Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 62. Genauigkeit einer Netz-Diagonale

In gleicher Weise bildet man auch die übrigen ausgeglichenen Dreiecke:

Aegidius	[1]—[5] =	100°	55′	54,87″	
Willmer	[10]—[9] =	33	58	38,43	
Wasserturm	[8]—[7] =	45	5	26,72	
		180°	0′	0,02″	[d]
Aegidius	[5]—[4] =	95°	19′	16,18″	
Steuerndieb	[13]—[12] =	34	25	13,30	
Willmer	[11—[10] =	50	15	30,55	
		180°	0′	0,03″	[e]
Aegidius	[4]—[3] =	53°	2′	28,24″	
Steuerndieb	[15]—[13] =	74	52	31,77	
Schanze	[17]—[16] =	52	5	0,03	
		180°	0′	0,04″	[f]

Aegidius	[3]—[2] =	39°	45′	45,23″	
Schanze	[18]—[17] =	56	4	7,62	
Burg	[21]—[19] =	84	10	7,19	
		180°	0′	0,04″	[g]
Aegidius	[4]—[2] =	92°	48′	13,47″	
Steuerndieb	[14]—[13] =	44	9	12,89	
Burg	[21]—[20] =	43	2	33,68	
		180°	0′	0,04″	[h]
Burg	[20]—[19] =	41°	7′	33,51″	
Steuerndieb	[15]—[14] =	30	43	18,88	
Schanze	[18]—[16] =	108	9	7,65	
		180°	0′	0,04″	[i]

Zur Dreiecksberechnung wird man die kleinen Excesse, welche zwischen 0,02″ und 0,04″ betragen, noch auf die Dreieckswinkel verteilen, und dann braucht man nur noch eine Basislänge, um alle Dreiecksseiten nach dem Sinussatz berechnen zu können. Wie am Schlusse des vorigen § 60. S. 188 mitgeteilt wurde, ist die Basisseite

$$\text{Aegidius—Wasserturm } S = 2391{,}672^{m}$$
$$\log S = 3{,}378\,7016$$

Damit wurden in der angegebenen Weise auch alle übrigen Dreiecksseiten widerspruchsfrei berechnet mit folgenden Ergebnissen:

Aegidius—Wasserturm	$\log S = 3.378\,7016$	
Aegidius—Willmer	$\log S = 3.481\,5665$	
Aegidius—Steuerndieb	$\log S = 3.615\,2086$	
Aegidius—Schanze	$\log S = 3.702\,8735$	
Aegidius—Burg	$\log S = 3.624\,0521$	
Wasserturm—Willmer	$\log S = 3.623\,4413$	(5)
Willmer—Steuerndieb	$\log S = 3.727\,4425$	
Steuerndieb—Schanze	$\log S = 3.620\,7673$	
Schanze—Burg	$\log S = 3.511\,0402$	
Burg—Wasserturm	$\log S = 3.613\,3487$	
Burg—Steuerndieb	$\log S = 3.780\,5583$	

§ 62. Genauigkeit einer Netzdiagonale.

Mit den ausgeglichenen Richtungen, Winkeln und Dreiecksseiten des vorigen § 61. kann man alles zum weiteren geodätischen Gebrauch Erforderliche vollends berechnen, und dem Praktiker raten wir deshalb, sofort von § 61. zu § 63. u. § 64. überzugehen, wo wir die Coordinatenberechnung zu dem Fünfeck von § 61. behandeln werden.

Indessen für unseren theoretischen Gang ist es nützlich, hier eine Einschaltung zu machen, betreffend die Genauigkeit irgend einer aus der Basis Aegidius—Wasserturm abgeleiteten Dreiecksseite.

Da die Basis Aegidius—Wasserturm ziemlich klein ist im Vergleich mit der Ausdehnung des Gesamtnetzes, ist es nicht ohne Interesse, die Fehlerübertragung von dieser Basis auf eine der längeren Seiten, z. B. auf die nahezu $2\frac{1}{2}$ mal so lange

Diagonale Burg– Steuerndieb zu berechnen. Dabei handelt es sich nur um diejenigen Fehler, welche durch die Winkelmessungen erzeugt und weiter getragen werden, während die Basis Aegidius—Wasserturm selbst hier als fehlerfrei betrachtet wird.

Wir wollen hiemit eine Funktions-Gewichtsberechnung nach der Theorie von § 42. machen.

Setzen wir die Basis Aegidius—Wasserturm $= b$ und die Diagonale Burg—Steuerndieb $= s$, so besteht nach Fig. 1. § 61. S. 189 die Beziehung:

$$s = b \frac{\sin\,[7-6]\,\sin\,[4-2]}{\sin\,[22-21]\,\sin\,[14-13]} \qquad (1)$$

Die beiden hiezu erforderlichen Dreiecke sind mit ihren ausgeglichenen Winkeln unter [c] und [h] auf S. 196—197 angegeben, nämlich mit Zufügung der Legendre schen ebenen Winkel:

				Legendre
Aegidius	[2—1]	=	70° 56′ 35,48″	70° 56′ 35,47″
Wasserturm	[7—6]	=	75 38 43,06	75 38 43,06
Burg	[22—21]	=	33 24 41,48	33 24 41,47
			180° 0′ 0,02″	180° 0′ 0,00″
Aegidius	[4—2]	=	92° 48′ 13,47″	92° 48′ 13,46″
Steuerndieb	[14—13]	=	44 9 12,89	44 9 12,88
Burg	[21—20]	=	43 2 33,68	43 2 33,66
			180° 0′ 0,04″	180° 0′ 0,00″

Mit den Legendre schen Winkeln rechnet man:

	Diff. für 10″		Diff. für 10″
$\log \sin\,[7-6] = 9.986\,2250$	54	$\log \sin\,[22-21] = 9.740\,8745$	319
$\log \sin\,[4-2] = 9.999\,4798$	−11	$\log \sin\,[14-13] = 9.842\,9735$	216
$9.985\,7048$		$-\,9.583\,8480$	
		$= +\,0.416\,1520$	

$$\begin{array}{lrl} \text{Aegidius—Wasserturm} & \log b = & 3.378\,7016 \\ & + & 9.985\,7048 \\ & + & 0.416\,1520 \\ \hline \text{Burg—Steuerndieb} & \log s = & 3.780\,5584 \quad , \quad s = 6033{,}349^{m} \end{array} \qquad (2)$$

Dieses stimmt genügend mit 3.780 5583, wie auf S. 197 angegeben ist, und zwar kommt, gelegentlich bemerkt, die kleine Abweichung von 1 Einheit der 7. Stelle in *log s* nur daher, dass die Werte (5) am Schluss von § 61. S. 197 bei den Rechnungen aus den verschiedenen Dreiecken in der letzten Stelle nötigenfalls gemittelt wurden.

Aus der vorstehenden logarithmischen Berechnung mit den beigesetzten Differenzen für *log sin* kann man die Fehlerfunktion anschreiben:

$$\log s - \log b = +\,0{,}54\,(d_7 - d_6) - 0{,}11\,(d_4 - d_2) - 3{,}19\,(d_{22} - d_{21}) - 2{,}16\,(d_{14} - d_{13}) \qquad (3)$$

dabei bedeuten d_7, d_6 u. s. w. die Änderungen der gemessenen Richtungen (7), (6)... und zwar d_7, d_6... in Sekunden, wenn $\log s - \log b$ in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale verstanden. Dieses Verfahren ist offenbar ganz entsprechend der Aufstellung der linearen Seitengleichungen, welche wir in § 57. S. 167 gelehrt haben; und man könnte auch die Coefficienten 0,54 u. s. w. ähnlich wie dort als Differentialquotienten der *log sin*-Funktion nachweisen, was nochmals auszuführen nun nicht nötig ist.

Wir betrachten nun die vorstehende Gleichung (3) als Funktion F in dem Sinne von § 42., (indem unsere d denselben Charakter haben wie die x von (1) § 42. S. 123) und damit werden die Coefficienten f:

$$f_7 = +0{,}54 \quad f_6 = -0{,}54 \quad f_4 = -0{,}11 \quad f_2 = +0{,}11$$
$$f_{22} = -3{,}19 \quad f_{21} = +3{,}19 \quad f_{14} = -2{,}16 \quad f_{13} = +2{,}16$$

alle anderen f sind = Null. Wir bilden eine Tabelle aller f und aller derjenigen $a\ b\ c \ldots$, welche mit den vorhandenen f zusammen vorkommen. Die $a\ b\ c \ldots$ sind von der früheren grossen Coefficiententabelle § 61. S. 194—195 hierher übertragen.

	2	4	6	7	13	14	21	22
a	..	..	− 0,54	+ 2,64	+ 3,64	..	+ 3,40	− 3,19
b	− 2,53	− 1,58	..	..	− 0,57	+ 3,54	− 0,21	..
c	+ 1	..	− 1	+ 1	..	..	− 1	+ 1
d	..	..	..	− 1	..	..	..	..
e	..	− 1	..	..	+ 1	..	..	..
f	..	+ 1	..	..	− 1	..	..	..
g	− 1	..	..	..	..	..	+ 1	..
h	− 1	+ 1	..	..	− 1	+ 1	+ 1	..
f	+ 0,11	− 0,11	− 0,54	+ 0,54	+ 2,16	− 2,16	+ 3,19	− 3,19

Nun rechnet man alle af, bf, cf u. s. w., z. B.:

a	f	af	cf
− 0,54	− 0,54	+ 0,2916	+ 0,11
+ 2,64	+ 0,54	+ 1,4256	+ 0,54
+ 3,64	+ 2,16	+ 7,8624	+ 0,54
+ 3,40	+ 3,19	+ 10,8460	− 3,19
− 3,19	− 3,19	+ 10,1761	− 3,19
		$[af] = 30{,}6017$	$[cf] = -5{,}19$ u. s. w.

Dieses sind die Ersatzglieder für die Absolutglieder w der Normalgleichungen, und entsprechend (15) S. 125 haben wir folgendes Coefficientensystem:

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	f
a	$\underline{+107{,}19}$	− 0,63	− 3,41	+ 3,27	+ 0,08	+ 0,49	− 0,87	− 0,24	+ 30,60
b	...	$\underline{+58{,}16}$	− 2,32	− 0,00	+ 1,01	− 8,09	+ 8,63	+ 2,44	− 9,65
c		...	$\underline{+6{,}00}$	− 2,00	...	...	− 2,00	− 2,00	− 5,19
d			...	$\underline{+6{,}00}$	− 2,00	...	...	...	− 0,54
e				...	$\underline{+6{,}00}$	− 2,00	...	− 2,00	+ 2,27
f					...	$\underline{+6{,}00}$	− 2,00	+ 2,00	− 2,27
g						...	$\underline{+6{,}00}$	+ 2,00	+ 3,08
h							...	$\underline{+6{,}00}$	− 1,35
f								...	$\underline{+30{,}29} = [ff]$

Dieses System wird 8 mal reduziert, d. h. es werden der Reihe nach k_1, k_2 bis k_8

eliminiert und dabei das Schlussglied immer mitgeführt. Durch diese 8 Eliminationen wird man erhalten (nach Gleichung (12) S. 124):

$$30{,}29 - (8{,}74 + 1{,}54 + 3{,}63 + 1{,}68 + 0{,}33 + 3{,}01 + 1{,}39 + 0{,}87)$$

$$\text{d. h. } \frac{1}{P} = 30{,}29 - 21{,}19 = 9{,}10$$

Diese ganze Rechnung von S. 199 an ist nur mit dem Rechenschieber gemacht, deshalb höchstens auf 0,1 sicher, daher zu setzen rund:

$$\frac{1}{P} = 9{,}1$$

Da der mittlere Fehler der Gewichtseinheit früher in (4) § 61. S. 195 rund $m = 1{,}0''$ gefunden wurde, haben wir nun den mittleren Funktionsfehler:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} = 1{,}0\sqrt{9{,}1} = \pm 3{,}0 \tag{3}$$

Dieses ist ein mittlerer Fehler in Einheiten der 6ten Logarithmenstelle, wir haben also nach (2) und (3):

$$log\, s = 3.780\,5584 \pm 30$$

$$\text{also } s = 6033{,}349^{m} \pm 0{,}042^{m}$$

Dieses ist geradezu aus der Logarithmentafel erhalten, indem ± 30 an der fraglichen Stelle bei der Tafeldifferenz 72 den Betrag $\pm 0{,}042^{m}$ ausmacht. Mehr theoretisch hat man:

$$d\, log\, s = \frac{\mu}{s}\, d\, s = \pm 0{,}0000030 \qquad \frac{d\, s}{s} = \frac{0{,}0000030}{0{,}434\ldots} = 0{,}000007$$

d. h. 7 Milliontel oder 7 Millimeter auf 1 Kilometer, was auf 6 Kilometer ausgerechnet wieder $\pm$ 42^{mm} giebt wie vorhin.

Dieses ist der mittlere zu fürchtende Fehler der Diagonale Burg—Steuerndieb, insofern diese Seite trigonometrisch aus der fehlerfrei angenommenen Seite Aegidius—Wasserturm abgeleitet ist. Die erzielte Genauigkeit ist offenbar sehr befriedigend.

In gleicher Weise könnte man auch einen bei der Kürze der Basis nicht ungefährlichen *Verdrehungsfehler* des Netzes bestimmen.

§ 63. Abrisse und Coordinaten im System der Landesaufnahme.

Wie schon am Schluss von § 60. angegeben wurde, haben wir für unsere zwei Basispunkte Aegidius und Linden Wasserturm Anschluss-Coordinaten im conformen rechtwinkligen System der Landesaufnahme.

Diese Coordinaten sind für das allgemeine Verständnis der preussischen Geodäsie sehr wichtig, dagegen hat das Kataster andere Coordinaten, welche wir nachher in dem besonderen § 64. behandeln werden.

Die Hauptformeln der conformen rechtwinkligen Coordinaten haben wir vor Kurzem in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 167—171 entwickelt und wir wollen hier nur die Gebrauchsformeln hersetzen, mit Beziehung auf Fig. 1.

Ein Punkt A habe die Projektions-Coordinaten $x_1\ y_1$, und ein Punkt B habe entsprechend $x_2\ y_2$, dann hat man für die geradlinige Entfernung s und den Richtungswinkel t_1 in dem ebenen rechtwinkligen Systeme, wie immer: