



Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 68. Berechnung voller Richtungssätze

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

Deren Auflösung giebt:

$$k_1 = -0,8 \quad k_2 = +9,3$$

Damit bestimmt man die Verbesserungen v nach (9) § 139. S. 119:

$$v_1 = \frac{1}{5} (-0,8 + 9,3) = +1,7$$

Ebenso werden die übrigen v berechnet, alle zusammen sind:

$v_1 = +1,7 \quad v_2 = +0,7 \quad v_3 = +2,3 \quad v_4 = +3,1 \quad v_5 = +2,3 \quad v_6 = +3,1 \quad v_7 = +0,2 \quad v_8 = -1,9$
diese v in Einheiten von $1'' = 0,0001''$ zu den gemessenen Winkeln (34) hinzugefügt geben die ausgeglichenen Winkel, welche keine Widersprüche mehr zeigen.

Die Summe $[p v v]$ wird aus den einzelnen v in Übereinstimmung mit der Formel $—[w k]$ erhalten:

$$[p v v] = 138,6$$

also der mittlere Fehler eines Winkels vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{138,6}{2}} = \pm 8,3'' \text{ oder } \pm 2,7''.$$

(In unserer vorigen Auflage S. 226 war dieses Beispiel ausführlicher behandelt.)

§ 68. Berechnung voller Richtungs-Sätze.

Wenn eine volle Satzmessung in gleichartiger Weise, nur mit verdrehtem Limbus, mehrfach wiederholt wird, so besteht die Berechnung des Schlussergebnisses lediglich in einer Mittelbildung, wie wir an dem Beispiele von § 60. S. 187 bereits gezeigt haben.

Die Limbusverstellung zwischen je 2 Sätzen macht man bekanntlich wegen der Elimination der Teilungsfehler mit gleichen Intervallen, z. B. von 45° zu 45° , wenn man 4 Sätze nehmen will, von 30° zu 30° bei 6 Sätzen u. s. w. Die verschiedenen Sätze macht man gewöhnlich dadurch vergleichbar, dass man irgend eine Sicht, etwa als Anfang, in allen Sätzen auf einen gemeinsamen Wert, z. B. $0^\circ 0' 0''$ bringt (oder auch auf einen genäheren Richtungswinkel), doch könnte man die Mittelbildung, wenn man wollte, auch *ohne* solche vorhergehende Zusammenschiebung machen, indem man ja immer auch *nach* der Mittelbildung den Satz nochmals beliebig verschieben kann.

All dieses Bekannte hier vorzuführen, sind wir nur veranlasst, weil wir noch die Berechnung des mittleren Fehlers aus mehreren Satzwiederholungen zeigen wollen, und zwar im Anschluss an unser früheres Beispiel der Hannover schen Triangulierung, Station Schanze, in § 60. S. 187.

Es sind dort 12 Sätze genommen, von welchen wir aber nun nur 6, d. h. die Hälfte benutzen wollen, erstens weil 12 Sätze ungewöhnlich viel sind, und zweitens, weil es hier um ein übersichtliches Schulbeispiel zu thun ist, bei welchem zu viele Wiederholungen die Übersichtlichkeit stören würden.

Mit Weglassung der Grade und Minuten haben wir so die 6 Richtungssätze erhalten, welche in der Tabelle auf S. 225 in der Abteilung I eingesetzt sind, und zwar mit $60,0''$ als Anfangsrichtung auf P^0 statt mit $0,0''$, damit bei den Satzverschiebungen keine negativen Werte entstehen.

Man bildet nun in der Abteilung I wie gewöhnlich die Quersummen und die Richtungsmittel, und zur Kontrolle auch nach den Vertikalspalten die Satzsummen.

Berechnung des mittleren Fehlers einer Richtungsmessung aus 6 Sätzen
mit 4 Zielpunkten.

Satz-Nr. Kreislage	1. 0°	2. 30°	3. 60°	4. 90°	5. 120°	6. 150°	Quer- summe	Richtungs- Mittel A
I	Zielpunkt P^o	60,0"	60,0"	60,0"	60,0"	60,0"	360,0"	60,00" = A^o
	" P'	6,0	10,5	11,0	10,0	8,5	51,5	8,58 = A'
	" P''	63,0	61,0	60,5	62,0	56,0	360,5	60,08 = A''
	" P'''	40,5	45,0	43,5	38,5	40,0	249,0	41,50 = A'''
Summen		169,5	176,5	175,0	170,5	164,5	1021,0	170,16
Satzmittel B		42,38	44,12	43,75	42,62	41,12	255,25	42,54
Satzverschiebung $A_0 - B$		+ 0,16	- 1,58	- 1,21	- 0,08	+ 1,42	+ 1,29	0,00
II = $I + (A_0 - B)$	P^o	60,16	58,42	58,79	59,92	61,42	360,00	60,00 = A^o
	P'	6,16	8,92	9,79	9,92	9,92	51,50	8,58 = A'
	P''	63,16	59,42	59,29	61,92	57,42	360,50	60,08 = A''
	P'''	40,66	43,42	42,29	38,42	41,42	249,00	41,50 = A'''
Summen		170,14	170,18	170,16	170,18	170,18	1021,00	
Satzmittel B'		42,54	42,54	42,54	42,54	42,54	255,24	
III	$v^o = A^o - P^o$	- 0,16	+ 1,58	+ 1,21	+ 0,08	- 1,42	- 1,29	0,00
	$v' = A' - P'$	+ 2,42	- 0,34	- 1,21	- 1,34	- 1,34	+ 1,79	- 0,02
	$v'' = A'' - P''$	- 3,08	+ 0,66	+ 0,79	- 1,84	+ 2,66	+ 0,79	- 0,02
	$v''' = A''' - P'''$	+ 0,84	- 1,92	- 0,79	+ 3,08	+ 0,08	- 1,29	0,00
Summen		+ 0,02	- 0,02	0,00	- 0,02	- 0,02	0,00	- 0,04
IV	$v^o 2$	0,03	2,50	1,46	0,01	2,02	1,66	7,68
	$v' 2$	5,86	0,12	1,46	1,80	1,80	3,20	14,24
	$v'' 2$	9,49	0,44	0,62	3,39	7,08	0,62	21,64
	$v''' 2$	0,71	3,69	0,62	9,49	0,01	1,66	16,18
		16,09	6,75	4,16	14,69	10,91	7,14	$\frac{59,74}{59,74}$
								$\} = [v^2]$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{(n-1)(s-1)}} = \sqrt{\frac{59,74}{(6-1)(4-1)}} = \sqrt{\frac{59,74}{15}} = \pm 2,00'' \quad (1)$$

Die Quersumme 1021,0 muss mit der Vertikal-Addition der Quersummen der einzelnen Sätze stimmen. Die Richtungsmittel A , welche sich aus den Quersummen durch Division mit 6 ergeben, enthalten nun bereits alles, was zur Ausrechnung der Richtungssätze an sich gehört, denn man hat, wenn man wieder die Grade und Minuten von (2) S. 187 zusetzt, das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 P^o &= 60,00'' & \text{Aegidius} &= 0^\circ 00' 00,00'' \\
 P' &= 8,58'' & \text{Burg} &= 56^\circ 04' 08,58'' \\
 P'' &= 60,08'' & \text{Steuerndieb} &= 307^\circ 55' 0,08'' \\
 P''' &= 41,50'' & \text{Dreifaltigkeit} &= 345^\circ 43' 41,50''
 \end{aligned}$$

Um weiter zur Berechnung eines mittleren Richtungsfehlers zu gelangen, bilden wir auch die Satzmittel B , bei denen der Blick sich sogleich darauf richten wird, ob sie nahezu gleich sind und dann bildet man aus diesen Satzmitteln B wieder ein Mittel $A_0 = 42,54$, welches mit den einzelnen B verglichen, die Satzverschiebungen

$A_0 - B$ giebt. Diese $A_0 - B$ zu den Richtungswerten in I addiert, geben die verschobenen Richtungen in der Abtheilung II. (S. 225.)

Verfährt man in II ebenso wie vorher in I, so bekommt man in Hinsicht auf die Richtungsmittel A durchaus nichts neues, aber die Satzmittel B' werden anders als vorher, nämlich die B' werden, wie beabsichtigt war, alle *gleich*, und wenn man nun die Fehler v durch Vergleichung der Richtungsmittel $A^0 A' A'' A'''$ mit den verschobenen Richtungen der Abteilung II bildet, wie in III geschehen ist, so wird nach Kolumnen und Linien addiert überall die Summe = 0, oder höchstens 0,02 wegen Abrundungen. Endlich werden diese v quadriert, wie in Abteilung IV zu sehen ist, und die Summe aller v^2 , nach Spalten und Linien addiert, wird $[v^2] = 59,74$. Der Nenner zur Berechnung des mittleren Fehlers ist $= (n - 1)(s - 1)$, wo n die Anzahl der Sätze (Gyren) und s die Anzahl der Richtungen (Strahlen) in jedem Satze bedeutet, also in unserem Falle $n = 6$ und $s = 4$ oder $(n - 1)(s - 1) = 15$, womit sich ergiebt:

$$m = \sqrt{\frac{59,74}{15}} = \pm 2,00'' \quad (2)$$

Dieses ist der mittlere Fehler einer Richtung in einem Satze, und bei 6 maliger Satzwiederholung wird der mittlere Fehler einer 6 fach gemittelten (d. h. ausgeglichenen) Richtung:

$$M = \frac{2,00}{\sqrt{6}} = \pm 0,98'' \quad (3)$$

Wenn man, ebenso wie die hier behandelten 6 Sätze, alle die 12 Sätze von (2) § 60. S. 187 zusammen berechnet, so erhält man zu Fig. 1. § 60. S. 185

$$m = \pm 2,31'' , \quad M = \pm 0,67'' \quad (4)$$

Was die Begründung des Rechenverfahrens nach S. 225 in Hinsicht auf die einzelnen v und $[v^2]$ betrifft, so mag es zunächst genügen, dass in Abteilung III die v nach Spalten und Linien durchaus die Summen Null geben, dass also in allen Beziehungen das Prinzip des arithmetischen Mittels eingehalten ist. Die schärfere Begründung ist aus dem späteren § 71. zu entnehmen.

Anmerkung über Teilungsfehler.

Wenn die Satzverschiebungen $A_0 - B$ in der Rechnung von S. 225 einen gesetzmässigen Verlauf zeigen (flüssige Curve beim Auftragen der $A_0 - B$ als Ordinaten zu den Kreislagen als Abscissen), so enthält das eine Andeutung von systematischen Teilungsfehlern, zugleich aber auch die Beruhigung, dass der wirkliche mittlere Richtungsfehler, wie er nachher in das Netz eingeht, *kleiner* sein wird, als der Fehler m , bzw. M nach der Rechnung (2) und (3), denn ein Teil der Wertbeträge der v wird in den systematischen Teilungsfehlern seinen Grund haben, und daher durch die symmetrischen Kreisstellungen sich grossenteils eliminieren.

In unserem Falle zeigen die $A_0 - B$ auf S. 225 in der That gesetzmässigen Verlauf, und der Schlussfehler $M = \pm 0,67''$ nach (4) wäre also noch zu gross. Die Netzausgleichung § 61. gab in (4) S. 195 $m = \pm 1,04''$, was mit vorigem $M = \pm 0,67''$ vergleichbar wäre, wenn nicht noch eine Menge anderer Umstände, die vielen Cen-trierungen auf hohen (vielleicht schwankenden) Türm'en u. s. w. dazu kämen.