19$).

Dieses $m = \pm 0,62''$ ist zu vergleichen mit der ursprünglichen Festsetzung $M = 0,412''$ bei (1) als Gewichtseinheitsfehler vor der Ausgleichung, und das Verhältnis $0,62 : 0,41 = 1,5$ pflegt in solchen Fällen als Massstab für die Güte der Genauigkeitsschätzung vor der Ausgleichung genommen zu werden. In unserem Falle sind also bei 1,5 die Fehler im Allgemeinen nach der Ausgleichung um 50 % grösser als vor der Ausgleichung erwartet war, und ein ähnliches Verhältnis pflegt sich in solchen Fällen in der Regel einzustellen und gilt noch als befriedigend, während ein erheblich grösserer Wert des Verhältnisses $m : M$ als 1,5 vielleicht Veranlassung geben könnte, die Ausgleichung mit neuen Gewichtsannahmen zu wiederholen. —

Auch abgesehen von diesem Verhältnis $m : M$, welches im Allgemeinen gilt, bietet die Abrisstabelle von S. 293 noch Stoff zu Überlegungen, ob in den einzelnen Richtungsfällen die Schätzungen gut waren. Es sind nämlich die $v\sqrt{p}$ die auf die Gewichtseinheit $p = 1$ reduzierten Fehler, und man wird deshalb nun nachsehen, welche $v\sqrt{p}$ erheblich grösser als $0,41''$ sind? Doppelt so gross als $0,41''$ oder noch grösser sind nur die zwei Fälle v_{27} und v_{32} , welche nun etwa Veranlassung zu näherer Untersuchung geben könnten, von welcher aber hier, wo wir das Ganze nur als formelles Schulbeispiel durchgenommen haben, nicht die Rede sein kann.

Überblicken wir zum Schluss nochmals im Ganzen die neue Helmertsche Theorie der Netzausgleichung, so finden wir darin Fortschritte gegen früher in mehr als einer Hinsicht. Zuvörderst ist die Theorie mit den *Richtungsgewichten* $1:q$ eine Vervollkommenung der früheren roheren Annahmen von „Anschnittszahlen“ als Gewichten, und in solchen Fällen, welche bei der Längengradmessung die Regel waren, bei welchen nämlich bereits strenge Ausgleichungen nach Bessels Theorie mit den Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$... in bequemster Weise zur Verfügung bereit

lagen, war die neue Theorie der q ausgezeichnet am Platze. Wenn aber künftig die $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. für den Zweck der q besonders auszurechnen sein werden, wird die Bequemlichkeit des neuen Verfahrens vermindert, während die sonstigen Vorzüge bestehen bleiben.

Das zweite unterscheidende Merkmal der neuen Theorie gegen frühere Verfahren ist die Einführung des *Netzrichtungsfehlers* r in der Gleichung (22) S. 291, welcher im Mittel zu $r = \pm 0,4''$ gefunden wurde; und es ist nur zu fragen, mit welchem Grade von Zuverlässigkeit ein solches r wohl im einzelnen Falle eingeführt werden kann? —

§ 84. Günstigste Wahl der Seitengleichung im Viereck.

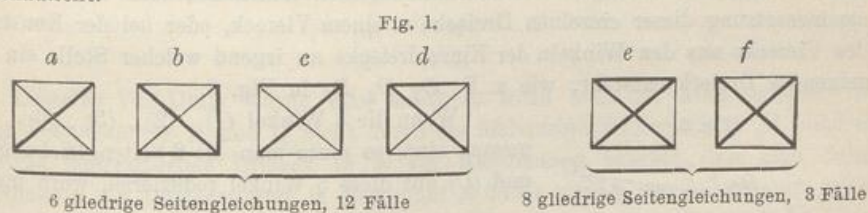
Am Schlusse von § 58. S. 178 haben wir eine Frage, betreffend die günstigste Form der Seitengleichung in einem Vierecke kurz erwähnt und auf den Schluss dieses Kapitels verschoben, so dass wir nun diese Sache zu behandeln haben.

Ebenso wie die Winkelsummen-Bedingungen in verschiedenen Formen ausgedrückt werden konnten (s. § 57. Gleichungen (14)–(17) S. 167, so kann auch die Bedingung übereinstimmender Seitenberechnung in einem Viereck in verschiedenen Formen festgelegt werden, und es ist für die Schärfe der Rechnung nicht gleichgültig, welche von diesen Formen gewählt wird.

Eine erste Regel, welche sich von selbst darbietet, lautet, man soll die *spitzen* Winkel, welche bei Schnittpunktsbestimmungen auftreten, unmittelbar in die Seitengleichungen einführen; man erhält dadurch grosse Cotangenten als Coefficienten.

Eine erste tiefergehende Untersuchung dieser Frage wurde von *Zachariae* angestellt in dem Werke „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten“, aus dem Dänischen ins Deutsche übersetzt von *Lamp*, S. 152 u. ff. Wir haben hierüber in der „Zeitschr. für Verm. 1880“ S. 65–73 berichtet und noch einige Ergebnisse hinzu gewonnen, wie im Folgenden dargelegt wird:

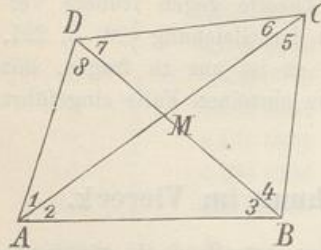
Das Wesen der Seitengleichung im Viereck besteht darin, dass, bei Annahme einer beliebigen Seite als Basis, jede andere Seite auf allen möglichen Wegen aus dieser Basis übereinstimmend erhalten werden muss, man hat daher zunächst so viele Formen von Seitengleichungen, als die Zahl der Kombinationen der 6 Seiten zu zweien beträgt, nämlich $\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$. Diese 15 Fälle sind durch Fig. 1. a, b, c, d, e, f veranschaulicht.



a bis d enthalten je 3 Kombinationen, nämlich die Verbindung von je 2 solchen Seiten, welche einen Winkelpunkt gemeinsam haben, e und f enthalten zusammen 3 Fälle, nämlich die Verbindungen von je 2 Gegenseiten und die Diagonalenkombination doppelt.

Z. B. entspricht es der Fig. 1. *a*, wenn in Fig. 2. bestimmt wird, dass *AD* aus der Basis *AB* abgeleitet, eindeutig werden soll, d. h.:

Fig. 2.
Vollständiges Viereck.



$$AD = \frac{AB \sin(3)}{\sin(8)} = \frac{AB \sin(3+4) \sin(6)}{\sin(5) \sin(7+8)} \quad (1)$$

oder
$$\frac{\sin(3) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(3+4) \sin(6) \sin(8)} = 1 \quad (2)$$

Genau dieselbe Gleichung bekommt man durch die Bestimmung, dass *AC* aus der Basis *AB* gleichwertig hervorgehe, überhaupt liefert jede der Figuren *a*, *b*, *c*, *d* nur je eine Gleichung, welche mit Bezugnahme auf Fig. 2. bzw. mit (*A*), (*B*), (*C*), (*D*) bezeichnet sein möge.

Ferner entspricht es der Fig. 1. *e*, wenn in Fig. 2. bestimmt wird, dass *DC* aus *AB* abgeleitet eindeutig werde, d. h.:

$$DC = \frac{AB \sin(1+2) \sin(4)}{\sin(8) \sin(5+6)} = \frac{AB \sin(3+4) \sin(1)}{\sin(5) \sin(7+8)}$$

oder
$$\frac{\sin(1+2) \sin(4) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(1) \sin(3+4) \sin(5+6) \sin(8)} = 1 \quad (3)$$

Die Fälle *a* bis *d* Fig. 1. liefern 6 gliederige, *e* und *f* liefern 8 gliederige Seitengleichungen.

Wir behandeln zunächst nur die Fälle Fig. 1. *a* bis *d*, d. h. die Zentralsysteme (*A*), (*B*), (*C*), (*D*) und machen folgende Vergleichung der Günstigkeit:

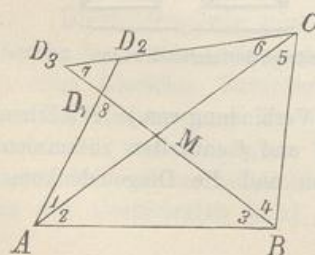
Den Zentralsystemen (*A*) und (*B*) entsprechen die folgenden 2 Bedingungs-gleichungen:

$$(A) \quad \frac{\sin(3) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(6) \sin(8) \sin(3+4)} = 1 \quad (4)$$

$$(C) \quad \frac{\sin(2) \sin(4) \sin(7+8)}{\sin(1) \sin(7) \sin(3+4)} = 1 \quad (5)$$

Diese 2 Gleichungen können aber nicht unmittelbar verglichen werden, weil sie sich auf verschiedene Winkel beziehen. Es wird nun zunächst angenommen, dass entweder nur 5 Winkel gemessen sind, welche keine Winkelgleichung, aber eben deswegen eine Seitengleichung bilden, oder dass beim Vorhandensein weiterer Winkel-messungen die hierauf bezüglichen Summenproben stimmen, oder kurz, wir nehmen zunächst an, dass alle *einzelnen* Dreiecke für sich schliessen, dass aber bei der Zusammensetzung dieser einzelnen Dreiecke zu einem Viereck, oder bei der Konstruktion des Vierecks aus den Winkeln der Einzeldreiecke an irgend welcher Stelle ein fehler-zeigendes Dreieck entsteht, wie z. B. *D*₁ *D*₂ *D*₃ in Fig. 3.

Fig. 3.



Wenn die 5 Winkel (1), (2), (5), (6), (8) ge-messen sind, so muss man die 2 Seitengleichungen (*A*) und (*C*) auf diese 5 Winkel reduzieren, wozu man hat:

$$\left. \begin{aligned} (3) &= 180^\circ - (1 + 2 + 8) \\ (7) + (8) &= 180^\circ - (1 + 6) \\ (3) + (4) &= 180^\circ - (2 + 5) \\ (4) &= (1) + (8) - (5) \\ (7) &= 180^\circ - (1 + 6 + 8) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Damit gehen (A) und (C) über in:

$$(A') \quad \frac{\sin(1+2+8) \sin(5) \sin(1+6)}{\sin(6) \sin(8) \sin(2+5)} = 1 \quad (7)$$

$$(C') \quad \frac{\sin(2) \sin(1+8-5) \sin(1+6)}{\sin(1) \sin(1+6+8) \sin(2+5)} = 1 \quad (8)$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind diese Gleichungen nicht erfüllt, sondern es stellen sich Widersprüche ein, welche in logarithmischer Form in der Rechnung auftreten. Wenn man die Gleichung (7) vermöge ihrer Entstehung aus (1), (2) und (4) mit Fig. 3. vergleicht, so findet man:

$$\frac{\sin(1+2+8) \sin(5) \sin(1+6)}{\sin(6) \sin(8) \sin(2+5)} = \frac{A D_1}{A D_2} = 1 - \frac{D_1 D_2}{A D_2}$$

oder wenn man die Gleichung (7) logarithmisch ausführt, so erhält man auf der rechten Seite statt $\log 1 = 0$ den Widerspruch:

$$\log \left(1 - \frac{D_1 D_2}{A D_2} \right) = -\mu \frac{D_1 D_2}{A D_2} \quad (9)$$

wo $\mu = 0,43429$ der logarithmische Modul ist. Dieser Wert (9) ist das Absolutglied der linearen Seitengleichung, welche durch Differenzieren von (7) entsteht, man hat daher, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, für den Zentralpunkt A das relative Mass für das Absolutglied der Seitengleichung:

$$(a) = \frac{D_1 D_2}{A D} \quad (10)$$

wo im Nenner schlechthin $A D$ statt $A D_2$ hinreichend genau geschrieben ist.

Wenn man Alles analog für den Zentralpunkt C macht, so bekommt man:

$$(c) = \frac{D_2 D_3}{C D} \quad (11)$$

Aus (10) und (11) findet man die Vergleichung:

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{D_1 D_2 C D}{D_2 D_3 A D} \quad (12)$$

Es ist aber:

$$\frac{D_1 D_2}{D_2 D_3} = \frac{\sin(7)}{\sin(8)}$$

und nach Fig. 2:

$$\frac{C D \sin(7)}{A D \sin(8)} = \frac{C M}{A M} \quad (13)$$

folglich ist das Verhältnis der Absolutglieder in den Seitengleichungen (7) und (8):

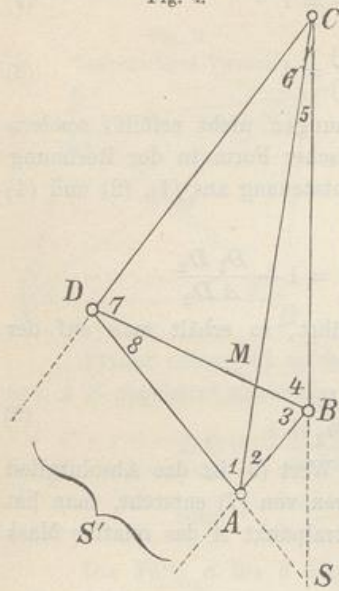
$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{C M}{A M} \quad (14)$$

Dasselbe Verhältnis würde man erhalten, wenn man die Absolutglieder der Seitengleichungen für A und C nicht durch das fehlerzeigende Dreieck in D, sondern durch das fehlerzeigende Dreieck in B zur Anschauung brächte, wie man durch Wiederholung der Untersuchung in Bezug auf B finden würde, was jedoch auch schon daraus erhellt, dass in dem Verhältnis (a):(c) keine auf D oder B bezügliche Vierecksgrösse vorkommt.

In dieser Vergleichung (14) der Absolutglieder ist der Zachariaesche Satz enthalten, denn für die Schärfe der logarithmischen Rechnung sind die Grössen der Absolutglieder der Seitengleichungen (A), (B), (C), (D) massgebend.

Wir machen die Vergleichung im Anschluss an Fig. 4. und erhalten Folgendes:

Fig. 4.



$$\begin{array}{l}
 A \text{ ist günstiger als } C \text{ weil } AM < CM \\
 B \text{ " " " } D \text{ " } BM < DM \\
 A \text{ " " " } B \text{ " } AS' < BS' \\
 A \text{ " " " } D \text{ " } AS < DS \\
 B \text{ " " " } C \text{ " } BS < CS \\
 D \text{ " " " } C \text{ " } DS' < CS'
 \end{array} \quad (14a)$$

Aus allen 6 Vergleichungen folgt, dass A der günstigste Zentralpunkt für den Ansatz einer Seitengleichung ist. Dabei sind nur die 6 gliederigen Seitengleichungen entspr. (Fig. 1. a bis d) verglichen.

Wie weit sich die Sache ändert, wenn nicht bloss 5 Winkel gemessen sind, oder allgemeiner ausgedrückt, wenn ausser einer Seitengleichung auch noch Winkelsummen mit Widerspruchsgliedern existieren, behandeln wir im Anschluss an ein Zahlenbeispiel, welches sich auf Fig. 4. bezieht, und zwar mag gelegentlich erwähnt werden, dass diese Figur das Schwerdsche Basisnetzviereck von S. 208 vorstellt, das wir in § 65. ausgeglichen haben. Die auf 1' abgerundeten und insofern fingierten Winkel sind diese:

$$\begin{array}{cccc}
 (1) = 49^\circ 44' & (1) = 49^\circ 44' & (2) = 31^\circ 38' & (7) = 76^\circ 34' \\
 (2) = 31 \quad 38 & (8) = 25 \quad 17 & (3) = 73 \quad 22 & (4) = 67 \quad 4 \\
 (3) = 73 \quad 22 & (7) = 76 \quad 34 & (4) = 67 \quad 4 & (6) = 28 \quad 26 \\
 (8) = 25 \quad 17 & (6) = 28 \quad 26 & (5) = 7 \quad 57 & (5) = 7 \quad 57
 \end{array} \quad (15)$$

$180^\circ \quad 1' \qquad 180^\circ \quad 1' \qquad 180^\circ \quad 1' \qquad 180^\circ \quad 1'$

Bezeichnet man die Winkelverbesserungen mit v_1, v_2, \dots , so erhält man hieraus zunächst die (nicht von einander unabhängigen) 4 Winkelbedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l}
 v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + 1' = 0 \\
 v_1 + v_8 + v_7 + v_6 + 1' = 0 \\
 v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + 1' = 0 \\
 v_7 + v_4 + v_6 + v_5 + 1' = 0
 \end{array} \right\} \quad (16)$$

Der Zentralpunkt A giebt eine Seitengleichung (2), welche auf folgende logarithmische Rechnung führt:

		<i>log</i> Diff. für 1'
(7 + 8) = 101° 51'	<i>log sin</i> (7 + 8) = 9.99064	— 2
(5) = 7 57	<i>log sin</i> (5) = 9.14085	+ 90
(3) = 73 22	<i>log sin</i> (3) = 9.98144	+ 3
	9.11293	
(6) = 28° 26'	<i>log sin</i> (6) = 9.67773	+ 23
(3 + 4) = 140 26	<i>log sin</i> (3 + 4) = 9.80412	— 15
(8) = 25 17	<i>log sin</i> (8) = 9.63052	+ 27
	9.11237	
	9.11293 — 9.11237 = + 0.00056	

also in Einheiten der fünften Dezimale hat man die Seitengleichung:

$$\begin{aligned} & -2(v_7 + v_8) + 90v_5 + 3v_3 - 23v_6 + 15(v_3 + v_4) - 27v_8 + 56 = 0 \\ (A) \quad \text{oder: } & 18v_3 + 15v_4 + 90v_5 - 23v_6 - 2v_7 - 29v_8 + 56 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Ganz in derselben Weise findet man auch die 3 Seitengleichungen für die Zentralpunkte *B*, *C* und *D*, nämlich:

$$(B) \quad + 2v_1 - 19v_2 + 73v_5 - 17v_6 + 3v_7 - 27v_8 + 41 = 0 \quad (18)$$

$$(C) \quad + 11v_1 - 21v_2 - 15v_3 - 20v_4 + 5v_7 + 2v_8 + 1 = 0 \quad (19)$$

$$(D) \quad + 9v_1 - 2v_2 + 3v_3 - 5v_4 + 17v_5 - 6v_6 + 16 = 0 \quad (20)$$

In Verbindung mit dreien Gleichungen der Gruppe (16) genügt *eine* von den Gleichungen (17)–(20) zum allseitigen Schliessen des Vierecks, es muss daher möglich sein, alle diese 4 Gleichungen (17)–(20) auf *eine* Form zu bringen, und wenn etwa nur 5 Winkel gemessen wären, welche keine Winkelgleichung bildeten, so müsste *eine* einzige Seitengleichung bestehen, welche aus (17), (18), (19) oder (20) ableitbar sein müsste. Wir stellen daher die Aufgabe: Es sollen die 4 Gleichungsformen (17), (18), (19), (20) auf eine gemeinsame Form gebracht werden, in welcher nur v_1, v_2, v_5, v_6, v_8 vorkommen, d. h. die Verbesserungen solcher 5 Winkel, welche für sich allein das Viereck mit einer Seitengleichung bestimmen:

Man hat nun mit Hilfe der Gruppe (16) alle übrigen v in v_1, v_2, v_5, v_6, v_8 auszudrücken, und damit diese übrigen v aus (17)–(20) zu eliminieren. Aus (16) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} v_3 &= -v_1 - v_2 - v_8 - 1 \\ v_4 &= +v_1 - v_5 + v_8 \\ v_7 &= -v_1 - v_6 - v_8 - 1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichungen (17)–(20) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} (A') \quad & -1v_1 - 18v_2 + 75v_5 - 21v_6 - 30v_8 + 40 = 0 \\ (B') \quad & -1v_1 - 19v_2 + 73v_5 - 20v_6 - 30v_8 + 38 = 0 \\ (C') \quad & +1v_1 - 6v_2 + 20v_5 - 5v_6 - 8v_8 + 11 = 0 \\ (D') \quad & +1v_1 - 5v_2 + 22v_5 - 6v_6 - 8v_8 + 13 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

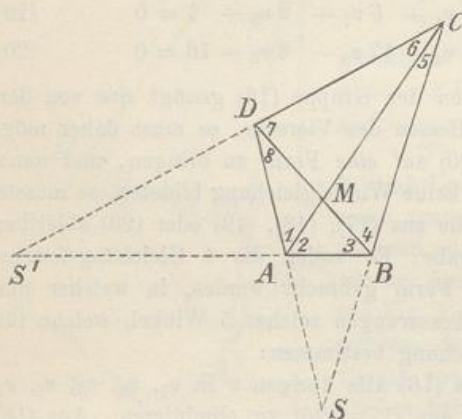
Abgesehen von einer erklärlichen Abrundungsunsicherheit von ± 1 in den Coefficienten sind diese 4 Gleichungen algebraisch identisch, wie es sein soll, praktisch genommen ist aber die erste (*A'*) wegen der grösseren Coefficienten allen anderen vorzuziehen.

Das Verhältnis der Coefficienten und Absolutglieder in den Gleichungen (22), nämlich 40:38:11:13 hängt nicht von der Wahl der 5 Winkel (1), (2), (5), (6), (8) ab, sondern nur von der Gestalt des Vierecks, und dieses theoretische Verhältnis stellt sich immer ein, wenn die Gleichungen auf irgend welche 5 Winkel reduziert werden. Wenn aber mehr als 5 Winkel gemessen sind, so ist ein solches Reduzieren praktisch nicht nötig, wenn z. B. die 8 Winkel von Fig. 4. gemessen sind, so kann man irgend eine der Gleichungen (17)–(20) unmittelbar in die Rechnung einführen; fragt man aber hierbei wieder nach der Grösse der Absolutglieder, so ist doch wieder das Verhältnis derselben in den reduzierten Gleichungen (22) massgebend, denn die Gleichungen (16) und alle hierauf bezüglichen Operationen, durch welche der Übergang zwischen (*A*) und (*A'*), (*B*) und (*B'*) etc. vermittelt wird, sind im Vergleich mit den logarithmischen Absolutgliedern selbst als fehlerfrei zu betrachten.

8 gliederige Seitengleichungen.

Das Bisherige ist im Wesentlichen von *Zachariae* in dem Eingangs citierten Buche angegeben worden; es sind dabei nur die 4 Formen *a*, *b*, *c*, *d* Fig. 1. berücksichtigt worden. (S. 299.)

Fig. 5.
Zentralpunkte *S* und *S'*.



Eine Vervollständigung dieser Theorie ist nun zunächst in dem Sinn möglich, dass auch die 8 gliederigen Seitengleichungen *e* und *f* von Fig. 1. hinzugezogen werden. Betrachten wir zuerst die 8 gliederige Seitengleichung (3), so kann man derselben eine Beziehung zu dem Punkt *S* von Fig. 5. geben, es ist nämlich:

$$SB = SA \frac{\sin(1+2)}{\sin(3+4)}$$

$$SD = SB \frac{\sin(4)}{\sin(8)}$$

$$SC = SD \frac{\sin(7+8)}{\sin(5+6)}$$

$$SA = SC \frac{\sin(5)}{\sin(1)}$$

Alles multipliziert giebt:

$$(S) \quad \frac{\sin(1+2) \sin(4) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(8) \sin(5+6) \sin(1) \sin(3+4)} = 1$$

Dieses ist übereinstimmend mit (3).

Diese Gleichung (S) ist der Quotient aus (A) und (D), nämlich:

$$(A) \quad \frac{\sin(7+8) \sin(5) \sin(3)}{\sin(6) \sin(3+4) \sin(8)} = 1$$

$$(D) \quad \frac{\sin(5+6) \sin(3) \sin(1)}{\sin(4) \sin(1+2) \sin(6)} = 1$$

also wenn man die logarithmischen Absolutglieder mit (s), (a), (d) bezeichnet:

$$(s) = (a) - (d) \quad (23)$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass bei (A) und (D) in demselben Sinn gezählt wird, d. h. wenn in (A) der Weg *DCBD* von links nach rechts genommen ist, so muss auch in (D) der Weg *CBA C* von links nach rechts genommen werden.

Mit analogen Bezeichnungen hat man auch

$$(s) = (b) - (c) \quad (24)$$

und ebenso findet man

$$(s') = (a) - (b) = (d) - (c) \quad (25)$$

Endlich kann man diejenige auf *e* und *f* (Fig. 1.) bezügliche 8 gliederige Gleichung, welche die Beziehung zwischen den Diagonalen *AC* und *BD* herstellt, dem Punkte *M* zuteilen, dem sie auch als Zentralpunkt zugehört, wenn man *M* als fingierte Winkelstation nimmt; die Gleichung heisst nämlich:

$$(M) \quad \frac{\sin(1) \sin(3) \sin(5) \sin(7)}{\sin(2) \sin(4) \sin(6) \sin(8)} = 1 \quad (26)$$

Diese Gleichung ist das Produkt aus (A) und (C) oder (B) und (D), z. B.:

$$(A) \quad \frac{\sin(7+8) \sin(5) \sin(3)}{\sin(6) \sin(3+4) \sin(8)} = 1$$

$$(C) \quad \frac{\sin(3+4) \sin(1) \sin(7)}{\sin(2) \sin(7+8) \sin(4)} = 1$$

woraus durch Multiplikation (26) folgt.

Die Absolutglieder geben die Beziehung:

$$(m) = (a) + (c) = (b) + (d) \quad (27)$$

Dreiecksflächen als Mass der Günstigkeit.

Die *Zachariae* sche Theorie verlangt zur Auffindung des günstigsten Zentralpunktes nach (14 a) eine *sechsfache* Vergleichung von Diagonalenstrecken, um schliesslich aus allen 6 Vergleichungen den günstigsten Fall herauszufinden.

Dieses lässt sich auf eine viel bequemere mit *einem* Blick zu erledigende *Flächenvergleichung* zurückführen, wie wir nun zeigen werden:

Wir betrachten die Formel (14) in Verbindung mit Fig. 5. oder Fig. 6. und finden:

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{CM}{AM} = \frac{\triangle BDC}{\triangle ABD}$$

d. h. die Absolutglieder (a) und (c) sind den *Flächen* der Dreiecke *BDC* und *ABD* proportional. Nimmt man nun noch die Gleichungen (23), (24), (26) und (25) hinzu, so bekommt man folgende Zusammenstellung, und damit das Gesamt-Ergebnis unserer Untersuchung:

Zentralpunkt

Mass der Günstigkeit (Fig. 6.)

A mit 6 gliederiger Seitengleichung	Fläche $\beta + \gamma$	}	(28)
B " " "	" $\gamma + \delta$		
C " " "	" $\alpha + \delta$		
D " " "	" $\alpha + \beta$		
S mit 8 gliederiger Seitengleichung	Fläche $\gamma - \alpha$	}	(29)
S' " " "	" $\beta - \delta$		
M " " "	" $\alpha + \beta + \gamma + \delta$		

Am günstigsten ist die Seitengleichung (26) für den Zentralpunkt *M*, jedoch ist dieselbe 8 gliederig.

Wenn 2 Vierecksseiten *parallel* werden, so versagt die ihrem Schnitt entsprechende 8 gliederige Gleichung vollständig, wenn z. B. *AB* parallel *DC* ist, so

Fig. 6.
Flächenverhältnisse $\alpha \beta \gamma \delta$ zu
Gleichung (28) und (29).

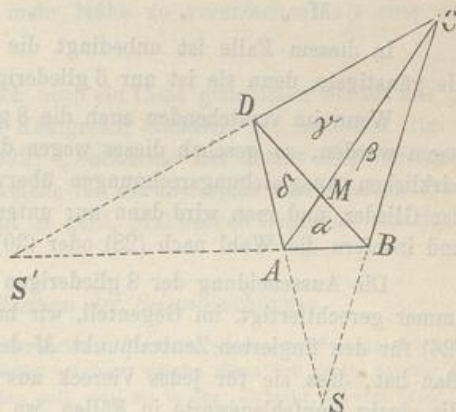
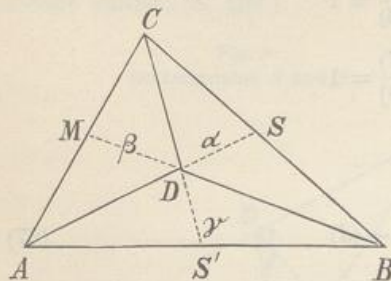


Fig. 7.
Flächenverhältnisse $\alpha \beta \gamma$ zu
Gleichung (30) und (31).



wird $\beta = \delta$ und die Gleichung für S' löst sich auf in $0 \dots + 0 \dots = 0$, was man auch direkt nachweisen kann.

Wenn die 4 Punkte $A B C D$ nicht ein eigentliches Viereck wie Fig. 6. bilden, sondern ein Dreieck $A B C$ mit einem Innenpunkt D , wie z. B. Fig. 7., so bekommt man folgende Vergleichung betreffs der Günstigkeit der 7 möglichen Seitengleichungen:

Zentralpunkt	Mass der Günstigkeit (Fig. 9.)	
A mit 6 gliederiger Seitengleichung	Fläche α	(30)
B " " "	" β	
C " " "	" γ	
D " " "	" $\alpha + \beta + \gamma$	
S mit 8 gliederiger Seitengleichung	Fläche $\beta + \gamma$	(31)
S' " " "	" $\alpha + \beta$	
M " " "	" $\alpha + \gamma$	

In diesem Falle ist unbedingt die Seitengleichung für den Zentralpunkt D die günstigste, denn sie ist nur 6 gliederig und hat die grössten Zahlen-Coefficienten.

Wenn im vorstehenden auch die 8 gliederigen Formen zur Vergleichung beigezogen wurden, so geschah dieses wegen der theoretischen Vollständigkeit, denn bei wirklichen Ausgleichungsrechnungen überwiegt oft die Rücksicht auf geringe Zahl der Glieder, und man wird dann nur unter den 4 Fällen $A B C D$ zu wählen haben, und insofern die Wahl nach (28) oder (30) treffen.

Die Ausscheidung der 8 gliederigen Seitengleichungen ist aber durchaus nicht immer gerechtfertigt, im Gegenteil, wir halten die absolut günstigste Seitengleichung (26) für den fingierten Zentralpunkt M der Fig. 5., welche zudem so symmetrischen Bau hat, dass sie für jedes Viereck aus dem Kopf angeschrieben werden kann, für die einzig empfehlenswerte in Fällen, wo es auf scharfe Rechnung ankommt.

Beispielshalber haben wir die Ausgleichung des Hannover'schen Fünfecks Fig. 5. S. 189 nochmals gemacht unter Einführung der *schärfsten* 8 gliederigen Form für das Viereck Aegidius-Burg-Schanze-Steuerndieb, nämlich nach Fig. 1. S. 189:

$$\frac{\sin(17-16) \sin(14-13) \sin(3-2) \sin(20-19)}{\sin(18-17) \sin(15-14) \sin(4-3) \sin(21-20)} = 1$$

Die Ausrechnung mit den Winkeln von S. 190—191 gab in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:

$$\begin{aligned} &+ 1,64 (v_{17} - v_{16}) + 2,16 (v_{14} - v_{13}) + 2,53 (v_3 - v_2) + 2,41 (v_{20} - v_{19}) \\ &+ 1,42 (v_{17} - v_{18}) + 3,54 (v_{14} - v_{15}) + 1,58 (v_3 - v_4) + 2,25 (v_{20} - v_{21}) + 6,5 = 0 \end{aligned}$$

oder geordnet:

$$\begin{aligned} &- 2,53 v_2 + 4,11 v_3 - 1,58 v_4 - 2,16 v_{13} + 5,70 v_{14} - 3,54 v_{15} \\ &- 1,64 v_{16} + 3,06 v_{17} - 1,42 v_{18} - 2,41 v_{19} + 4,66 v_{20} - 2,25 v_{21} + 6,5 = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wurde an Stelle der zweiten Gleichung (6) oben auf S. 194—195

gesetzt und alles übrige gelassen; die Normalgleichungen werden an Stelle von S. 193 die folgenden (in abgekürzter Schreibweise nach S. 80 unten):

$$\begin{array}{rcl}
 +107,19k_1 + 1,08k_2 - 3,41k_3 + 3,27k_4 + 0,08k_5 + 0,49k_6 - 0,87k_7 - 0,24k_8 + 18,20 & = & 0 \\
 +122,13k_2 - 0,28k_3 & \dots & -0,58k_5 - 2,37k_6 + 2,32k_7 + 1,90k_8 + 6,50 = 0 \\
 +6,00k_3 - 2,00k_4 & \dots & \dots -2,00k_7 - 2,00k_8 - 1,02 = 0 \\
 +6,00k_4 - 2,00k_5 & \dots & \dots \dots + 2,22 = 0 \\
 +6,00k_5 - 2,00k_6 & \dots & \dots -2,00k_8 - 2,36 = 0 \\
 +6,00k_6 - 2,00k_7 + 2,00k_8 & = & 0,76 = 0 \\
 +6,00k_7 + 2,00k_8 & = & 2,30 = 0 \\
 +6,00k_8 & = & 4,30 = 0
 \end{array}$$

Die Auflösung gab:

$$\begin{array}{llll}
 k_1 = -0,175 & k_2 = -0,027 & k_3 = -0,386 & k_4 = -0,366 \\
 k_5 = +0,111 & k_6 = +0,462 & k_7 = -0,059 & k_8 = -0,941
 \end{array}$$

Die Weiterrechnung gab die v ein klein wenig anders, als sie in der Tabelle II von S. 194–195 erhalten wurden und zwar zu Gunsten der *neuen* Ausgleichung; deshalb sind auf S. 196 diese *neuen* v und nicht die alten von S. 194–195 eingesetzt, wie bereits auf S. 195 im Kleingedruckten auseinandergesetzt ist. Die neue Rechnung mit der schärferen Seitengleichung hat also Verbesserungen bis zum Betrag von rund 0,01" gebracht, ohne dabei mehr Mühe zu verursachen, als eine weniger günstige Seitengleichung.

Zur vorliegenden Frage mag auch noch ein Citat genommen werden aus „Astr. geod. Arbeiten f. d. Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, II. Abt. das trig. Netz, I. Ordnung von A. Nagel, 1890“, S. 492: „Zachariae hat zuerst eine tiefergehende Untersuchung dieser Frage angestellt, welche von Jordan nicht unwesentlich erweitert worden ist.“ Nagel macht dabei so gut es geht, praktischen Gebrauch von der fraglichen Theorie.

Division und Multiplikation der Seitengleichungen.

Im Anschluss an die vorstehende Untersuchung über die günstigste Seitengleichungsform möge auch noch eine andere Formfrage erledigt werden, welche eigentlich nicht hierher gehört, aber doch gelegentlich hier mit erörtert werden soll, weil sie in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 236 in Zusammenhang mit der Seitengleichungsfrage gebracht wurde.

Es handelt sich darum, dass eine Seitengleichung, wenn ihre Coefficienten unbequem gross werden, beliebig mit 10, 100, 1000, kurz mit *jeder* beliebigen Zahl dividiert (oder auch multipliziert) werden darf, ohne dass ihr mathematischer Sinn oder ihre Schärfe geändert würde, wenn nur keine Wegwerfung von Decimalen stattfindet.

Dieses ist bereits in § 47. S. 134–135 angegeben (wie auch schon in den früheren Auflagen dieses Buches).

Diese einfache Sache scheint dem Verfasser oben erwähnter Bemerkungen in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 236 nicht geläufig gewesen zu sein, als er 1893 in einem Buche über „M. d. kl. Q.“, S. 251 zu unserer vorstehenden Theorie schrieb: „Dabei wird sich ergeben, dass für die sehr kleinen Winkel verhältnismässig sehr grosse Coefficienten der Verbesserungen in die umgeformten Bedingungsgleichungen eintreten, wodurch in den weiteren Rechnungen die übrigen Coefficienten im Zusammenwirken erdrückt werden und dass daher die Benutzung zehnstelliger Logarithmen bei Auflösung der Endgleichungen u. s. w. noch keine genügende Genauigkeit erreichen lässt“ und in „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 236: dass „Jordan im § 69. seines Handbuches I. Band 1888 (übereinstimmend mit vorstehendem § 84.) immer nur die Wichtigkeit sehr grosser Coefficienten betont und danach nicht angenommen werden konnte, dass er die grossen Coefficienten durch Division wieder beseitigen werde.“

Diese Kritik giebt nun Veranlassung, die Sache jetzt noch deutlicher auszudrücken, als in der vorigen Auflage 1888, § 69. für nötig gehalten wurde.

Die Benennung „*grosse*“ Coefficienten kann bei diesen Erörterungen zweierlei bedeuten, z. B. in den Gleichungen (22) S. 303 hat 30 v_8 einen *grossen* Coefficienten 30 im Vergleich mit 8 v_8 , welches nur den *kleinen* Coefficienten 8 hat. Wenn man aber die erste Gleichung von (22) mit 10 dividiert und dazu die 4te Gleichung geradezu nimmt, so hat man:

$$\begin{aligned} -0,1 v_1 - 1,8 v_2 + 7,5 v_6 - 2,1 v_8 - 3,0 v_8 + 4,0 &= 0 \\ + 1 v_1 - 5 v_2 + 22 v_6 - 6 v_8 - 8 v_8 + 13 &= 0 \end{aligned}$$

Nun könnte man sagen, 3,0 ist ein *kleiner* Coefficient im Vergleich mit 8; allein in anderem Sinne ist 3,0 doch ein grösserer Coefficient als 8, weil 3,0 aus $\frac{30}{10}$ entstanden mit ± 1 Einheit seiner

letzten Stelle, auf $\frac{1}{30}$ oder 3,3 % seines Wertes genau ist, dagegen 8 mit ± 1 seiner letzten Stelle nur auf $\frac{1}{8}$ oder 12 % seines Wertes genau, oder nehmen wir die Coefficienten von v_2 , nämlich 7,5 und 22, so ist 7,5 in dieser Form zwar kleiner als 22, aber doch ist 7,5 im Sinne der hier behandelten Theorie der grössere Coefficient, weil es auf die Stellung des Kommas nicht ankommt.

Oder kurz, die *grossen* Coefficienten sind deswegen die besseren, weil sie, mag man sie auch mit 10, 100 und beliebig dividieren, immer noch *relativ* genauer sind als die ursprünglich kleineren Coefficienten. Damit dürfte für jeden in solchen Sachen nicht unerfahrenen Rechner der Vorwurf „die grossen Coefficienten durch Division wieder zu *beseitigen*“ — erledigt sein.

Wir werden im nächsten § 85. durch ein Zahlenbeispiel zu dieser Sache noch weitere Aufklärung geben, hier aber sei die ganz einfache Frage der Division der Gleichungen noch etwas weiter dargelegt.

In den beiden ersten Triangulierungsausgleichungen, welche wir haben, nämlich in dem „supplementum theoriae combinationis 1826“, rechnet Gauss die Seitengleichungen in Einheiten der *siebenten* Logarithmenstelle, und dabei tritt der Übelstand ein, der oben mit „Erdrücken“ der kleinen Coefficienten benannt wurde, denn es lautet z. B. die erste Normalgleichung in Art. 24. des suppl. theor. comb.:

$$-1,368 = +6A - 2B - 2C - 2D + 184,72F - 19,85G$$

Hier ist der Coefficient 184,72 zu gross, was in unserem Commentar hiezu (in Jordan-Steppes deutsches Vermessungswesen 1882, S. 13) bemerkt wurde.

Als Verfasser nach dem klassischen Muster des suppl. theor. comb. seine ersten Ausgleichungsversuche machte, welche in Taschenbuch der prakt. Geom. 1873, § 147 u. ff. veröffentlicht sind, wurde dem Gauss'schen Vorbild entsprechend ebenfalls in Einheiten der 7ten Log.-Stelle gerechnet aber in der folgenden Auflage, 1878, 2. Band S. 147–148 der daraus folgende Übelstand erkannt, und bei einem Teile der Ausgleichungen jenes Bandes berücksichtigt, durch Rechnung in Einheiten der 6ten Log.-Stelle und S. 148 dazu bemerkt: Man braucht überhaupt keine bestimmte Logarithmendecimale als Einheit der linearen Seitengleichungen zu nehmen, sondern man kann diese Seitengleichungen mit jeder beliebigen Konstanten multiplizieren. Man vergleiche hiezu auch eine Bemerkung in dem Werke „Die königl. preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, I. Teil, 2. Aufl., Berlin 1870“, S. 24.

Seit unserer 3. Auflage haben wir bei solchen Ausgleichungen stets in Einheiten der 6. Logarithmendecimale gerechnet, was das bequemste ist.

Endlich sind die neueren Ausgleichungen von *Helmert* hier zu erwähnen, von denen ein Beispiel in unserem vorhergehenden § 83. enthalten ist. Es wird hier in der Gleichung (g) S. 295 in *halben* Einheiten der 6ten Logar.-Stelle gerechnet, wodurch der Vorteil entsteht, dass die Coefficienten der linearen Seitengleichungen noch mehr den Coefficienten $+1$ oder -1 der Dreiecks-gleichungen nahe gebracht werden.

Man sieht aus diesen Citaten, dass die kleine formelle Frage der Masseinheit in den linearen Seitengleichungen bereits ihre Geschichte hat, und dem nicht unerfahrenen Rechner längst geläufig ist.

§ 85. Günstige und ungünstige Seitengleichung in einem Vierecks-Beispiel.

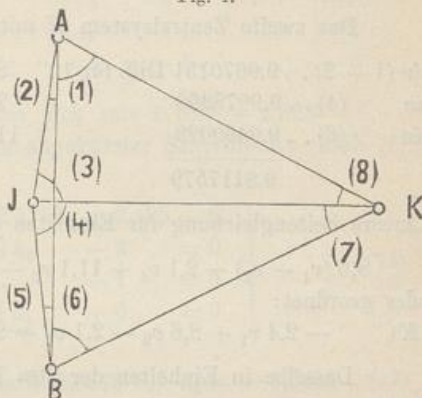
Zu weiterer Klarlegung der im vorigen § 84. behandelten Theorie für mehr oder weniger scharfe Aufstellung der Seitengleichung in einem Vierecke wollen wir im Nachfolgenden ein Zahlenbeispiel durchrechnen mit einer Vierecksform (Fig. 1.),

welche als charakteristisch für die Wahl des Zentralsystems bezeichnet worden ist (nach „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 176—182 und S. 235—240).

Die Anwendung unseres Flächensatzes (28) § 84. S. 305 giebt hier:

Zentralpunkt	Mass der Günstigkeit
A	Dreiecksfläche B J K
B	„ A J K
J	„ A B K
K	„ A B J

Fig. 1.



Es ist also *J* der günstigste Zentralpunkt, weil die abgewandte Fläche *ABK* am grössten ist, und *K* erscheint als ungünstigster Zentralpunkt, weil die abgewandte Fläche *ABJ* am kleinsten ist.

Die Seitengleichungen für diese beiden Fälle sind:

$$\text{Zentralpunkt } J, \quad \frac{\sin(1+2) \sin(7) \sin(5)}{\sin(8) \sin(5+6) \sin(2)} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Zentralpunkt } K, \quad \frac{\sin(1+2) \sin(4) \sin(6)}{\sin(3) \sin(5+6) \sin(1)} = 1 \quad (3)$$

Hierzu nehmen wir folgende Winkel als gemessen an:

(1) = 62° 14' 30"	(1) = 62° 14' 30"	(2) = 5° 42' 33"	(4) = 84° 17' 25"
(8) = 27 45 30	(2) = 5 42 33	(3) = 84 17 26	(5) = 5 42 32
(7) = 27 45 28	(3) = 84 17 26	(4) = 84 17 25	(6) = 62 14 29
(6) = 62 14 29	(8) = 27 45 30	(5) = 5 42 32	(7) = 27 45 28
179° 59' 57"	179° 59' 59"	179° 59' 56"	179° 59' 54"
<i>w</i> = -3"	<i>w</i> = -1"	<i>w</i> = -4"	<i>w</i> = -6"

Dazu gehören die Winkelbedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} & \text{unabhängig} \quad \begin{cases} v_1 + v_8 + v_7 + v_6 - 3'' = 0 & (5) \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_8 - 1'' = 0 & (6) \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 - 6'' = 0 & (7) \end{cases} \\ & \text{abhängig} \quad (v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 4'' = 0) & (8) \end{aligned}$$

Von diesen 4 Gleichungen sind aber nur 3 unabhängig, wir wollen etwa (5) (6) und (7) in die Ausgleichung aufnehmen. Ausserdem muss eine Seitengleichung genommen werden.

Das Zentralsystem *J* nach (2) giebt folgende trigonometrische Ausrechnung mit 7 stelligen Logarithmen:

<i>sin</i> (1+2) . . 9.9670151	Diff. für 10" 86	<i>sin</i> (8) . . 9.6681466	Diff. für 10" 400
<i>sin</i> (7) . . 9.6681386	400	<i>sin</i> (5+6) . . 9.9670134	86
<i>sin</i> (5) . . 8.9977101	2106	<i>sin</i> (2) . . 8.9977312	2106
8.6328638		8.6328912	

Die dazu gehörige lineare Seitengleichung ist für Einheiten der 6ten Logar.-Stelle:
 oder geordnet:

$$(J) + 0,86 v_1 - 20,20 v_2 + 20,20 v_5 - 0,86 v_6 + 4,00 v_7 - 4,00 v_8 - 27,4 = 0$$

(9)

Das zweite Zentralsystem K mit der Gleichung (3) giebt:

$\sin (1+2) \dots 9.9670151$	Diff. für 10''	86	$\sin (3) \dots 9.9978402$	Diff. für 10''	21
$\sin (4) \dots 9.9978399$		21	$\sin (5+6) \dots 9.9670134$		86
$\sin (6) \dots 9.9469029$		111	$\sin (1) \dots 9.9469040$		110
<hr/>			<hr/>		
9.9117579			9.9117576		

Lineare Seitengleichung für Einheiten der 7. Decimale:

$$\begin{aligned} & 8,6(v_1 + v_2) + 2,1 v_4 + 11,1 v_6 - 2,1 v_8 - 8,6(v_5 + v_6) - 11,0 v_1 + 3 = 0 \\ \text{oder geordnet:} & \\ (K) & - 2,4 v_1 + 8,6 v_2 - 2,1 v_8 + 2,1 v_4 - 8,6 v_5 + 2,4 v_6 + 3 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Dasselbe in Einheiten der 6ten Decimale:

$$- 0,24 v_1 + 0,86 v_2 - 0,21 v_8 + 0,21 v_4 - 0,86 v_5 + 0,24 v_6 + 0,3 = 0 \quad (11)$$

Wir wollen nun zuerst zeigen, dass man die Gleichung (9) in die Form (10) oder (11) überführen kann; man braucht nur v_7 und v_8 aus (9) zu eliminieren, nämlich aus (7) und (6) hat man:

$$\begin{aligned} v_7 &= -v_4 - v_5 - v_6 + 6'' \\ v_8 &= -v_1 - v_2 - v_3 + 1'' \end{aligned}$$

Diese beiden in (9) eingesetzt werden geben:

$$+ 4,86 v_1 - 16,20 v_2 + 4,00 v_3 - 4,00 v_4 + 16,20 v_5 - 4,86 v_6 - 7,00 = 0 \quad (12)$$

Wenn man dieses mit $- 3 : 7$ multipliziert, so kommt:

$$- 2,08 v_1 + 6,94 v_2 - 1,71 v_3 + 1,71 v_4 - 6,94 v_5 + 2,08 v_6 + 3,00 = 0 \quad (13)$$

dieses stimmt mit (10) zwar im Absolutgliede 3,0 überein, aber die Coefficienten selbst, welche in (11) und (13) ebenfalls stimmen sollten, weichen ganz erheblich ab, z. B. $- 2,4$ gegen $- 2,08$ u. s. w. und darin zeigt sich bereits die Überlegenheit der Gleichung (2) mit dem Zentralpunkt J über (3) mit dem Zentralpunkt K . Allerdings wenn die Absolutglieder in (9) und (10) trigonometrisch etwa mit 8–10 stelligen Logarithmen berechnet worden wären, überhaupt wenn diese Absolutglieder ganz scharf wären, so müsste auch die Umwandlung von (9) in (10) ebenfalls scharf stimmen. Wir haben aber absichtlich nur mit 7 stelligen Logarithmen gerechnet, um eben die unvermeidlichen Fehler dieser Rechnung ins richtige Licht zu stellen.

Nun sind uns aber die Coefficienten in (9) immer noch zu gross im Vergleich mit den Coefficienten 1 der Winkelsummengleichungen; wir wollen daher die Gleichung (9) mit 8 dividieren, indem dadurch der Mittelwert der Coefficienten nahezu auf 1 gebracht wird. Man erhält auf diesem Wege aus (9):

$$+ 0,108 v_1 - 2,525 v_2 + 2,525 v_5 - 0,108 v_6 + 0,500 v_7 - 0,500 v_8 - 3,425 = 0 \quad (14)$$

Nun wollen wir die Ausgleichung unseres Vierecks völlig zweifach machen:

I. Ausgleichung mit den Bedingungsgleichungen (14), (5), (6), (7)

II. " " " " (10), (5), (6), (7).

Bedingungsgleichungen I. (14), (5), (6), (7) (15)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w
(14)	+ 0,108	- 2,525	+ 2,525	- 0,108	+ 0,500	- 0,500	- 3,425
(5)	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	- 3
(6)	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	- 1
(7)	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	..	- 6

Die zugehörigen Normalgleichungen finden sich mit $0,108^2 + 2,525^2 + \dots = 13,275$ u. s. w. und im Ganzen erhält man in abgekürzter Schreibweise (nach (2) und (3) S. 80):

$$\left. \begin{array}{rcl} + 13,275 k_1 & .. & - 2,917 k_3 + 2,917 k_4 - 3,425 = 0 \\ & + 4 k_2 + 2 k_3 & + 2 k_4 - 3 = 0 \\ & & + 4 k_3 & .. & - 1 = 0 \\ & & & + 4 k_4 & - 6 = 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = - 0,0245 \quad , \quad k_2 = - 0,2500 \quad , \quad k_3 = + 0,3573 \quad , \quad k_4 = + 1,6428 \quad (17)$$

Damit macht man die Ausrechnung der einzelnen v , indem man der Tabelle (15) nach Vertikalreihen folgt. Die Ergebnisse sind:

$$\left. \begin{array}{llll} v_1 = + 0,1047'' & v_2 = + 0,4191'' & v_3 = + 0,3573'' & v_4 = + 1,6428'' \\ v_5 = + 1,5810'' & v_6 = + 1,3954'' & v_7 = + 1,3806'' & v_8 = + 0,1195'' \end{array} \right\} \quad (18)$$

Wenn man diese Verbesserungen den gemessenen Winkeln hinzufügt, so bekommt man statt der früheren (4) nun die ausgeglichenen Dreiecke:

$$\left. \begin{array}{ll} [1] = 62^\circ 14' 30,1047'' & [1] = 62^\circ 14' 30,1047'' \\ [8] = 27 \ 45 \ 30,1195 & [2] = 5 \ 42 \ 33,4191 \\ [7] = 27 \ 45 \ 29,3806 & [3] = 84 \ 17 \ 26,3573 \\ [6] = 62 \ 14 \ 30,3954 & [8] = 27 \ 45 \ 30,1195 \\ \hline 180^\circ \ 0' \ 0,0002'' & 180^\circ \ 0' \ 0,0006'' \\ [2] = 5^\circ 42' 33,4191'' & [4] = 84^\circ 17' 26,6428'' \\ [3] = 84 \ 17 \ 26,3573 & [5] = 5 \ 42 \ 33,5810 \\ [4] = 84 \ 17 \ 26,6428 & [6] = 62 \ 14 \ 30,3954 \\ [5] = 5 \ 42 \ 33,5810 & [7] = 27 \ 45 \ 29,3806 \\ \hline 180^\circ \ 0' \ 0,0002'' & 179^\circ 59' 59,9998'' \end{array} \right\} \quad (19)$$

Wie man sieht, schliessen alle 4 Dreiecke nahe auf $0,000''$, und völlig genügend stimmen auch die Seitengleichungen, wie nachstehende Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen zeigen wird:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Zentralsystem } J & \text{Zentralsystem } K \\ \sin [1 + 2] \dots 9.9670155 & \sin [1 + 2] \dots 9.9670155 \\ \sin [7] \dots 9.6681441 & \sin [4] \dots 9.9978403 \\ \sin [5] \dots 8.9977434 & \sin [6] \dots 9.9469044 \\ & \hline & 9.9117602 \\ \sin [8] \dots 9.6681470 & \sin [3] \dots 9.9978403 \\ \sin [5 + 6] \dots 9.9670159 & \sin [5 + 6] \dots 9.9670159 \\ \sin [2] \dots 8.9977400 & \sin [1] \dots 9.9469041 \\ & \hline & 9.9117603 \end{array} \right\} \quad (20)$$

Damit ist unsere ganze erste Ausgleichung I ganz glatt vollendet und die dabei benützte Seitengleichung (9) mit dem Zentralpunkt J oder die Umformung (14) hat gar keine Übelstände, weder sachliche, noch rechnerisch formelle zur Folge gehabt.

Wir gehen über zur Ausgleichung II mit den Bedingungsgleichungen (10), (5), (6), (7). Es wurde derselbe Gang eingehalten wie bei I, wir können die Darstellung daher nun kürzer fassen. Die Normalgleichungen und deren Auflösungen sind:

$$\begin{array}{rcl} +168,26 k_1 & \dots & +4,10 k_3 - 4,10 k_4 + 3,00 = 9 \\ & +4 k_2 + 2 k_3 & + 2 k_4 - 3 = 0 \\ & & +4 k_3 \quad \quad - 1 = 0 \\ & & & +4 k_4 - 6 = 0 \end{array} \quad (21)$$

$$k_1 = +0,01330 \quad , \quad k_2 = -0,2500 \quad , \quad k_3 = +0,3613 \quad , \quad k_4 = +1,6387 \quad (22)$$

Hier sollen k_2 k_3 k_4 mit den entsprechenden k in (17) stimmen, was ungefähr der Fall ist, aber bereits bei k_3 und k_4 Abweichungen giebt. Die Normalgleichungen (21) unterscheiden sich ungünstig von (16), indem die Coefficienten in (21) viel mehr unter sich ungleich sind als in (16); das rührt von der Seitengleichung (10) K her, welche erstens an und für sich ungünstig ist (nach der Theorie des vorigen § 84.) und zweitens in Einheiten der 7ten Logarithmen-Decimale angesetzt ist, was die Coefficienten mit ungeschickter Stellung der Decimal-Kommas auftreten lässt.

Rechnen wir nun mit den Correlaten (22) weiter, so erhalten wir die Winkelverbesserungen:

$$\begin{array}{llll} v_1 = +0,0794'' & v_2 = +0,4757'' & v_3 = +0,3334'' & v_4 = +1,6666'' \\ v_5 = +1,5243'' & v_6 = +1,4206'' & v_7 = +1,3887'' & v_8 = +0,1113'' \end{array} \quad (23)$$

Hiermit die geschlossenen Dreiecke:

$$\begin{array}{ll} [1] = 62^\circ 14' 30,0794'' & [1] = 62^\circ 14' 30,0794'' \\ [8] = 27 \quad 45 \quad 30,1113 & [2] = 5 \quad 42 \quad 33,4757 \\ [7] = 27 \quad 45 \quad 29,3887 & [3] = 84 \quad 17 \quad 26,3334 \\ [6] = 62 \quad 14 \quad 30,4206 & [8] = 27 \quad 45 \quad 30,1113 \\ \hline 180^\circ 0' 0,0000'' & 179^\circ 59' 59,9998'' \\ [2] = 5^\circ 42' 33,4757'' & [4] = 84^\circ 17' 26,6666'' \\ [3] = 84 \quad 17 \quad 26,3334 & [5] = 5 \quad 42 \quad 33,5243 \\ [4] = 84 \quad 17 \quad 26,6666 & [6] = 62 \quad 14 \quad 30,4206 \\ [5] = 5 \quad 42 \quad 33,5243 & [7] = 27 \quad 45 \quad 29,3887 \\ \hline 180^\circ 0' 0,0000'' & 180^\circ 0' 0,0002'' \end{array} \quad (24)$$

Dazu die Seitengleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Zentralpunkt } J & \text{Zentralpunkt } K \\ \sin [1+2] \dots 9.967 \, 0156 & \sin [1+2] \dots 9.967 \, 0156 \\ \sin [7] \dots 9.668 \, 1441 & \sin [4] \dots 9.997 \, 8403 \\ \sin [5] \dots 8.997 \, 7422 & \sin [6] \dots 9.946 \, 9044 \\ & \hline & 9.911 \, 7603 \\ \sin [8] \dots 9.668 \, 1470 & \sin [3] \dots 9.997 \, 8403 \\ \sin [5+6] \dots 9.967 \, 0159 & \sin [5+6] \dots 9.967 \, 0159 \\ \sin [2] \dots 8.997 \, 7412 & \sin [1] \dots 9.946 \, 9041 \\ & \hline & 9.911 \, 7603 \\ & w = -22 \, (!) \end{array} \quad (25)$$

Betrachten wir diese zweite Ausgleichung (24) (25) mit der Seitengleichung (10) K , und ihre Vergleichung mit der ersten Ausgleichung (19) (21), der die Seitengleichung (9) J zu Grunde liegt, so fällt zuerst auf, dass die Dreiecksschlüsse (19) und (24) zwar beide vorzüglich stimmen, jedenfalls auf 0,001", dass aber die einzelnen Winkel schon in 0,01" und sogar um 0,05" abweichen. Das erklärt sich daraus, dass die Winkelsummengleichungen (5) (6) (7) in beiden Fällen gleich scharf eingeführt sind, während die Seitengleichungen (9) J und (10) K ungleich scharf sind, und zwar zu Ungunsten von (10) K . Allerdings die Seitengleichung (10) K selbst stimmt in beiden Fällen auf die letzte Einheit der 7. Logarithmenstelle, aber in der zweiten Ausgleichung stimmt die andere Seitengleichung (9) J nicht, sondern lässt einen Fehler von 22 Einheiten der 7. Logarithmenstelle. (Vgl. (25) mit (20).

Damit ist nun die Vergleichung unbedingt zu Gunsten von (9) J nach dem Flächen-Satze von (28) § 84. S. 305 entschieden, denn diese Ausgleichung ist nicht nur numerisch gut (nahe gleiche Coefficienten der Normalgleichungen), sondern sie bringt, was die Hauptsache ist, alle Widersprüche zum Verschwinden, während bei (10) K das nur teilweise der Fall ist.

In dem bisher behandelten Beispiele waren die kleinsten Winkel immer noch $5^\circ 43'$, und man kann noch fragen, wie sich die Sache gestaltet in dem extremen Falle, dass die spitzen Winkel nur noch einige Minuten betragen.

Zu diesem Zwecke wollen wir unser erstes Beispiel mit Fig. 1. S. 309 so abändern, dass die Winkel (1), (8), (7), (6) von früher in (4) bleiben, während die Winkel (2), (3), (4), (5) folgende neue Werte annehmen sollen:

$$\begin{array}{ll} (2) = 0^\circ 5' 33'' & (3) = 89^\circ 54' 26'' \\ (5) = 0 \ 5 \ 32 & (4) = 89 \ 54 \ 25 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ll} (2) = 0^\circ 5' 33'' & (3) = 89^\circ 54' 26'' \\ (5) = 0 \ 5 \ 32 & (4) = 89 \ 54 \ 25 \end{array}} \right\} \quad (26)$$

dabei bleiben die Winkelsummen in allen 4 Dreiecken dieselben wie früher in (4) S. 309.

Dagegen die Seitengleichungen werden anders, nämlich bei der Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen:

Zentralpunkt J			Zentralpunkt K		
(1 + 2)	9.9472719	111	(1 + 2)	9.9472722	111
(7)	9.6681386	400	(4)	9.9999994	0
(5)	7.2067128	129650	(6)	9.9469029	110
6.8221233			9.8941745		
(8)	9.6681466	400	(3)	9.9999994	0
(5 + 6)	9.9472700	111	(5 + 6)	9.9472700	111
(2)	7.2080189	129650	(1)	9.9469040	110
6.8234355			9.8941734		

(27)

In Einheiten der 6. Logarithmenstelle bekommt man aus diesem J (27):

$$1,11 v_1 - 1295,39 v_2 + 1295,39 v_5 - 1,11 v_6 + 4,00 v_7 - 4,00 v_8 - 1312,2 = 0 \quad (28)$$

und aus K (27):

$$+ 0,01 v_1 + 1,11 v_2 - 1,11 v_5 + 1,1 = 0 \quad (29)$$

In diesen beiden Gleichungen sind die Coefficienten sehr ungleich; man darf deswegen, wenn man mit gewöhnlicher Rechenschärfe zufrieden sein will, die kleinen Glieder neben den grossen Gliedern vernachlässigen und erhält damit:

$$\text{aus (28):} \quad -1295,39 (v_2 - v_5) - 1312,2 = 0 \quad (J) \quad (30)$$

$$\text{aus (29):} \quad + 1,11 (v_2 - v_5) + 1,1 = 0 \quad (K) \quad (31)$$

Beide Gleichungen geben eine Bedingung für die Differenz $v_2 - v_5$, die man so schreiben kann:

$$\text{aus (30):} \quad v_2 - v_5 + 1,0130'' = 0 \quad (J) \quad (32)$$

$$\text{aus (31):} \quad v_2 - v_5 + 0,99'' = 0 \quad (K) \quad (33)$$

Im Ganzen stimmen diese beiden Gleichungen überein, aber die Gleichung (32), welche auf dem Zentralsystem J beruht, ist viel schärfer als die aus dem ungünstigen Zentralsystem K hergeleitete Gleichung (33), welche bei der Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen hier einen Fehler von $0,02''$ gebracht hat, der aber nur *zufällig* sehr klein ist und ganz gut auch $0,1''$ werden könnte, denn 6 zusammen genommene 7 stellige Logarithmen in (27) werden im Mittel $0,25 \sqrt{6} = 0,6$ Einheiten der 7. Decimale als Fehler bringen, was aber auch auf 2,0 Einheiten der 7. Stelle oder 0,2 Einheiten der 6. Stelle anwachsen kann und dann in (31) und (33) einen Fehler von $0,2''$ erzeugt, während die andere Gleichung (32) J stets auf $0,001''$ scharf bleibt.

Nachdem durch die vorstehenden Zahlenbeispiele aufs deutlichste gezeigt ist, dass die Theorie unseres vorhergehenden § 84. mit dem Zachariä'schen Satze, „welcher von Jordan auf die anschauliche Form des Flächenmasses gebracht wurde“ — vollständig richtig und praktisch sehr wertvoll ist, müssen wir noch eine Kritik und Controverse aus der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 175 bis 182 und S. 235–240 hier zum Abschluss bringen. —

Den ersten Teil dieser Sache, betreffend die beliebige *Division* der grossen Coefficienten haben wir bereits am Schlusse des vorigen § 84. S. 308 erledigt, und auch einen kleinen Rechenfehler, der in unseren Gleichungen (27)–(33) untergelaufen war, nämlich $\log \sin (1 + 2) = 9,9472719$ statt $9,9472722$, haben wir im vorstehenden bei (33) insofern behandelt, als gezeigt wurde, dass ein solcher Fehler von 2 bis 3 Einheiten der 7. Decimale, welcher durch ungünstige Häufung von gewöhnlichen Abrundungen zusammen bei 6 Logarithmen vorkommen kann, gerade in der ungünstigen Gleichung (31) K tausendfach schlimmer wirkt als in der günstigen Gleichung (30) J , weil in letzterer die Coefficienten mehr als 1000fach grösser sind als in (31) K . Also gerade der kleine Rechenfehler, welcher in „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 239 bemerkt wurde, spricht nicht gegen den „Zachariä-Jordan'schen Satz“, sondern am lautesten für denselben, indem dadurch gezeigt wird, wie die unvermeidlichen Abrundungsfehler bei 7 stelligen Logarithmen ganz verschieden wirken, je nachdem man eine günstige Gleichungsform mit grossen Coefficienten oder eine ungünstige Form mit kleinen Coefficienten anwendet.

Weiter wurde auf S. 239 „Zeitschr. f. Verm. 1894“ gesagt: „Die kleinen Abweichungen, (welche bei günstiger oder ungünstiger Form der Seitengleichung auftreten), haben für die weitere Benützung der Winkel keine praktische Bedeutung, wenn man sich nicht gerade darauf versteift, die Dreiecksseiten aus den am schlechtesten geformten Dreiecken zu berechnen.“

Dieses zeugt wieder von Missverständnis der Sache: Wenn wir in (32) oder (33) die Differenz $v_2 - v_5$ scharf auf $0,001''$, also jedenfalls vollauf genügend für $0,01''$ einführen, oder diese Differenz um $\pm 0,1''$ bis $\pm 0,2''$ schwankend einführen, so kommt das nicht bloss den „schlechtesten“ Dreiecken, sondern *allen* Dreiecken und Winkeln zu Gute oder zu Schaden, und es wäre doch unrationell, in eine Ausgleichung, die man sonst auf $0,01''$ führt, einen Fehler von $0,1''$ hineinzutragen und also alle $0,01''$ illusorisch zu machen, ohne dadurch die mindeste Arbeitserleichterung zu erzielen, aus keinem anderen Grunde, als weil der Rechner den inneren Zusammenhang zwischen den $0,1''$ in der Bedingungsgleichung und den $0,01''$ in den Verbesserungen nicht erfasst, oder sich der richtigen Theorie „nicht angeschlossen“ hat.

Damit dürfte diese Sache genügend klar gelegt und der Vorteil der Theorie von § 84. genügend bewiesen sein. Zu der vorstehenden breiten Behandlung einer verhältnismässig einfachen Sache sind wir gezwungen worden durch die in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 235–240 mitgetheilten Verhältnisse.

Reihenfolge der Bedingungsgleichungen.

Wenn die Bedingungsgleichungen einzeln aufgestellt sind, so ist über die Ausgleichung im Übrigen so viel entschieden, dass jeder Gleichung eine bestimmte Korrelate k zukommt, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Bedingungsgleichungen

weiter behandelt werden; jedoch ist für die Frage der Bequemlichkeit der Elimination auch diese Reihenfolge nicht gleichgültig.

Wir wollen das kleine Beispiel (15)–(16) im Vorstehenden S. 311 nochmals vornehmen und nun die Bedingungsgleichungen so umstellen:

$$\begin{array}{cccccccc} +v_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & +v_6 & +v_7 & +v_8 & -3=0 \\ +v_1 & +v_2 & +v_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & +v_8 & -1=0 \\ \dots & \dots & \dots & +v_4 & +v_5 & +v_6 & +v_7 & \dots & -6=0 \\ +0,108 v_1 - 2,525 v_2 & \dots & \dots & +2,525 v_5 - 0,108 v_6 & +0,500 v_7 - 0,500 v_8 & -3,425 & = 0 \end{array}$$

Die zugehörigen Normalgleichungen werden in abgekürzter Schreibweise:

$$\left. \begin{array}{l} +4,000 k_1 + 2,000 k_2 + 2,000 k_3 \dots -3,000 = 0 \\ \quad +4,000 k_2 \dots -2,917 k_4 -1,000 = 0 \\ \quad \quad +4,000 k_3 + 2,917 k_4 -6,000 = 0 \\ \quad \quad \quad +13,275 k_4 -3,425 = 0 \end{array} \right\} \quad (34)$$

Dieses sind *dieselben* Gleichungen wie (16) S. 311, nur in anderer Ordnung, welche insofern etwas bequemer ist, als die frühere Ordnung, weil zu Anfang nur ganze Zahlen 4, 2 u. s. w. als Coefficienten vorkommen.

Die Elimination in dieser neuen Ordnung giebt:

$$k_1 = -0,2500 \quad , \quad k_2 = +0,3567 \quad , \quad k_3 = +1,6430 \quad , \quad k_4 = -0,0252$$

Dieses stimmt im Wesentlichen mit dem früheren k in (17) S. 311; das neue $k_4 = -0,0252$ entspricht dem früheren $k_1 = -0,0245$ und zwar ist nun 0,0252 etwas weniger genau, weil bei der Elimination in der neuen, bequemerer Ordnung am Ende zu wenig Wertstellen übrig geblieben sind. Es ist das ein Beispiel dafür, dass die Bequemlichkeit mit den ganzen Zahlen 4, 2, 2 ... am Anfange noch nicht allein ausschlaggebend ist. Man muss immer darnach trachten, die Quotienten der ersten Reduktionen, nämlich $\frac{[ab]}{[aa]}$, $\frac{[ac]}{[aa]}$ u. s. w. möglichst *klein* zu haben, und namentlich ist zu vermeiden, dass ein solcher Quotient grösser als 1 werde, weil dadurch auch die Abrundungsunsicherheiten vergrößert übertragen würden. Zur Vergleichung von verschiedenen Eliminationsformen dieser Art können dienen das Hannoversche Fünfeck mit Normalgleichungen S. 193 und das frühere Lindener Sechseck in Handb. II. Band, 3. Aufl. 1893, S. 291.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1875“, S. 411 hat Koppe zu einer Auflösung von 34 Normalgleichungen seiner Gotthardtriangulierung zwei Tabellen, Beilage A und Beilage B gegeben, von denen die erste eine unbequeme Ordnung und die zweite eine günstigere und zwar solche Reihenfolge hat, dass die vollen Glieder möglichst zusammenstehen, in der Nähe der Diagonale der quadratischen Glieder zusammengedrängt.

Auch in der Triangulierungsausgleichung von Nagel (vgl. das Citat von S. 307) mit Auflösung von 159 Gleichungen sind die Normalgleichungen S. 579–604 so geordnet, dass in der Nähe der Diagonale der quadratischen Glieder die Glieder voll, und entfernt davon die Glieder leer sind.

§ 86. Ergänzungen zur Theorie der Stationsausgleichungen.

Zum Schluss des Kapitels über Ausgleichung von Triangulierungs-Netzen haben sich noch einige Bemerkungen ergeben, welche die Stationsausgleichungen von § 69. bis 71., 75. bis 77. und 82. zusammen betreffen.

I. Ausrechnung der einzelnen z und v .

In der Näherungsausgleichung von § 69. S. 228 wird darauf ausgegangen, die Richtungsverbesserungen v sowohl nach Sätzen als auch nach Sichten geordnet (nach Linien und nach Spalten auf S. 228 geordnet) auf die Summen Null zu bringen, und wir wollen mit der Theorie von § 71. zeigen, dass dieses streng der Fall sein muss, d. h. dass nach der Stationsausgleichung in jedem einzelnen Satze $[v_n] = 0$ und für jede Sicht $[v'] = 0$ sein muss.

Hiezu haben wir aus den Gleichungen (8) S. 235 durch Summierung der 3 ersten und dann der 3 letzten Gleichungen:

$$[p_1]z_1 + [p_2]z_2 + [p_3]z_3 + [p']x' + [p'']x'' + [p''']x''' - [l] = 0$$

$$([p_1] - p_1^\circ)z_1 + ([p_2] - p_2^\circ)z_2 + ([p_3] - p_3^\circ)z_3 + [p']x' + [p'']x'' + [p''']x''' - ([l] - l^\circ) = 0$$

Diese beiden Gleichungen zusammen geben:

$$p_1^\circ z_1 + p_2^\circ z_2 + p_3^\circ z_3 + [l^\circ] = 0 \quad (1)$$

Wenn man alle Sätze *einzel*n zählt, so sind die p° alle = 1, und man kann dann kurz so schreiben:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots = -[l^\circ] \quad (2)$$

wobei die l° die Beobachtungswerte der ersten Richtung z. B. Kalleninken auf S. 238, sind. Diese l° kann man aber bekanntlich alle gleich Null machen, indem man jeden Satz mit $0^\circ 0' 0''$ in der fraglichen Richtung beginnen lässt, und dann stellt sich (2) noch kürzer so dar:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots = 0 \quad \text{oder} \quad [z] = 0 \quad (3)$$

Dann ist nach S. (234) in der ersten Kolumne von (4):

$$[v^\circ] = [z] - [l^\circ] = 0 \quad (4)$$

und in der zweiten Kolumne von (4) S. 234 hat man:

$$[v'] = p_1' z_1 + p_2' z_2 + p_3' z_3 + \dots + [p']x' - [l'] \quad (5)$$

dieses ist aber gleich Null wegen der 4. Gleichung in (8) S. 235, und ebenso ist es auch mit $[v'']$, $[v''']$ u. s. w., d. h. wir haben nun gezeigt, dass die v nach Kolumnen addiert in allen Richtungen die Summen Null geben müssen.

Aber auch die Summierung nach Linien giebt dasselbe, z. B. die erste Linie in (4) S. 234 giebt:

$$[v_1] = [p_1]z_1 + p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x''' + \dots - [l_1]$$

dieses ist gleich Null wegen der ersten Gleichung von (8) S. 235. Wir haben also nun beispielshalber bei 3 Sätzen mit 4 Zielpunkten:

v_1°	v_1'	v_1''	v_1'''	$[v_1] = 0$	}	(6)
v_2°	v_2'	v_2''	v_2'''	$[v_2] = 0$		
v_3°	v_3'	v_3''	v_3'''	$[v_3] = 0$		
$[v^\circ] = 0$	$[v'] = 0$	$[v''] = 0$	$[v'''] = 0$	$[v] = 0$		

Allerdings haben wir hier zunächst angenommen, dass alle $l^\circ = 0$ seien, allein wenn dieses auch nicht der Fall sein sollte, so braucht man nur $l' - l^\circ$ an Stelle von l' u. s. w. zu setzen, und alles bleibt dann wie im Vorstehenden.

Wir wissen also nun aus (6) ganz allgemein, dass die Fehlersummierung $[v] = 0$ nach Linien und nach Kolumnen, welche bei vollen Sätzen, in IV. S. 225 selbstverständlich war, auch bei beliebig verteilten lückenhaften Sätzen nach der Ausgleichung immer stattfinden muss, und dass also auch eine Näherungsausgleichung nach S. 228

als abgeschlossen und mit der strengen Ausgleichung hinreichend übereinstimmend zu betrachten ist, sobald jene Summen $[v] = 0$ nach Linien und Kolonnen genügend stimmen.

Die einzelnen Satzverschiebungen z hat man aus (9) S. 235:

$$z_1 = \frac{[l_1]}{[p_1]} - \frac{p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x'''}{[p_1]} = L_1 - x_1$$

$$z_2 = \frac{[l_2]}{[p_2]} - \frac{p_2' x' + p_2'' x'' + p_2''' x'''}{[p_2]} = L_2 - x_2$$

$$z_3 = \dots \dots \dots L_3 - x_3$$

Die hier mit L und x abgesondert bezeichneten Teile sind erstens die Satzmittel L und zweitens die auf die betreffenden Sätze entfallenden Beträge x von den x' , x'' , $x''' \dots$

Das Zahlenbeispiel Nidden S. 238 mit $x' = +2,205''$ und $x'' = +3,085''$ giebt für die 12 ersten Sätze:

$$x_1 = x_2 = \dots x_{12} = \frac{x''}{2} = +1,542'',$$

für die folgenden Sätze:

$$x_{13} = x_{14} = \dots x_{31} = -\frac{x'}{2} = +1,102''$$

und

$$x_{32} = x_{33} = \dots x_{43} = \frac{x' + x''}{3} = +1,763''$$

Die Ausrechnung der z selbst wird nach S. 238 so:

Num.	l°	l'	l''	$[l]$	L	$-x$	$L - x$ $= z$
1	0,00	..	5,00	5,00	2,500	- 1,542	+0,958
2	0,00	..	5,75	5,75	2,875	- 1,542	+1,333
3	0,00	..	5,50	5,50	2,750	- 1,542	+1,208
4	0,00	..	7,00	7,00	3,500	- 1,542	+1,958
5	0,00	..	2,00	2,00	1,000	- 1,542	- 0,542
..
12
Summen	37,25	37,25	18,625	-18,504	+0,121
1	0,00	4,25	..	4,25	2,125	- 1,102	+1,023
2	0,00	3,00	..	3,00	1,500	- 1,102	+0,398
..
19
Summen	0,00	48,50	..	48,50	24,250	-20,938	+3,312
1	0,00	0,00	2,75	2,75	0,917	- 1,763	- 0,846
2	0,00	3,50	2,75	6,25	2,083	- 1,763	+0,320
..
12
Summen	0,00	19,75	33,50	53,25	17,750	-21,156	-3,406

Die Summe aller z ist $+0,121 + 3,312 - 3,406 = +0,027$, was in diesem Falle hinreichend mit Null stimmt. Diese so berechneten z bringt man als Satzverschiebungen an allen Richtungsbeobachtungen an, worauf die Vergleichung mit den ausgeglichenen x' x'' auch alsbald alle v geben muss. Wir wollen dieses nur noch kurz andeuten:

Verschobene Sätze			$v = x - (l - z)$			$v^{\circ 2}$	v'^2	v''^2
$l^{\circ} - z$	$l' - z$	$l'' - z$	v°	v'	v''			
- 0,958	..	+ 4,042	+ 0,958	..	- 0,957	0,92	..	0,92
- 1,333	..	+ 4,417	+ 1,333	..	- 1,332	1,78	..	1,78
- 1,208	..	+ 4,292	+ 1,208	..	- 1,207	1,46	..	1,46
..
Summe der ersten Gruppe						12,45	..	12,45
" " zweiten "						11,81	11,81	..
" " dritten "						6,43	8,65	6,46
						30,69	20,46	18,91
								70,06

Die Gesamtsumme $[v v] = 70,06$ stimmt hinreichend mit 70,18 oder rund 70,2 von S. 237 und S. 239. (Vgl. hierzu S. 239 im Kleingedruckten.)

Der mittlere Fehler einer Richtungsmessung ist auf S. 239 bereits berechnet mit dem Nenner 98—45, wo $98 = [p^{\circ}] + [p'] + [p'']$ ist, und der Abzug 45 sich aus den 43 einzelnen z nebst x' und x'' erklärt. Um auch für jede der 3 einzelnen Sichten einen solchen mittleren Fehler zu berechnen, wollen wir die Verteilung der Abzüge so machen: die Abzüge für die z in den einzelnen Richtungen entsprechen den Abzügen bei (aa), (bb) in (11) S. 236:

$$\left. \begin{aligned} [p^{\circ}] - \dots &= 43 - \frac{12}{2} - \frac{19}{2} - \frac{12}{3} = 43 - 19,5 = 23,5 \\ [p'] - \dots &= 31 - \dots - \frac{19}{2} - \frac{12}{3} = 31 - 13,5 = 17,5 \\ [p''] - \dots &= 24 - \frac{12}{2} - \dots - \frac{12}{3} = 24 - 10,0 = 14,0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Für Winkelausgleichung kommt nun noch -2 wegen x' und x'' hinzu, und man hat dann den Abzug $43 + 2$, wie auf S. 239. Wenn wir aber nach Richtungen abtrennen wollen, so gelten 3 Richtungen als Unbekannte, aber dafür wieder ein z als willkürlich, und daraus folgen die Nenner:

$$\left. \begin{aligned} N^{\circ} &= 43 - 1 - 19,5 + 0,333 = 22,833 \\ N' &= 31 - 1 - 13,5 + 0,333 = 16,833 \\ N'' &= 24 - 1 - 10,0 + 0,333 = 13,333 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Summe $52,999 = 53$

Wenn man mit diesen Nennern und den im Vorhergehenden ausgerechneten v^2 die mittleren Fehler für die 3 einzelnen Sichten ausrechnet, so erhält man (vgl. S. 238):

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Kalleninken} & \text{Gilge} & \text{Lattenwalde} \\ m^{\circ} = \sqrt{\frac{30,69}{22,833}} & m' = \sqrt{\frac{20,46}{16,833}} & m'' = \sqrt{\frac{18,91}{13,333}} \\ = \pm 1,16'' & = \pm 1,10'' & = \pm 1,19'' \end{array} \right\} \quad (9)$$

Für alle 3 Sichten zusammen ist (wie schon auf S. 239 angegeben ist):

$$m = \sqrt{\frac{70,06}{53}} = \pm 1,15'' \quad (10)$$

Man kann auch m^2 aus den Einzelwerten $m^{\circ 2}$, m'^2 und m''^2 so zusammengesetzt denken (wie immer in solchen Fällen):

$$m^2 = \frac{N^{\circ} m^{\circ 2} + N' m'^2 + N'' m''^2}{N^{\circ} + N' + N''}$$

Die in (9) gemachte Zerlegung des mittleren Fehlers in die Teilfehler für die einzelnen Richtungen kann von praktischem Werte sein zur Untersuchung, ob infolge verschiedener Zielschärfe, verschiedene Arten der Signalisierung, Beleuchtung u. s. w. den einzelnen Richtungen verschiedene Gewichte zuzuteilen wären, abgesehen von der Verknüpfung der Sätze unter sich. (Weiteres hiezu s. S. 322—323.)

II. Stations-Ausgleichung in Richtungsform.

Um die Besselsche Stationsausgleichung von § 71., welche bei s Strahlen $s-1$ Winkel als Unbekannte hat, auf s Richtungen zu reduzieren, kann man nach der allgemeinen Theorie von § 81. die Summen der Normalgleichungs-Coefficienten bilden, wie in (7)—(9) S. 278 an einem Beispiele gezeigt ist.

Um dieses auf § 71. anzuwenden, wollen wir zuerst für die Coefficienten (aa) .

(ab) u. s. w. auf S. 236 noch besondere Teilbezeichnungen einführen:

$$\left. \begin{aligned} (aa) &= [p'] - [g'] & (ab) &= -[h'_{,,}] & (ac) &= -[h'_{,,,}] \\ (bb) &= [p''] - [g''] & (bc) &= -[h''_{,,,}] \\ (cc) &= [p'''] - [g'''] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Dabei sind mit g und h gewisse, aus den Gruppierungen der Sätze folgende Zahlen bezeichnet, deren Bildungsgesetze aus S. 236 und S. 237 leicht zu erkennen sind.

Wenn ein Normalgleichungs-System (10) S. 235 vorliegt mit 3 Winkeln x' , x'' , x''' , so kann man nach § 81. daraus ein System für 4 Richtungen x° x' x'' x''' bilden in dieser Weise:

$$\left. \begin{aligned} (AA)x^{\circ} + (Aa)x' + (Ab)x'' + (Ac)x''' + (Al) &= 0 \\ (Aa)x' + (aa)x'' + (ab)x''' + (al) &= 0 \\ (Ab)x'' + (ba)x''' + (bl) &= 0 \\ (Ac)x''' + (cl) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dabei muss sein:

$$\left. \begin{aligned} (AA) + (Aa) + (Ab) + (Ac) &= 0 \\ (Aa) + (aa) + (ab) + (al) &= 0 \\ (Ab) + (ba) + (bb) + (bl) &= 0 \\ (Ac) + (ac) + (bc) + (cl) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Diese Beziehungen sind durch § 81. bewiesen; man kann sie aber auch unmittelbar aus (11) nachweisen. Die (AA) u. s. w. werden nach demselben Gesetze gebildet wie die (aa) u. s. w., z. B. ist:

$$(AA) = [p^{\circ}] - [g^{\circ}] \quad (Aa) = -[h^{\circ}_{,,}] \quad (Ab) = -[h^{\circ}_{,,,}] \text{ u. s. w.}$$

Wenn man dann die Bedeutungen der g und h verfolgt, so findet man bald:

$$\left. \begin{aligned} [g^{\circ}] + [h^{\circ}_{,,}] + [h^{\circ}_{,,,}] + [h^{\circ}_{,,,,}] &= [p^{\circ}] \\ [g'] + [h^{\circ}_{,,}] + [h'_{,,}] + [h'_{,,,}] &= [p'] \\ [g''] + [h''_{,,}] + [h''_{,,,}] + [h''_{,,,,}] &= [p''] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Auch im Übrigen braucht man nur eine Art Abzählung, ohne weitere Theorie, um die Gültigkeit der Gleichungen (13) und (12) unmittelbar einzusehen.

Praktischen Wert haben die Gleichungen (12) insofern zunächst nicht, als sie keine eindeutige Auflösung zulassen, man könnte sie zur Auflösung nach x°, x', x'', x''' , etwa durch fortgesetztes Probieren benützen, wie schon Gerling mit solchen Gleichungen gethan hat.

Insofern die Summen $[g]$ und $[h]$ im Allgemeinen *kleiner* sind, als die $[p]$, kann man daran denken, die $(A A)$, $(a a)$, $(b b)$ u. s. w. als genäherte *Richtungsgewichte* in dem Sinne von § 82. anzunehmen, also z. B.:

$$\text{Richtungsgewicht } P^\circ = (A A) = [p^\circ] - [g^\circ]$$

$$\text{S. 238: } P^\circ = 43 - \frac{12}{2} - \frac{19}{2} - \frac{12}{3} = 23,5$$

Dabei ist $[p^\circ] = 43$ die auf S. 258 erwähnte „Anschnittszahl“, und wenn man die $(A A)$, $(a a)$ u. s. w. als genäherte Richtungsgewichte nehmen wollte, so wäre damit ausgesprochen, dass die Richtungsgewichte im Allgemeinen *kleiner* als die Anschnittszahlen sein müssen, was nicht behauptet werden kann, denn nach S. 258 u. 259 sind die richtigen Richtungsgewichte teils kleiner, teils grösser als die Anschnittszahlen, ja die richtigen Richtungsgewichte können sogar unendlich werden, wie auf S. 259 gezeigt wurde und nachher noch besonders behandelt werden soll.

Auch manche andere Überlegungen mehr theoretischer Art führen dazu, dass die $(A A)$, $(a a)$ u. s. w., welche sich aus einer Gruppe von Sätzen stets rasch abzählen lassen würden, als genäherte Richtungsgewichte im Allgemeinen nicht eignen, und als erste rohe Näherungen für Richtungsgewichte bleiben also die Anschnittszahlen.

Wir haben das Beispiel von S. 228 mit 4 Sichten, welches dort in 3 Stufen genähert ausgeglichen ist, auch noch streng ausgeglichen, und dann die mittleren Richtungsfehler nach dem Verfahren von (7)–(9) getrennt behandelt und mit den Anschnittszahlen als theoretischen Gewichten zusammengenommen, worauf eine Vergleichung zwischen solcher Näherungsrechnung und strenger Rechnung möglich wird.

Was zunächst die strenge Ausgleichung von S. 228 betrifft, so zeigt sich, wie zu erwarten war, sehr nahe Übereinstimmung mit der Stufe III. von S. 229, und ausserdem die Gewichts-Coefficienten:

$$\begin{array}{lll} [\alpha \alpha] = 0,299 & [\alpha \beta] = 0,098 & [\alpha \gamma] = 0,081 \\ & [\beta \beta] = 0,263 & [\beta \gamma] = 0,092 \\ & & [\gamma \gamma] = 0,348 \end{array}$$

Mit Zuziehung des Gewichtseinheitsfehlers $m = \sqrt{\frac{17,97}{15}} = 1,09''$ oder rund $= 1,1''$ wurden damit die mittleren Fehler der 6 ausgeglichenen *Winkel* (nach den Formeln (1) S. 284 mit $[\alpha \alpha] = Q_{22}$, $[\alpha \beta] = Q_{23}$ u. s. w.) berechnet:

$$\left. \begin{array}{lll} \pm 0,60'' & \pm 0,56'' & \pm 0,65'' \\ & \pm 0,66'' & \pm 0,76'' \\ & & \pm 0,72'' \end{array} \right\} \quad (13)$$

Die Behandlung nach dem Verfahren von (7)–(9) hat ergeben:

$$\begin{array}{llll} m^\circ = \sqrt{\frac{4,75}{5,50}} & m' = \sqrt{\frac{4,35}{3,17}} & m'' = \sqrt{\frac{5,98}{3,83}} & m''' = \sqrt{\frac{2,89}{2,50}} \\ = \pm 0,93'' & = \pm 1,17'' & = \pm 1,25'' & = \pm 1,08'' \end{array}$$

$$\text{Dazu im Ganzen } m = \sqrt{\frac{17,97}{15}} = \pm 1,09''$$

(Dieses entspricht dem damit gleichen 1,09'' unten auf S. 229.)

Indem man dann noch die Anschnittszahlen von S. 228 als Richtungsgewichte nimmt, bekommt man die Richtungsfehler:

$$\begin{array}{llll} M^{\circ} = \frac{0,93}{\sqrt{10}} & M' = \frac{1,17}{\sqrt{6}} & M'' = \frac{1,25}{\sqrt{7}} & M''' = \frac{1,08}{\sqrt{5}} \\ = \pm 0,29'' & = \pm 0,48'' & = \pm 0,47'' & = \pm 0,48'' \end{array}$$

Endlich zur Vergleichung mit (15) die Winkelfehler, nämlich:

$$\begin{array}{l} \sqrt{0,29^2 + 0,48^2} = \pm 0,56'' \text{ u. s. w., im Ganzen:} \\ \left. \begin{array}{lll} \pm 0,56'' & \pm 0,55'' & \pm 0,56'' \\ & \pm 0,67'' & \pm 0,68'' \\ & & \pm 0,67'' \end{array} \right\} \quad (16) \end{array}$$

Dieses (16) stimmt mit dem strengen (15) ziemlich überein, doch kann natürlich kein allgemeiner Schluss aus einem solchen Zahlenbeispiel gezogen werden, welches nur andeuten soll, wie man etwa in erster Näherung (ohne Kenntnis der $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w.) rechnen könnte, wenn man zugleich die Verschiedenheit der Zielschärfen in den einzelnen Sichten mit berücksichtigen wollte. (Weiteres hiezu s. S. 322–323).

III. Vierter Fall strenger Richtungsgewichte.

Ausser den 3 Fällen strenger Richtungsgewichte, welche auf S. 282 als Anfang von § 82. aufgeführt sind, zu welchen auch noch die unten auf S. 266 (im Kleingedruckten) erwähnten Fälle symmetrischer Richtungssatz-Anordnungen als Erweiterungen des 3ten Falles gehören, giebt es auch noch einen 4ten Fall, der als hierher gehörig schon in § 76. S. 259 kurz erwähnt worden ist, nämlich den Fall von Winkelmessungen, welche alle *einen* Strahl gemeinsam haben, z. B. so:

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{l} p_1^{\circ} \quad p_1' \quad \cdot \cdot \quad \cdot \cdot \\ p_2^{\circ} \quad \cdot \cdot \quad p_2'' \quad \cdot \cdot \\ p_3^{\circ} \quad \cdot \cdot \quad \cdot \cdot \quad p_3''' \end{array} & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} & (17) \\ \text{Anschnittszahlen} & [p^{\circ}] & p_1' \quad p_2'' \quad p_3''' \\ \text{Richtungsgewichte} & \infty & \frac{p_1'}{2} \quad \frac{p_2''}{2} \quad \frac{p_3'''}{2} \end{array}$$

Wie man sofort einsieht, kann man all diesen Messungen einen Richtungssatz substituieren mit dem Anfangsgewichte $= \infty$ und den halben Anschnittszahlen als Gewichten der übrigen Richtungen, denn es ist dann z. B. das erste Winkelgewicht P' bestimmt durch

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{\infty} + \frac{2}{p_1'} = 0 + \frac{2}{p_1'}$$

also $P' = \frac{p_1'}{2}$ wie es sein soll.

Man kann auch sagen (wie schon S. 259), dass der Fall (17) nur gezwungen sich der Richtungsform fügt, und dass man gerade so gut die Winkel selbst in die weitere Ausgleichung einführen könnte.

In früherer Zeit, als man Repetitionswinkel mass, war der Fall (17) mit Auswahl eines gut beleuchteten Zielpunktes für p° sehr oft vorkommend.

Noch allgemeiner kann man sagen: Wenn bei s Strahlen nicht mehr als $s-1$ Winkel gemessen sind (also ohne Ausgleichung), so kann man dafür jedenfalls s Richtungen mit bestimmten Richtungs-Gewichten substituieren.

IV. Schärfere Trennung der Fehler nach Richtungen.

Die Fehlertrennung, welche wir in den Gleichungen (7)–(9) S. 318 ohne Theorie angegeben haben, ist für den angegebenen Zweck hinreichend, aber nicht streng richtig, und kann nur auf umständlichem Wege, mit Zuziehung der Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. genauer gemacht werden. Obgleich zunächst kein dringliches Bedürfnis dazu vorliegt, wollen wir doch aus theoretischem Interesse dieses auch noch kurz behandeln:

Es handelt sich um Formeln von der Art (19) S. 87, wobei aber die Gesamtsumme $[vv]$ in verschiedene Gruppen $[v^0v^0]$, $[v'v']$, $[v''v'']$... zerfällt werden soll und auch die entsprechenden Nenner gesucht werden sollen, bzw. die Abzüge u^0 , u' , u'' in folgenden Formeln (für n Sätze mit s Richtungen):

$$\left. \begin{aligned} m^2 &= \frac{[v^0v^0]}{[p^0] - u^0}, \quad m'^2 = \frac{[v'v']}{[p'] - u'}, \quad m''^2 = \frac{[v''v'']}{[p''] - u''} \quad \text{u. s. w.} \\ \text{wobei} \quad &[v^0v^0] + [v'v'] + [v''v''] + \dots = [vv] \\ &[p^0] + [p'] + [p''] + \dots = [p] \\ \text{und} \quad &u^0 + u' + u'' + \dots = u = n + s - 1 \quad (\text{vgl. (15) S. 236}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Der Weg, auf dem die Hauptformel (19) auf S. 86–87 gefunden wurde, ist nicht geeignet für die Trennung der u , dagegen kann man durch die Gewichts-Coefficienten von § 28. und die reduzierten Fehlergleichungen § 26. den Zweck erreichen. Man kann die Differenz $[\varepsilon\varepsilon] - [vv]$ von S. 86 auffassen als Summe der mittleren Fehlerquadrate der v als Funktionen von x, y, z , woraus sich alsbald ergibt:

$$[\varepsilon\varepsilon] - [vv] = m^2 ([a\alpha][\alpha\alpha] + 2[a\beta][\alpha\beta] + 2[a\gamma][\alpha\gamma] + \dots + [b\beta][\beta\beta] + \dots) \quad (19)$$

Wegen (20) S. 90 ist die hier als Coefficient von m^2 erscheinende Klammer $= 1 + 1 + 1$ für 3 Unbekannte x, y, z , allgemein ist die Klammer $= u$ für u Unbekannte, und daraus ergibt sich dann alsbald die Gleichung (19) S. 87. was als zweite Begründung dieser wichtigen Gleichung auftritt.

Um nun zur Trennung der u überzugehen, wollen wir die reduzierten Fehlergleichungen von § 26. betrachten. Wenn nämlich bei 3 Unbekannten x, y, z eine erste Unbekannte x eliminiert ist, und ein System von Gleichungen (5) S. 83 übrig geblieben ist, so entspricht diesen auch ein System (7) S. 83 mit nur noch 2 Elementen, welchem auch in (20) S. 90 nur 2 Elemente und dann ein Wert $u = 1 + 1 = 2$ zukommen, so dass im Ganzen doch wieder $n - 1 - 2 = n - 3$ herauskommt. In ähnlicher Weise wollen wir nun auch die Trennung der u bei unserer Stationsausgleichung vornehmen.

Was zuerst die z betrifft, so kann man deren Einfluss am besten bestimmen, indem man die x vorläufig als fehlerfrei annimmt, denn dann ist nach (9) S. 235 das z eines Satzes gleich dem Mittel aus allen Werten l dieses Satzes, also das mittlere Fehlerquadrat dieses z gleich m^2g (mit g nach (11) S. 319), und die zu dem vorhergehenden (19) analoge Theorie giebt dann alsbald die Abzüge $[g^0]$, $[g']$, $[g'']$... für die Nenner zur Berechnung des mittleren Fehlerquadrates in den Richtungen P^0, P', P'' ...; d. h. wir haben damit dieselbe Berechnung, welche für die z ohne strenge Begründung bereits in (7) S. 318, mit $-19,5$, $-13,5$, $-10,0$ gegeben ist.

Schwieriger ist der Einfluss der x zu bestimmen. Nach Elimination der z vermittelt (9) S. 235 nehmen die v von (4) S. 234 folgende Formen an, wobei g und h die bereits oben in (11) auf S. 319 eingeführten Bedeutungen haben sollen:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{für die Richtung } P^{\circ}: v^{\circ} = - & h_{\circ}^{\circ} x' - & h_{\circ}^{\circ} x'' - h_{\circ}^{\circ} x''' + \dots \\
 \text{„ „ „ } P': v' = (1 - g') x' - & h_{\circ}' x'' - & h_{\circ}' x''' + \dots \\
 \text{„ „ „ } P'': v'' = - & h_{\circ}'' x' + (1 - g'') x'' - & h_{\circ}'' x''' + \dots \\
 \text{„ „ „ } P''': v''' = - & h_{\circ}''' x' - & h_{\circ}''' x'' + (1 - g''') x''' + \dots
 \end{array} \quad (20)$$

Dabei sind die Absolutglieder, welche wir hier nicht brauchen, weggelassen (durch . . . angedeutet). Zur Bedeutung der schon früher eingeführten h und g sei auch nochmals erwähnt, dass es lediglich die zu S. 236 erforderlichen Verhältniszahlen sind, und dass z. B. $h_{\circ}''' = h_{\circ}'''$ u. s. w.

Die Gleichungen (20) sind nun reduzierte Fehlergleichungen in dem Sinne von § 26., nämlich Fehlergleichungen für die v nach Elimination der z . Deswegen muss auch z. B. sein:

$$\begin{array}{l}
 [h_{\circ}^{\circ 2}] + [(1 - g')^2] + [h_{\circ}''^2] + [h_{\circ}'''^2] = (a a) \text{ von (11) S. 236} \\
 + [h_{\circ}^{\circ} h_{\circ}^{\circ}] - [(1 - g') h_{\circ}'] - [h_{\circ}'' (1 - g'')] + [h_{\circ}''' h_{\circ}'''] = (a b) \text{ S. 236} \\
 \text{u. s. w.}
 \end{array} \quad (21)$$

Man kann dieses aus der Einzelbedeutung der g und h durch Vergleichung mit (11) S. 236 leicht nachweisen.

All dieses haben wir auf das Zahlenbeispiel von S. 228 angewendet und gefunden:

0,757	+ 0,396	+ 0,174	0,868	+ 0,284	0,646
2,590	— 0,854	— 0,410	0,396	+ 0,062	0,174
0,396	— 0,854	+ 0,062	3,035	— 0,632	0,285
0,174	+ 0,062	— 0,410	0,285	— 0,632	2,146
3,917	— 1,250	— 0,584	4,584	— 0,918	3,251
= (a a)	= (a b)	= (a c)	= (b b)	= (b c)	= (c c)
Dazu wurde auch bestimmt (vgl. S. 320):					
0,299	0,195	0,162	0,263	0,183	0,348
= [α α]	= 2 [α β]	= 2 [α γ]	= [β β]	= 2 [β γ]	= [γ γ]

Damit berechnet sich der Abzug für den Nenner des Fehlerquadrats der ersten Richtung (für x°):

$$0,577 [\alpha \alpha] + 0,396 (2 [\alpha \beta]) + 0,174 (2 [\alpha \gamma]) + \dots = 0,887$$

und entsprechend die 3 anderen: 0,718, 0,743, 0,704.

Damit bekommt man die richtigen Nenner zur Berechnung der mittleren Fehlerquadrate der 4 einzelnen Richtungen von S. 228:

	P°	P'	P''	P'''	Quersumme
Anschnittszahlen	10	6	7	5	28
Abzüge für die z :	— 3,75	— 2,08	— 2,42	— 1,75	— 10,00
Abzüge für die x :	— 0,84	— 0,72	— 0,74	— 0,70	— 3,00
Nenner	5,41	3,20	3,84	2,55	15,00
Die Näherungswerte von S. 320 unten waren:					
Näherungen	5,50	3,17	3,83	2,50	

Jene Näherungen waren also genügend richtig. Obgleich die praktische Anwendung des Vorstehenden zunächst von geringer Bedeutung ist, schien uns doch die Theorie soweit wichtig, dass ihre, wenn auch nur sehr gedrängte Mitteilung am Platze war.

§ 87. Geographische Coordinaten und Azimute des Hannoverschen Fünfecks.

Nicht zur Ausgleichung selbst gehörig, aber aus praktischen Gründen daran anzuschliessen, sind die geographischen Coordinaten und die Azimute des Netzes Fig. 1. S. 189. Wir werden diese Werte hier als Nachtrag zu § 60.—64. bringen.

Die Grundwerte der geographischen Längen und Breiten im System der Landesaufnahme für die zwei Basispunkte Aegidius und Wasserturm sind bereits unter (4) S. 188 mitgeteilt, und im Anschluss hieran, mit den ausgeglichenen Winkeln und Seiten von § 61. und § 63. haben wir teils nach den Rechenvorschriften der Landesaufnahme, teils nach den Gauss'schen Mittelbreiten-Formeln in unserem III. Bande, 3. Aufl. 1890, S. 398 folgendes berechnet:

<i>Punkt</i>	<i>Breite</i>			<i>Länge</i>		
Aegidius	52°	22'	14,9611"	27°	24'	24,6289"
Linden Wasserturm	52	21	49,9080	27	22	25,0167
Willmer	52	20	49,8613	27	25	44,2318
Steuerndieb	52	23	31,6871	27	27	22,9670
Schanze	52	24	58,1187	27	24	33,1515
Burg	52	24	2,3220	27	22	7,7967

Ferner Meridianconvergenzen und die sämtlichen geodätischen Azimute (von Nord über Ost gezählt) und dazu nochmals die Logarithmen der Dreiecksseiten von (5) S. 197 oder (12) S. 203:

Station Richtung	Meridianconvergenz γ Azimut α		log S
1. Aegidius.			
Wasserturm	$\gamma = 2^\circ 50'$	49,56"	
Burg	$\alpha = 251$	7 24,97	3.378 7016
Schanze	$\alpha = 322$	4 0,45	3.624 0521
Steuerndieb	$\alpha = 1$	49 45,68	3.702 8735
Willmer	$\alpha = 54$	52 13,92	3.615 2086
Willmer	$\alpha = 150$	11 30,10	3.481 5665
2. Wasserturm.			
Burg	$\gamma = 2^\circ 52'$	23,46"	
Aegidius	$\alpha = 355$	27 7,19	3.613 3487
Willmer	$\alpha = 71$	5 50,25	3.378 7016
Willmer	$\alpha = 116$	11 16,97	3.623 4413
3. Willmer.			
Wasserturm	$\gamma = 2^\circ 49'$	43,18"	
Aegidius	$\alpha = 296$	13 54,71	3.623 4413
Steuerndieb	$\alpha = 330$	12 33,14	3.481 5665
Steuerndieb	$\alpha = 20$	28 3,69	3.727 4425
4. Steuerndieb.			
Willmer	$\gamma = 2^\circ 48'$	31,02"	
Aegidius	$\alpha = 200$	29 21,87	3.727 4425
Burg	$\alpha = 234$	54 35,17	3.615 2086
Schanze	$\alpha = 279$	3 48,07	3.780 5583
Schanze	$\alpha = 309$	47 6,94	3.620 7673
5. Schanze.			
Steuerndieb	$\gamma = 2^\circ 50'$	49,06"	
Aegidius	$\alpha = 129$	44 52,37	3.620 7673
Burg	$\alpha = 181$	49 52,40	3.702 8735
Burg	$\alpha = 237$	54 0,02	3.511 0402
6. Burg.			
Schanze	$\gamma = 2^\circ 52'$	42,26"	
Steuerndieb	$\alpha = 57$	52 4,85	3.511 0402
Aegidius	$\alpha = 98$	59 38,36	3.780 5583
Aegidius	$\alpha = 142$	2 12,04	3.624 0521
Wasserturm	$\alpha = 175$	26 53,52	3.613 3487

Die hier mit aufgenommenen Meridianconvergenzen γ sind dieselben, wie schon auf S. 204 angegeben, und die Summen $\gamma + \alpha$ geben die ausgeglichenen T von S. 204.

Wenn man aus den vorher mitgetheilten Breiten und Längen wieder die Azimute, Meridianconvergenzen und die $\log S$ rückwärts berechnet, so wird man die letzten Stellen nicht völlig in Übereinstimmung finden, erstens aus begreiflichen Abrundungsgründen, zweitens aber auch deswegen, weil in den Rechnungen der Landesaufnahme die Meridianconvergenzen und Azimute nicht bloss aus den geographischen Coordinaten, sondern auch auf dem *schärferen* Wege der rechtwinkligen Coordinaten (14) S. 205 übertragen werden, was in vorstehenden γ und α geschehen ist.

Unsere in diesem § 87. zusammengestellten Werte nebst den früheren von § 61. und § 63. sind diejenigen, welche voraussichtlich in den „Abrissen und Coordinaten“ der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, etwa Band XVII, veröffentlicht werden werden.

Kapitel III.

Punktbestimmung durch Coordinatenausgleichung.

§ 88. Allgemeines.

Im vorigen Kapitel haben wir die Ausgleichung von Triangulierungs-Netzen nach der Methode der *bedingten Beobachtungen* behandelt, wobei zuerst die Bedingungsgleichungen aufgesucht werden mussten, welche zwischen den gemessenen Winkeln oder Richtungen nach der Natur des geometrischen Netzzusammenhanges bestehen; worauf eine der Zahl dieser Bedingungsgleichungen gleiche Zahl von Normalgleichungen aufzulösen war.

Wir gehen nun über zu einer anderen Art der Ausgleichung trigonometrischer Messungen, wobei die *Coordinaten* der zu bestimmenden Punkte als unabhängige Unbekannte angenommen, und die gemessenen Winkel oder Richtungen als Funktionen dieser Coordinaten dargestellt werden, so dass darauf eine Ausgleichung nach *vermittelnden Beobachtungen* gegründet werden kann.

Der einfachste Fall von Coordinatenausgleichung liegt vor, wenn ein neuer Punkt an mehrere fest gegebene alte Punkte angeschlossen werden soll. Wir werden daher im folgenden zuerst auf diese einfachste Aufgabe ausgehen.

§ 89. Richtungs-Änderung und Coordinaten-Änderung.

Bei allen Coordinatenausgleichungen werden wir eine Grundaufgabe wiederkehren sehen, welche wir deshalb ein- für allemal vorausschicken.

In Fig. 1. S. 326 haben wir einen festen Punkt P_1 mit den rechtwinkligen Coordinaten x_1, y_1 und einen zweiten veränderlichen Punkt P mit den Coordinaten x, y ; die Entfernung von P_1 nach P sei $= s$ und der Richtungswinkel (Ka-