Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 66. Triangulierungsausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.
Schwerds Basisnetz

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

berechnungen, wie an dem Beispiel der Fehlerberechnung (16)—(20) zu sehen ist. Allein jener Gewichtseinheitsfehler m befriedigt nicht den oft auftretenden Wunsch, für die auf der Station im Mittel erreichte Winkelgenauigkeit ein anschauliches Maass zu besitzen. Hiezu dient der mittlere Fehler für mittleres Gewicht, wobei aber das mittlere Gewicht nicht etwa schlechthin als Durchschnittswert $\frac{[p]}{n}$ der 9 Einzelgewichte genommen werden darf, sondern der Definition der Gewichte als Reciproke der mittleren Fehler-Quadrate und dem Princip des mittleren Fehlers selbst entsprechend so zu berechnen ist:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}\right] \tag{23}$$

wo n die Zahl der Einzelgewichte ist. In unserem Falle sind die $\frac{1}{p}$ in der Tabelle (2) angegeben mit der Summe 0,3867, es ist also

$$\frac{1}{g} = \frac{0{,}3867}{9} = 0{,}04297 \quad , \quad g = 23{,}37 \tag{24}$$

und der mittlere Fehler für dieses mittlere Gewicht:

$$\mu = m\sqrt{\frac{1}{g}} = 4{,}77\ \sqrt{0{,}04297} = \pm\, 0{,}989'' \tag{25}$$

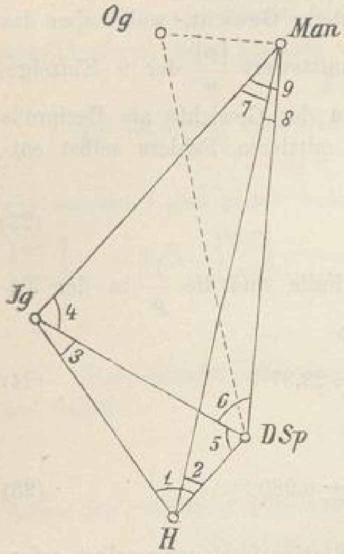
Wenn auf jeder Station nicht mehr als die zur Stationsfestlegung selbst erforderliche Zahl von Winkeln gemessen wäre, so *würde* dieses μ auch den mittleren Fehler von mittlerem Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels vorstellen. Es ist aber in unserem Falle auf einer Station, nämlich Mannheim, ein Winkel überzählig (vgl. Horizontgleichung (9)) und deswegen hat unser μ in (25) eine etwas andere Bedeutung, welche jetzt nicht weiter erörtert werden soll. Überhaupt haben wir (25) nur als formelles Rechenbeispiel hier vorgeführt, denn wenn die Winkel absichtlich sehr ungleich gewichtig sind, hat die Rechnung (25) nicht den inneren Sinn, der ihr bei glatten durchlaufenden Ketten oder gleichförmig ausgebreiteten Netzen zukommt.

§ 66. Triangulierungsausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. Schwerds Basis-Netz.

Wenn schon die Winkelausgleichung des vorigen § 65. nicht ein Beispiel für die laufende Praxis war, so ist das noch weniger der Fall bei einer Dreiecksnetzausgleichung mit Winkeln nach *vermittelnden* Beobachtungen, die wir noch anfügen wollen. Es ist aber wohl nützlich einzusehen, dass man eine derartige Ausgleichung nicht notwendig nach Korrelaten machen muss, sondern dass man auch andere Formen dafür zur Verfügung hat.

Schon in der allgemeinen Theorie § 37. wurde angegeben, dass man Messungen, welche sich zunächst in der Form von bedingten Beobachtungen darbieten, auch auf vermittelnde Beobachtungen reduzieren kann. Ob dieses nützlich ist, kommt auf den einzelnen Fall an; bei unserem Schwerd schen Basisnetz kann man wohl so verfahren, und zwar bekommt man dann nur 4 Normalgleichungen aufzulösen, gegen 5 bei der Korrelaten-Methode. Die Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen wird aber auch noch andere Vorteile, bei Genauigkeitsuntersuchungen, bieten.

Fig. 1.
Schwerd s Basisnetz.
Maassstab 1 : 400 000.



Nach dem vorigen § 65. (7) bis (10) S. 209 bis 210 bestehen für das Schwerd sche Netz Fig. 1. folgende 5 unabhängige Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&+0{,}320\,v_1 - 3{,}419\,v_2 - 4{,}459\,v_3 + 0{,}503\,v_4 \\
&\qquad + 15{,}105\,v_8 - 2{,}860\,v_9 + 4{,}715 = 0 \\
&v_2 + v_5 + v_6 + v_8 + 0{,}809 = 0 \\
&v_1 + v_3 + v_5 - 1{,}578 = 0 \\
&v_4 + v_6 + v_9 + 1{,}655 = 0 \\
&v_7 + v_8 - v_9 - 0{,}100 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Von den 9 gemessenen Winkeln wählen wir die 4 Winkel (1) (2) (3) und (8) als unabhängige Unbekannte aus, oder, sofort zu den Verbesserungen übergehend, nehmen wir die Verbesserungen v_1, v_2 v_3, v_8 als unabhängige Unbekannte der Ausgleichung, und es entsteht die Aufgabe, mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (1) alle anderen v in diesen v_1, v_2, v_3, v_8 auszudrücken.

Nach gewöhnlichen algebraischen Methoden erhalten wir hiefür:

$$\left.\begin{aligned}
v_5 &= -v_1 - v_3 + 1{,}578 \\
v_6 &= +v_1 - v_2 + v_3 - v_8 - 2{,}387 \\
v_9 &= -0{,}054\,v_1 - 0{,}867\,v_2 - 1{,}475\,v_3 + 4{,}641\,v_8 + 1{,}511 \\
v_4 &= -0{,}946\,v_1 + 1{,}867\,v_2 + 0{,}475\,v_3 - 3{,}641\,v_8 - 0{,}779 \\
v_7 &= -0{,}054\,v_1 - 0{,}867\,v_2 - 1{,}475\,v_3 + 3{,}641\,v_8 + 1{,}611
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dazu kommen noch die Fehlergleichungen für die unabhängigen v selbst, nämlich:

$$v_1 = v_1 \qquad v_2 = v_2 \qquad v_3 = v_3 \qquad v_8 = v_8 \tag{3}$$

Die Gewichte p sind schon bei (2) S. 208 angegeben, es ist uns aber dieses Mal bequemer, die Gewichtseinheit 100fach kleiner zu nehmen, und damit bekommen wir folgende Tabelle der Coefficienten der Fehlergleichungen (2) und (3) und der Gewichte p, nebst $\sqrt{p}$:

Fehlergleichungen: (4)

						p	$\sqrt{p}$
$v_1 =$	$+1{,}000\,v_1$	. .	. .	. .	. .	0,70	0,837
$v_2 =$	. .	$+1{,}000\,v_2$	. .	. .	. .	0,07	0,265
$v_3 =$	. .	. .	$+1{,}000\,v_3$	. .	. .	1,01	1,005
$v_8 =$	. .	. .	. .	$+1{,}000\,v_8$	. .	0,28	0,529
$v_5 =$	$-1{,}000\,v_1$	. .	$-1{,}000\,v_3$	. .	$+1{,}578$	0,85	0,922
$v_6 =$	$+1{,}000\,v_1$	$-1{,}000\,v_2$	$+1{,}000\,v_3$	$-1{,}000\,v_8$	$-2{,}387$	0,57	0,755
$v_4 =$	$-0{,}946\,v_1$	$+1{,}867\,v_2$	$+0{,}475\,v_3$	$-3{,}641\,v_8$	$-0{,}779$	0,47	0,686
$v_7 =$	$-0{,}054\,v_1$	$-0{,}867\,v_2$	$-1{,}475\,v_3$	$+3{,}641\,v_8$	$+1{,}611$	0,10	0,316
$v_9 =$	$-0{,}054\,v_1$	$-0{,}867\,v_2$	$-1{,}475\,v_3$	$+4{,}641\,v_8$	$+1{,}511$	0,30	0,548

Um die Gewichte ein für alle mal zu berücksichtigen, multiplizieren wir die

Coefficienten und Absolutglieder der Fehlergleichungen bzw. mit $\sqrt{p}$ und bekommen damit folgende neue Tabelle:

Gleichgewichtige Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\sqrt{p_1}\,v_1 = +0{,}84\,v_1 \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \\
\sqrt{p_2}\,v_2 = \quad . \; . \quad +0{,}26\,v_2 \quad . \; . \quad . \; . \\
\sqrt{p_3}\,v_3 = \quad . \; . \quad . \; . \quad +1{,}00\,v_3 \quad . \; . \quad . \; . \\
\sqrt{p_8}\,v_8 = \quad . \; . \quad . \; . \quad . \; . \quad +0{,}53\,v_8 \quad . \; . \\
\sqrt{p_5}\,v_5 = -0{,}92\,v_1 \quad . \; . \quad -0{,}92\,v_3 \quad . \; . \quad +1{,}46 \\
\sqrt{p_6}\,v_6 = +0{,}75\,v_1 - 0{,}75\,v_2 + 0{,}75\,v_3 - 0{,}75\,v_8 - 1{,}80 \\
\sqrt{p_4}\,v_4 = -0{,}65\,v_1 + 1{,}28\,v_2 + 0{,}33\,v_3 - 2{,}49\,v_8 - 0{,}53 \\
\sqrt{p_7}\,v_7 = -0{,}02\,v_1 - 0{,}27\,v_2 + 0{,}46\,v_3 + 1{,}15\,v_8 + 0{,}51 \\
\sqrt{p_9}\,v_9 = -0{,}03\,v_1 - 0{,}48\,v_2 - 0{,}81\,v_3 + 2{,}55\,v_8 + 0{,}83
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Die Abrundung auf 0,01 ist hinreichend zur Erlangung einer Winkelgenauigkeit von 0,01″.

Die hiezu gehörigen Normalgleichungen sind in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{r}
+\underline{2{,}54\,v_1} - 1{,}37\,v_2 + 1{,}23\,v_3 + \;\; 0{,}96\,v_8 - 2{,}38 = 0 \\
+\underline{2{,}57\,v_2} + 0{,}37\,v_3 - \;\; 4{,}16\,v_8 + 0{,}14 = 0 \\
+\underline{3{,}39\,v_3} - \;\; 3{,}98\,v_8 - 3{,}77 = 0 \\
+\underline{14{,}87\,v_8} + 5{,}37 = 0 \\
+\underline{6{,}60}
\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Die Auflösung dieses Systems von 4 Gleichungen gab:

$$v_1 = +0{,}64'' \qquad v_2 = -0{,}41'' \qquad v_3 = +0{,}46'' \qquad v_4 = -0{,}40'' \qquad (7)$$

Durch Einsetzen dieser 4 ersten v in die Fehlergleichungen (4) bekommt man auch alle anderen v, und zwar überall auf etwa 0,01″ übereinstimmend mit den früheren Resultaten v von (13) § 65. S. 211, weshalb wir diese Zahlen nicht noch einmal hersetzen.

Die Elimination der Normalgleichungen (6) giebt auch ein Schlussglied:

$$[l\,l\,.\,4] = 1{,}14 \qquad (8)$$

was ebenfalls mit 113,8 nach (15) § 65. S. 211 genügend stimmt, mit Rücksicht auf die nun 100 mal kleinere Gewichtseinheit.

Der mittlere Winkelfehler für die Gewichtseinheit ist jetzt:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{9-4}} = \sqrt{\frac{1{,}14}{5}} = \pm\, 0{,}477'' \qquad (9)$$

Dieses entspricht dem früheren 4,77″ nach (15) § 65. S. 211 bei 100 fach grösserer Gewichtseinheit.

Wir wollen noch das Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Winkel bestimmen, und zwar soll diese Funktion die Seite $J\,M$ sein. Die Seite $D\,H$ gilt als fehlerfreie Basis, die Funktion ist daher:

$$J\,M = D\,H \frac{\sin\,[1]\,\sin\,[6]}{\sin\,[3]\,\sin\,[9]} \qquad (10)$$

oder logarithmisch:

$$\log J\,M = \log D\,H + \log \sin\,[1] + \log \sin\,[6] - \log \sin\,[3] - \log \sin\,[9] \qquad (11)$$

Das Differential ist:

$$d \log J M = \frac{\mu}{\varrho} cotg [1]\, d [1] + \frac{\mu}{\varrho} cotg [6]\, d [6] - \frac{\mu}{\varrho} cotg [3]\, d [3] - \frac{\mu}{\varrho} cotg [9]\, d [9]$$

$$d \log J M = 0{,}32\, d [1] + 0{,}90\, d [6] - 4{,}46\, d [3] - 2{,}86\, d [9] \qquad (12)$$

Hier sind aber nur [1] und [3] unabhängige Unbekannte der Ausgleichung, und es dürfen daher nur $d[1]$ und $d[3]$, oder die Differentiale $d[2]$ und $d[8]$ der ebenfalls unabhängigen ausgeglichenen Unbekannten [2] und [8] in (12) vorkommen. Um daher $d[6]$ und $d[9]$ zu eliminieren, betrachten wir die Fehlergleichungen (2) und bilden daraus:

$$\left.\begin{aligned} d[9] &= -0{,}054\, d[1] - 0{,}867\, d[2] - 1{,}475\, d[3] + 4{,}641\, d[8] \\ d[6] &= d[1] - d[2] + d[3] - d[8] \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Diese Gleichungen sind deswegen richtig, weil in den Fehlergleichungen die Absolutglieder l verschwinden, wenn man von den ausgeglichenen Winkeln [1] [2] ... statt von den beobachteten Winkeln (1) (2) ... ausgeht, und entsprechend $d[1]\ d[2] \ldots$ statt $v_1\ v_2 \ldots$ setzt. Die zweite Gleichung (13) kann man unmittelbar aus der Figur ablesen.

Setzt man also (13) in (12), so erhält man:

$$d \log J M = +1{,}37\, d[1] + 1{,}58\, d[2] + 0{,}66\, d[3] - 14{,}17\, d[8] \qquad (14)$$

also:

$$f_8 = -14{,}17 \qquad f_3 = +0{,}66 \qquad f_1 = +1{,}37 \qquad f_2 = +1{,}58 \qquad (15)$$

Wir haben hier die Ordnung $f_8\ f_3\ f_1\ f_2$ angenommen, weil es uns für spätere Zwecke interessiert, v_2 als letzte Unbekannte zu haben, um das Gewicht von v_2 gelegentlich mit zu erhalten. Setzt man nun, um der Anweisung von § 29. S. 93 zu entsprechen, die bei (15) berechneten Werte f an Stelle der Absolutglieder der Normalgleichungen (6), und ordnet nach der Folge $f_8\ f_3\ f_1\ f_2$, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{14{,}87\, q_8} - 3{,}98\, q_3 + 0{,}96\, q_1 - 4{,}16\, q_2 + 14{,}17 &= 0 \\ +\underline{3{,}39\, q_3} + 1{,}23\, q_1 + 0{,}37\, q_2 - 0{,}66 &= 0 \\ +\underline{2{,}54\, q_1} - 1{,}37\, q_2 - 1{,}37 &= 0 \\ +\underline{2{,}57\, q_2} - 1{,}58 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Die Weiterelimination giebt:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{2{,}32\, q_3} + 1{,}49\, q_1 - 0{,}74\, q_2 + 3{,}12 &= 0 \\ +\underline{2{,}48\, q_1} - 1{,}10\, q_2 - 2{,}28 &= 0 \\ +\underline{1{,}41\, q_2} + 2{,}39 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} +\underline{1{,}52\, q_1} - 0{,}62\, q_2 - 4{,}28 &= 0 \\ +\underline{1{,}17\, q_2} + 3{,}38 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

$$+\underline{0{,}92\, q_2} - 1{,}61 = 0 \qquad (19)$$

Die hier geschriebenen q sind bloss Zeichen für die Ordnung der früheren v.

Nach Anleitung von (13) § 29. S. 94 hat man nun:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} &= \frac{14{,}17^2}{14{,}87} + \frac{3{,}12^2}{2{,}32} + \frac{4{,}28^2}{1{,}52} + \frac{1{,}61^2}{0{,}92} \\ &= 13{,}50 + 4{,}20 + 12{,}05 + 2{,}81 = 32{,}56 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$$M = m \sqrt{\frac{1}{P}} = 0{,}477 \sqrt{32{,}56} = \pm 2{,}72 \qquad (21)$$

Dieses ist der mittlere Fehler der Funktion (11) in Einheiten der 6ten Decimale, also:

$$log\, J\, M = 4.252\,6662{\cdot}4 \pm 27{\cdot}2 \quad (22)$$

$$J\, M = 17\,851{,}15^m \pm 0{,}11^m \quad (23)$$

Dieses ist schon in (14) § 65. beigefügt worden.

Gelegentlich hat man auch in dem letzten Coefficienten von q_2 in (19) das Gewicht der Winkelkorrektion v_2 erhalten, nämlich:

$$P_2 = 0{,}92 \quad (24)$$

(derselbe Coefficient 0,92 würde auch erhalten, wenn man die schon früher vorhandenen Gleichungen (6) so auflöste, dass v_2 die letzte Unbekannte wäre).

Hieraus findet man auch den mittleren Fehler des ausgeglichenen Winkels $(2) + v_2 = [2]$, nämlich:

$$M_2 = \frac{m}{\sqrt{0{,}92}} = \pm 0{,}50''$$

(die Eliminationen dieses § sind nur mit dem Rechenschieber gemacht, also überall nur auf etwa 2—3 Stellen genau).

§ 67. Stationsausgleichung mit Winkelmessungen.

Wenn Winkelmessungen so verteilt sind, dass auf einer Station mit s Strahlen mehr als $s - 1$ Winkel vorliegen, so kann man für jeden auf der Station überschüssigen Winkel eine Bedingung in die Netzausgleichung einfügen, wie in dem Beispiele des Schwerd schen Basisnetzes § 65. S. 209 mit der Station Mannheim gezeigt worden ist.

Wenn aber die Zahl der auf den Stationen überzähligen Winkel gross ist, so wird dieses Verfahren sehr umständlich, und ist deswegen im grossen nicht anzuwenden.

Man hat deswegen zu dem Verfahren gegriffen, zuerst die Stationen für sich auszugleichen.

Indem wir die Frage, wie dann die Stationsausgleichungen ins Netz übergehen sollen, vorerst bei Seite lassen, behandeln wir die Stationsausgleichung mit Winkeln jetzt als selbständige vorläufige Aufgabe.

I. Summenprobe im Horizont.

Ein einfacher, in früherer Zeit, als man Repetitionswinkel mass, oft vorgekommener Fall liegt vor, wenn mehrere Winkel, welche den ganzen Horizont von 360° füllen, einzeln gemessen werden und dann auf die Horizontprobe abgestimmt werden müssen. Z. B. in Fig. 3. §. 58. S. 174 hatten wir 2 solche Horizontproben, mit (3) + (6) + (8) + (10) + (24) + (25) im Horizont Oggersheim und mit + (12) + (15) + (16) + (19) + (22) im Horizont Speyer. Auch die Probe auf Mannheim in Fig. 1. § 65. S. 208 erscheint von dieser Art, wenn man (7) , (8) und 360° — (9) als drei einzelne Winkelmessungen auffasst, welche den Horizont 360° füllen müssen.

Die Ausgleichung eines solchen Horizontes besteht bei gleichen Gewichten der einzelnen Winkel lediglich darin, dass man den Horizontwiderspruch zu gleichen Teilen auf alle beteiligten Winkel umlegt, und wenn die Winkel ungleiche Gewichte haben, so erfolgt die Verteilung des Widerspruches umgekehrt proportional den Gewichten.

Man kann dieses nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels *zweier* ungleich