Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 58. Allgemeine Betrachtung der Bedingungsgleichungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Dieses ist nicht zufällig, sondern tritt bei Bedingungsgleichungen für Richtungsmessungen immer ein, wie aus der Entstehung der Gleichungen leicht zu ersehen ist. Auch die Richtungsverbesserungen v selbst geben, bei gleichen Gewichten, stationsweise addiert stets die Summen Null, wie am Schluss des nächsten § 58. S. 176—177 ausführlicher gezeigt werden wird.

§ 58. Allgemeine Betrachtung der Bedingungsgleichungen.

Mit dem was im vorhergehenden § 57. über Bedingungsgleichungen gelehrt wurde, kann man bereits an die Ausgleichung kleiner Netze, wie in § 59. oder § 60. gehen, indessen ist doch noch manches weitere über Bedingungsgleichungen in Dreiecksnetzen zu sagen. Zuerst wollen wir die *Zahl* der unabhängigen Bedingungsgleichungen überlegen.

Wir betrachten ein Dreiecksnetz, in welchem *eine* Grundlinie gemessen ist, mit folgenden geometrischen Verhältnissen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Anzahl der Eckpunkte} \dots\dots\dots\dots & p \\ \text{Anzahl aller Verbindungslinien} \dots\dots\dots & l \\ \text{Anzahl der nur \textit{ein}seitig beobachteten Verbindungslinien} \dots & l' \\ \text{Also Anzahl der beiderseitig beobachteten Verbindungslinien} & l - l' \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Je nachdem Winkelmessungen oder Richtungsmessungen vorliegen, habe man:

Anzahl der Winkelmessungen . . . . W (2)

oder Anzahl der Richtungsmessungen . . . . . . R (3)

Die Richtungsmessungen sollen hiebei für jede Station in je einem vollen Satze ausgeführt sein.

Wir wollen nun zuerst annehmen, dass man Winkelmessungen habe, und nachher den Fall der Richtungsmessungen behandeln.

I. Winkelmessungen.

Die Anzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen ist gleich der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen, denn jede überschüssige Beobachtung giebt eine selbständige Messungsprobe. Wir bezeichnen:

Anzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen . . . . r (4)

Die Anzahl der notwendigen Winkel findet man so: Unter Annahme *einer* Basis liegen die zwei ersten Punkte, nämlich die beiden Basis-Endpunkte, ohne Winkelmessungen fest, und jeder weitere Punkt braucht zur Anfügung an die gegebenen Punkte 2 Winkel, also:

$$\begin{array}{lllll} & \text{Basis mit 2 Punkten verlangt} & & 0 & \text{Winkel} \\ (p-2)\ \text{Punkte} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{der } 3^{\text{te}} \text{ Punkt verlangt} \\ \text{„ } 4^{\text{te}} \text{ „ „} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \text{„ } p^{\text{te}} \text{ „ „} \end{array} & & \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ \\ 2 \end{array} & \begin{array}{l} \text{„} \\ \text{„} \\ \\ \text{„} \end{array} \\ \hline & \text{Summe } 0 + (p-2)\,2 = 2\,p - 4 \text{ Winkel} \end{array}$$

Wenn also W Winkel gemessen sind, so sind $W - (2\,p - 4)$ überschüssig oder man hat:

$$r = W - 2\,p + 4 \text{ Bedingungsgleichungen.} \qquad (5)$$

Diese Bedingungsgleichungen teilen sich in zwei wesentlich verschiedene Gattungen, nämlich Winkelgleichungen und Seitengleichungen.

Die Winkelgleichungen zerfallen abermals in zwei verschiedene Arten, nämlich 1) Horizontgleichungen oder Stationsgleichungen, und 2) Dreiecksgleichungen oder allgemeiner Polygongleichungen.

Als Beispiele von Horizontgleichungen haben wir in der nachfolgenden Fig. 3. S. 174 die zwei Horizonte um Oggersheim und um Speyer; es sind auf Speyer die 5 einzelnen Winkel (12), (15), (16), (19), (22) gemessen, woraus die Probe entsteht:

$$(12) + (15) + (16) + (19) + (22) = 360°$$

und ähnlich bei Oggersheim.

Oder wenn z. B. in demselben Netze (Fig. 3. S. 174) auf Donnersberg ausser den zwei einzelnen Winkeln (1) und (27) auch noch der Summenwinkel Klobberg-Calmit = (28) gemessen wäre, so würde man noch die Bedingung haben:

$$(1) + (27) - (28) = 0$$

Allgemeiner kann man über Horizontgleichungen sagen: Auf einer Station mit s Strahlen sind $s - 1$ Winkel zur Festlegung dieser Strahlen unumgänglich nötig; sind mehr Winkel, etwa n Winkel gemessen, so hat man auf dieser Station

$$n - s + 1 \text{ Stationsgleichungen.} \tag{6}$$

Diese Art von Gleichungen tritt bei grossen Ausgleichungen im Netze meist nicht auf, da man sie auf den einzelnen Stationen für sich behandelt. (Bei Richtungsbeobachtungen in ganzen Sätzen giebt es überhaupt keine Stationsgleichungen.) Die zweite Art der Winkelgleichungen betrifft zuerst die Summen $(1) + (2) + (3) = 180°$ bzw. $180° +$ sphär. Excess, in den einzelnen Dreiecken, dann aber auch Vierecks-summen $(1) + (2) + (3) + (4) = 360°$ und allgemeiner $(1) + (2) + \ldots (n) = (n - 2)\, 180°$ u. s. w.

Wenn man die Zahl dieser Gleichungen aufsuchen will, so bemerkt man zuerst, dass *ein*seitig beobachtete Linien hier nicht in Betracht kommen, z. B. in einem Dreieck, in welchem nur auf zwei Ecken Messungen gemacht sind, hat man nur zwei Winkel, folglich keine Summenprobe u. s. w.

Daraus folgt weiter, dass auch solche *Punkte*, welche nur durch einseitig beobachtete Linien mit anderen Punkten zusammenhängen, d. h. die entweder nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnittenen Punkte, bei der Abzählung der Winkelgleichungen nicht in Betracht kommen.

Die Anzahl der unabhängigen Dreiecksgleichungen ist im allgemeinen *nicht* schlechthin gleich der Anzahl der Dreiecke selbst, auch wenn die einseitig beobachteten Seiten ausgeschieden sind, denn eine Dreiecksgleichung kann in der Summe oder Differenz anderer solcher Gleichungen bereits enthalten sein, wie wir schon im vorigen § 57. bei (1)—(4) S. 165 gesehen haben. Auch hat sich dort gezeigt, dass eine Vierecksgleichung (5) in Verbindung mit 2 Dreiecksgleichungen dasselbe ausdrücken kann, wie 3 einzelne Dreiecksgleichungen.

Wenn man sich nach diesem Beispiele überzeugt hat, dass jede Polygongleichung denselben Dienst leistet, wie eine Dreiecksgleichung, insofern verschiedenartige Formierung der fraglichen Polygongleichungen möglich ist, so kommt man auch zur Bestimmung der Anzahl der unabhängigen Polygongleichungen in folgender Weise: Man denkt sich einen geschlossenen Zug über alle p Punkte gelegt. Dieser Zug umfasst auch p Linien. Wenn man l Linien hat, so sind $l - p$ Linien von dem Zuge noch nicht getroffen, und jede dieser Linien giebt eine neue Gleichung. Also ein

Polygonzug mit p Linien giebt eine Gleichung, die übrigen $l-p$ Linien geben $l-p$ Gleichungen, man hat also im ganzen:

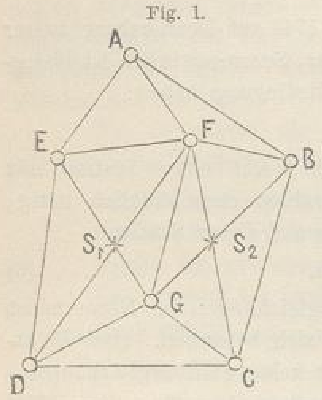
$$1 + l - p \text{ Dreiecksgleichungen (allgemeine Polygongleichungen)} \qquad (7)$$

Dieses gilt, wenn die l Linien alle hin und her gemessen sind, wenn darunter l' einseitig gemessene Linien sind, so hat man statt (7):

$$1 + (l - l') - p \text{ Dreiecksgleichungen oder Polygongleichungen.} \qquad (8)$$

Dabei sind aber auch etwaige nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnittene Punkte unter den p Punkten nicht mitzuzählen.

Fig. 1.



Wir fanden noch ein zweites Verfahren zum Abzählen der Dreiecksgleichungen, nämlich so: Man zählt die Anzahl $\varDelta$ aller geschlossenen Dreiecke und dann die Anzahl S aller Diagonalenschnitte, dann ist die Anzahl der unabhängigen Dreiecksgleichungen:

$$(\varDelta - S) \text{ Dreiecksgleichungen} \qquad (9)$$

Z. B. in Fig. 1. hat man 11 geschlossene Dreiecke und 2 Diagonalenschnitte, also $11 - 2 = 9$ unabhängige Dreiecksgleichungen, was auch mit der Regel (7) stimmt, indem $l = 15$ und $p = 7$ also $1 + l - p = 9$.

Oder wenn man in Fig. 2. auch noch AG zieht, so wird die Anzahl der geschlossenen Dreiecke um 3 vermehrt (EAG, FAG, BAG) und es kommen noch zwei Diagonalenschnitte auf EF und DF hinzu, es wird also dann $\varDelta = 14$, $S = 4$ also $\varDelta - S = 10$ Dreiecksgleichungen, was mit $16 + 1 - 7 = 10$ nach (7) stimmt.

Die Regel (9), deren Begründung nach dem Anblick von Fig. 2. sich leicht allgemein geben lässt, ist namentlich bei den gewöhnlichen Dreiecksnetzen der Praxis, wo man die einzelnen Dreiecke ohnehin alle aufsuchen muss, sehr bequem.

Wir gehen über zu den *Seitengleichungen*.

Die Zahl der Seitengleichungen erhellt am besten aus folgender Betrachtung: Man unterscheidet „Dreiecksnetz“ und „Dreieckskette“, indem man Dreieckskette eine solche Aneinanderreihung von Dreiecken nennt, bei welcher man von irgend einem Dreieck zu einem andern nur auf *einem* bestimmten Weg gelangen kann, während bei einem Dreiecksnetz verschiedene Wege möglich sind. Nach dieser Auffassung ist ein Viereck mit einer Diagonale eine Kette, ein Viereck mit zwei Diagonalen ein Netz. Ob die Seiten sich schneiden oder nicht, ist nicht entscheidend; wenn die Seiten sich schneiden, hat man jedenfalls ein „Netz“, es giebt aber auch „Netze“, ohne Diagonalenschnitte, z. B. mit Centralsystemen, vgl. die nachfolgende Fig. 3.

Wenn man in einer Kette noch *einen* weiteren Winkel misst, wodurch eine Sicht eingefügt wird, welcher die Kette zum Netz macht, so entsteht insofern eine neue Bedingungsgleichung, als man die Länge der neu eingefügten Seite nun zweifach ausdrücken kann. Jede nicht zum Zusammenhang der Kette nötige Seite giebt eine solche Seitengleichung. Eine Dreieckskette hat keine Seitengleichungen, es folgt also die Regel:

Die Anzahl der Seitengleichungen eines Dreiecksnetzes ist gleich der Anzahl von Seiten, welche gestrichen werden müssen, damit das Netz in eine Kette übergeht.

Um eine Formel hiefür zu bilden, überlegt man, dass zum Zusammenhang der

3 ersten Punkte 3 Linien und für jeden folgenden Punkt noch 2 Linien nötig sind, also:

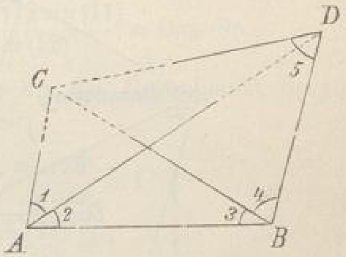
$$\begin{array}{ll} & \text{für die 3 ersten Punkte} \;\ldots\; 3 \text{ Linien} \\ (p-3) \text{ Punkte} \left\{ \begin{array}{l} \text{„ den } 4^{\text{ten}} \text{ Punkt} \;\ldots\; 2 \text{ „} \\ \text{„ „ } 5^{\text{ten}} \text{ „} \;\ldots\; 2 \text{ „} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{für den } p^{\text{ten}} \text{ Punkt} \;\ldots\; 2 \text{ Linien} \end{array} \right. & \\ \hline & \text{Summe } 3 + (p-3)\,2 \text{ Linien} = 2p - 3 \text{ Linien.} \end{array}$$

Hat man l Linien, so sind davon $l - (2p - 3)$ überschüssig, folglich bestehen

$$l - 2p + 3 \text{ Seitengleichungen} \qquad (10)$$

Nachdem schon im vorhergehenden § 57. Seitengleichungen in einem Viereck behandelt worden sind, wollen wir zu weiterer Erläuterung noch einen Fall nehmen:

Fig. 2.



In Fig. 2. seien die angedeuteten 5 Winkel gemessen. Die vorstehende Formel (10) giebt hier mit $l = 6$ und $p = 4$:

$$6 - 8 + 3 = 1 \text{ Seitengleichung.}$$

Obgleich keines der 4 Dreiecke von Fig. 2. in Bezug auf 180° geschlossen ist, hat das Viereck doch eine Probe; man kann nämlich die Seite CD aus AB zweifach ableiten:

$$1)\quad CD = AB \frac{\sin(1+2)}{\sin(1+2+3)} \frac{\sin(4)}{\sin(5)}$$

$$2)\quad CD = AB \frac{\sin(2)}{\sin(2+3+4)} \frac{\sin(4)}{\sin(4+5)}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so erhält man die Seiten-Bedingungsgleichung:

$$\text{(c)} \qquad \frac{\sin(1+2)\sin(2+3+4)\sin(4+5)}{\sin(1+2+3)\sin(2)\sin(5)} = 1$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so kann man mit den 5 Winkeln (1) (2) (3) (4) (5) das Viereck Fig. 2. nicht ohne Widerspruch konstruieren, sondern man wird bei der Konstruktion in irgend einem Punkt ein fehlerzeigendes Dreieck erhalten.

Im Zusammenhang haben wir nun, indem von den Stationsgleichungen abgesehen wird, folgendes:

Bedingungsgleichungen für Winkelbeobachtungen.

W Winkelmessungen, p Punkte, l Linien, sämtlich hin und her beobachtet

$$\left.\begin{array}{rl} l - 2p + 3 & \text{Seitengleichungen,} \\ l - p + 1 & \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ \left.\begin{array}{r} r = 2l - 3p + 4 \\ r = W - 2p + 4 \end{array}\right\} & \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array}\right| \qquad (11)$$

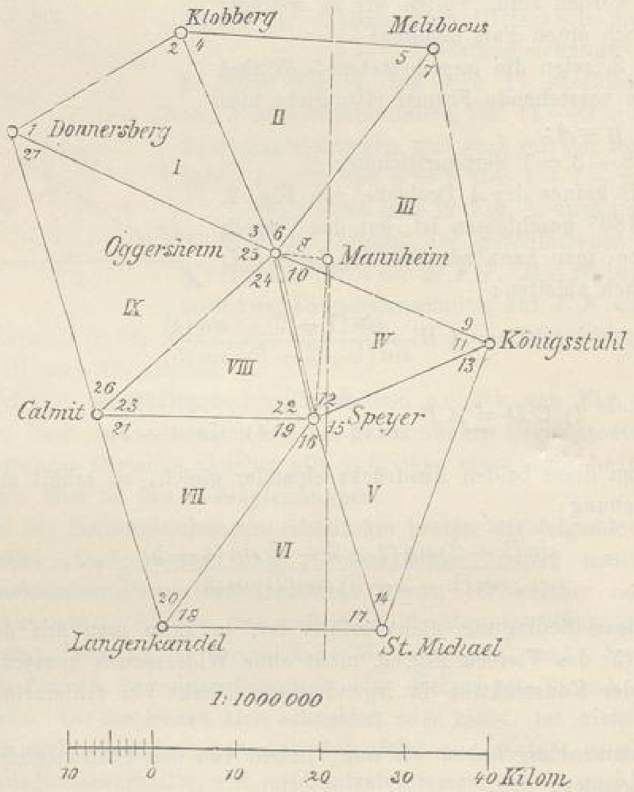
Wenn unter den l Linien eine Anzahl l' nur einseitig beobachtet ist, und unter den p Punkten eine Anzahl p' nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, so hat man:

$$\left.\begin{array}{rl} l-2p+3 & \text{Seitengleichungen,} \\ l-l'-(p-p')+1 & \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen.} \\ \left.\begin{array}{r} r=2l-l'-3p+p'+4 \\ r=W-2p+4 \end{array}\right\} & \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array}\right\} \quad (12)$$

Beispiel eines Dreiecksnetzes mit Winkelbeobachtungen.

In der nachstehenden Fig. 3., welche ein badisches Dreiecksnetz vorstellt, sind 27 einzelne Winkel gemessen, und es handelt sich um die Aufsuchung der Bedingungsgleichungen.

Fig. 3.
(Der Punkt Mannheim gehört nicht zu dem Netze.)



$W = 27$ Winkel,	$l - 2p + 3 = 2$ Seitengleichungen,
$p = 9$ Punkte,	$l - p + 1 = 9$ Dreiecksgleichungen,
$l = 17$ Linien;	Ogg. u. Sp. $= 2$ Horizonte
	$W - 2p + 4 = 13$ Gleichungen.

Nach den Regeln (11) haben wir in diesem Netze 2 Seitengleichungen und 9 Dreiecksgleichungen, ferner noch den unmittelbaren Anblick in Oggersheim und Speyer je eine Horizontgleichung.

Es ist auch nicht schwer, diese $2 + 9 + 2$ Gleichungen wirklich aufzustellen:

Die Horizonte in Oggersheim und in Speyer geben:

$$\left.\begin{aligned}(3)+(6)+(8)+(10)+(24)+(25)-360^\circ &= 0\\ (12)+(15)+(16)+(19)+(22)-360^\circ &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Die 9 Dreieckswinkelgleichungen entsprechen einfach den 9 Dreiecken I, II, III ... IX, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}(1)+(2)+(3)-(180^\circ+\text{sphär. Excess}) &= 0\\ (4)+(5)+(6)-\ldots\quad &= 0\\ \ldots\ldots\ldots\quad &\\ (25)+(26)+(27)-(180^\circ+\text{sphär. Excess}) &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die zwei Seitengleichungen beziehen sich auf die Centralpunkte Oggersheim und Speyer, es wird z. B. ausgedrückt, dass von der Basis Oggersheim-Speyer mit Sinusrechnung über die Dreiecke VIII, IX, I, II, III, IV die Basis wieder herauskommen muss, also:

$$\frac{\text{Ogg.-Sp. } \sin(22)\ \sin(26)\ \sin(1)\ \sin(4)\ \sin(7)\ \sin(11)}{\sin(23)\ \sin(27)\ \sin(2)\ \sin(5)\ \sin(9)\ \sin(12)} = \text{Ogg.-Sp.},$$

in gleicher Weise behandelt man auch die Dreiecke um den Centralpunkt Speyer, und die beiden so entstehenden Seitengleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned}&(\text{O}) \qquad \frac{\sin(12)\ \sin(9)\ \sin(5)\ \sin(2)\ \sin(27)\ \sin(23)}{\sin(11)\ \sin(7)\ \sin(4)\ \sin(1)\ \sin(26)\ \sin(22)} = 1\\ &(\text{S}) \qquad \frac{\sin(10)\ \sin(13)\ \sin(17)\ \sin(20)\ \sin(23)}{\sin(11)\ \sin(14)\ \sin(18)\ \sin(21)\ \sin(24)} = 1\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Damit haben wir in (13), (14), (15) die $2+9+2=13$ Gleichungen, welche der Ausgleichung des Netzes mit den 27 einzelnen Winkelmessungen zu Grunde zu legen sind.

(Die vollständig durchgeführte Ausgleichung dieses Beispiels war in unseren 3 früheren Auflagen enthalten. Diesesmal haben wir die Durchrechnung des Beispiels nicht mehr aufgenommen, weil Ausgleichungen mit einzelnen *Winkel*messungen in diesem Sinne, in neuerer Zeit immer mehr in Abgang kommen.)

II. Richtungsmessungen.

Nachdem wir im Vorstehenden die Aufstellung der Bedingungsgleichungen für *Winkel*messungen behandelt haben, ist es nicht schwer, davon auch auf Richtungsmessungen überzugehen, welche in der heutigen trigonometrischen Praxis die Hauptrolle spielen. Trotzdem ist beim Aufstellen der Bedingungsgleichungen immer (wenigstens in Gedanken) die *Winkel*form massgebend, und erst von da geht man auf Richtungen über.

Da wir den Grundgedanken des Übergangs von Winkelverbesserungen δ auf Richtungsverbesserungen v bereits an dem Vierecksbeispiel des vorigen § 57. S. 169 gezeigt haben, nämlich Zerlegung $\delta = v_2 - v_1$ u. s. w., so brauchen wir nicht mehr viel dazu zu sagen, sondern nur die Sache noch etwas allgemeiner aufzufassen.

Wir setzen *volle* Richtungssätze voraus, (oder Mittelbildung aus mehrfachen vollen Richtungssatzmessungen, was offenbar hier dasselbe ist), und zwar auf allen Stationen gleichgewichtig. Etwaige ungleiche Wiederholungen der Sätze auf verschiedenen Stationen würde verschiedene Gewichte in die Ausgleichung einführen, wovon aber jetzt nicht die Rede sein soll.

Bei solcher Messungsart fallen die Horizontgleichungen, mit welchen wir es bei der Ausgleichung von Winkelmessungen zu thun hatten, einfach weg.

Wir denken uns eine Station einerseits mit W Winkelmessungen, ohne Horizontproben, und andererseits dieselben Sichten mit R Richtungsmessungen. Dann ist offenbar $R = W + 1$, d. h. auf jeder Station ist eine Richtung mehr als die unabhängigen Winkel und in einem ganzen Netze mit p Punkten und W Winkeln, ohne Horizontproben, oder R Richtungen ist offenbar

$$W = R - p \tag{16}$$

dabei sind aber etwaige nur *vorwärts* eingeschnittene Punkte unter p nicht mitzuzählen.

*Bedingungsgleichungen für **Richtungs**messungen.*

R Richtungen, p Punkte, l Linien hin und her beobachtet. Mit (16) geht (11) über in:

$$\left.\begin{array}{rl} l - 2p + 3 & \text{Seitengleichungen,} \\ l - p + 1 & \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ \left.\begin{array}{r} r = 2l - 3p + 4 \\ r = R - 3p + 4 \end{array}\right\} & \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array}\right\} \tag{17}$$

Dabei ist $2l = R$, denn wenn alle Linien hin und her gemessen sind, so hat man doppelt so viel Richtungen als Linien.

Wenn unter den l Linien eine Anzahl l' nur einseitig beobachtet ist, und unter den p Punkten eine Anzahl p' nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, so hat man:

$$\left.\begin{array}{rl} l - 2p + 3 & \text{Seitengleichungen,} \\ (l - l') - (p - p') + 1 & \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ r = 2l - l' - 3p + p' + 4 & \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array}\right\} \tag{18}$$

Die beiden Abzählungsformeln $l - p + 1$ Dreiecksgleichungen und $l - 2p + 3$ Seitengleichungen werden als „*Gauss*sche *Lehrsätze*" mitgeteilt und bewiesen in Gerlings Ausgleichungsrechnungen, Hamburg 1843, S. 273 und S. 277 unter Citat von „Beiträge zur Geographie Kurhessens u. s. w. von Gerling, Cassel 1839, S. 166."

Eine andere Anleitung zur Abzählung der Bedingungsgleichungen nach geometrischer Anschauung, speziell für Richtungsmessungen, giebt *Bessel* auf S. 139 und 140 der Gradmessung in Ostpreussen.

Zur besonderen Behandlung der nur *ein*seitig eingeschnittenen Linien und Punkte in (12) und (17) wurden wir durch entstandenes Bedürfnis geführt.

Wenn die Dreiecksnetz-Bedingungen sich auf Richtungen beziehen, so ist in jeder Bedingungsgleichung die algebraische Summe der Coefficienten gleich Null, und die Richtungsverbesserungen v geben stationsweise addiert ebenfalls je die Summe gleich Null; vorausgesetzt dass alle Messungsgewichte *gleich* sind.

Diese zwei Sätze lassen sich nach §. 57 und 58 und nach §. 39 sofort einsehen: Wenn eine auf Winkel bezogene Bedingungsgleichung etwa heisst:

$$a\,\delta + a'\,\delta' + a''\,\delta'' + \ldots = 0$$

wo δ, δ', δ'' ... Winkelverbesserungen sind, so lautet die entsprechende Gleichung für Richtungsverbesserungen v_l und v_r:

$$a\,(v_r - v_l) + a'\,(v_r' - v_l') + a''\,(v_r'' - v_l'') + \ldots = 0$$

$$a\,v_r - a\,v_l + a'\,v_r' - a'\,v_l + a''\,v_r'' - a''\,v_l'' + \ldots = 0$$

hier ist: $$a - a + a' - a' + a'' - a'' + \ldots = 0$$

Was die v betrifft, so sind deren Formeln in (9) § 39. S. 119 gegeben; wenn man dort addiert, so bekommt man:

$$[v] = [a]\,k_1 + [b]\,k_2 + [c]\,k_3$$

Versteht man nun unter $[v]$ die Summierung für je *eine* Station, so gelten auch $[a]$ $[b]$ $[c]$ nur stationsweise, sind also = Null, folglich auch stationsweise $[v]$ = Null.

Was die wirkliche Aufstellung der Bedingungsgleichungen betrifft, so werden die verschiedenen Winkelsummen-Gleichungen niemals Schwierigkeiten bereiten, und wenn das Netz sich in lauter einzelne Dreiecke zerlegen lässt, so werden auch die Seitengleichungen als Sinusprodukte für Vierecksdiagonalen oder Centralsysteme nach Anleitung von § 57. S. 167 und des vorstehenden Beispiels (Fig. 3. S. 174) sich leicht ergeben. Etwas schwieriger kann die Sache werden bei Punkten, welche entweder nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, doch kann darüber hier nichts allgemeines gesagt werden; auch wird es sich oft empfehlen, solche Punkte von der Gesamtausgleichung auszuschliessen, und nur nachher einzuschalten.

Dagegen ist hier noch ein allgemeines Wort zu sagen über *Kranz-Systeme*, d. h. solche von Dreiecksketten umschlossene Polygone, welche einen leeren Raum zwischen sich fassen. In der Gesamtausgleichung der Preussischen Landesaufnahme haben solche Systeme eine wichtige Rolle gespielt, und wir wollen daher die geschichtliche Entwicklung, welche diese Anlage und die zugehörigen Ausgleichungen genommen haben, vorführen nach einer Mitteilung von Major *Haupt* in den „astron. Nachrichten“ 107. Band, Nr. 2549—2550, (Sept. 1883):

Als in den 60er Jahren dieses Jahrhunderts bei der preussischen Landes-Triangulierung Ketten, welche einen von Dreiecken freien Landesteil umspannten, wieder in sich zusammen schlossen, stellte sich der Übelstand heraus, dass trotz der Aufstellung aller vorhandenen und notwendigen Winkelgleichungen und Seitengleichungen identische Punkte, von verschiedenen Seiten her berechnet, *nicht* dieselben geographischen Coordinaten erhielten, und dass der von Dreiecken freie innere Raum, das Polygon *nicht* die seinem Inhalt entsprechende Winkelsumme erhielt, denn es fehlten die drei sogenannten Polygongleichungen.

Der erste, welcher eine Methode zur Aufstellung dieser Polygon-Gleichungen gab, war der Premier-Lieutenant *v. Prondzynski* („Astr. Nachr.“ Nr. 1690, 71. Band, 1868, S. 145—154 und Nr. 1782, 75. Band, 1869, S. 81—90). Er zog Richtungs-Korrektionen der jüngsten Kette durch die ganzen Längen-, Breiten- und Azimut-Rechnungen hindurch, und bildete so drei neue Gleichungen.

Demnächst gab Professor *Börsch* eine andere, aber im allgemeinen nicht einfachere Methode an („Astr. Nachr.“ Nr. 1697 und 1704, 71. Band (1868), S. 265—268 und S. 379—380), welche darauf gegründet ist, den inneren freien Raum zwischen den verschiedenen Ketten mit zu rechnenden Dreiecken zu überspannen und so die fehlenden Gleichungen aufzustellen.

Hier ist auch *Zachariae*: „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten“ deutsch von Lamp, Berlin 1878) S. 156, zu zitieren, wo für „Kranz-Systeme“ die nötigen Gleichungen durch Einführung fingierter Messungen und Wiederelimination derselben gewonnen werden.

Diese Methoden wurden bei der preussischen Landes-Triangulation nicht benützt; das in Wirklichkeit von dieser Behörde angewandte Verfahren wurde von dem damaligen Hauptmann *Schreiber* (jetzigen General) angegeben, dasselbe liefert zwei

Gleichungen durch die Projektion der inneren Polygonkranz-Begrenzung auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges, sphäroidisches Coordinaten-System.

Diese Schreiber sche Methode des Polygonkranz-Anschlusses durch rechtwinklige Coordinaten ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation: Hauptdreiecke. Erster Teil, Berlin 1870, S. 421 und Hauptdreiecke II. Teil, Berlin 1874, S. 605“.

Wir haben einen Bericht hierüber mit einem Beispiele gegeben in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen“, 1882, S. 81—85 und S. 103, und bemerken hiezu, dass die ersten Schreiber schen Formeln von 1870 („Hauptdreiecke I, S. 421“) sich rein sphärisch mit einem mittleren Krümmungs-Halbmesser entwickeln lassen, und so mit den bekannten Soldner schen Coordinaten-Formeln zusammenfallen, während die zweiten Schreiber schen Formeln von 1874 („Hauptdreiecke II, S. 605“) noch höhere Glieder hinzufügen, entsprechend der Gauss schen Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas“.

Es giebt noch eine Frage, betreffend die günstigste Form der Seitengleichung in einem Viereck, welche hier angeschlossen werden könnte, jedoch wollen wir dieses auf den Schluss dieses Kapitels verschieben, um den Übergang zu praktischen Ausgleichungsrechnungen nicht zu lange aufzuhalten.

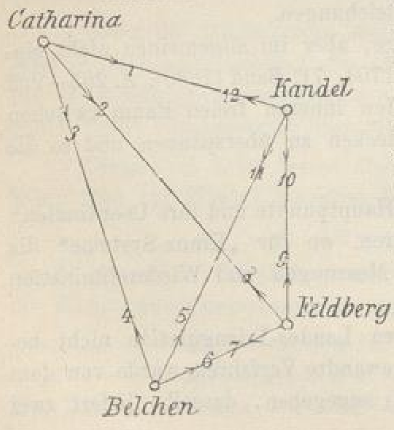
§ 59. Ausgleichung eines Vierecks mit 4 vollen Richtungssätzen.

Als erstes Beispiel zur rechnerischen Durchführung nehmen wir ein Viereck der badischen Triangulierung mit 4 vollen gleichgewichtigen Richtungssätzen.

Die Ergebnisse der Messungen, jeweils auf einen Anfangsstrahl als Nullrichtung bezogen, sollen sein:

Station Catharina.		Station Kandel.		
Kandel . . .	(1) = 0° 0′ 0,00″	Feldberg . .	(10) = 0° 0′ 0,00″	
Feldberg . .	(2) = 34 52 27,44	Belchen . .	(11) = 25 9 9,67	
Belchen . . .	(3) = 57 49 20,90	Catharina .	(12) = 102 43 24,53	(1)
Station Belchen		**Station Feldberg**		
Catharina . .	(4) = 0° 0′ 0,00″	Belchen . .	(7) = 0° 0′ 0.00″	
Kandel . . .	(5) = 44 36 27,07	Catharina . .	(8) = 72 58 55,84	
Feldberg . .	(6) = 84 04 12,94	Kandel . . .	(9) = 115 23 06,40	

Fig. 1.
Viereck mit vollen Richtungssätzen.
Maasstab 1 : 400000.



Hier ist jeweils eine beliebige Sicht als *Null*strahl mit 0° 0′ 0,00″ angenommen, doch ist das unwesentlich, und man soll sich sehr hüten, der so formell bevorzugten Richtung irgend eine sachlich besondere Bedeutung beizulegen. Namentlich darf man nicht glauben, man habe damit *Winkel* vor sich in dem Sinne, wie er in § 57. und § 58. im Gegensatz zu Richtungen aufgestellt wurde. Der Anfangswert 0° 0′ 0,00″ muss vielmehr gerade ebenso eine Ausgleichungsverbesserung erhalten, wie der zweite Richtungswert 34° 52′ 27,44″ u. s. w., und man ändert an der Sache gar nichts, wenn man alle Richtungen eines Satzes um ein beliebiges Maass verschiebt.

Aus diesem Grunde macht man sich häufig