Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 69. Genäherte Berechnung unvollständiger Richtungssätze

§ 69. Genäherte Berechnung unvollständiger Richtungssätze.

Hat man Richtungsbeobachtungen in lauter vollen Sätzen, so besteht die Ausgleichung lediglich in der Mittelbildung für alle Ablesungen je eines Zielpunktes, wie im vorigen § 68. gezeigt ist.

Sind die einzelnen Sätze nicht alle vollständig, so ist die strenge Ausgleichung nach unserem späteren § 71. zu machen.

Es giebt aber eine zweckmässiges Näherungsverfahren zur Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze, welches in dem Werke „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland“, London 1858, S. 62—66, zuerst angegeben und in Helmert „Ausgleichungsrechnung nach der M. d. kl. Q., 1872“, S. 154 behandelt wird.

Als Zahlenbeispiel hiezu haben wir auf S. 228 eine willkürliche Auswahl aus den Messungen auf der Station Trenk der Gradmessung in Ostpreussen getroffen, und dabei angenommen, dass wenigstens *ein* Zielpunkt (Mednicken) in allen Sätzen eingeschnitten ist, so dass alle Sätze auf Mednicken $= 0° 0' 0''$ reduziert werden können. Dieses ist jedoch nicht wesentlich; wäre z. B. in dem 8ten Satz nur Wargelitten und Galtgarben gemessen, nicht aber Mednicken, so würde man etwa diesen Satz auf das Mittel der sämtlichen vorhergehenden Ablesungen von Wargelitten oder Galtgarben bringen. Mit einigem Geschick wird man sich in solchen Fällen leicht helfen können, so dass alle Sätze in gemeinsamer genäherter Orientierung zum Beginn der Ausgleichung dastehen.

Hat man so das Beobachtungsmaterial in der Tabelle I a geordnet, so bildet man in allen Kolumnen die Mittel A, und wenn die Sätze nur sehr wenig lückenhaft waren, oder wenn es sich nur um eine flüchtige Ausgleichung handelte, so würde man die Mittelwerte A sofort als Ergebnisse beibehalten.

Die weitere Ausgleichung gestaltet sich so:

I b. Man bildet die Differenzen $A - l = v$ zwischen den Mitteln A der ersten Stufe und ihren darüber stehenden l, z. B.:

Fuchsberg Num.	1.	$35{,}8''$	$-\,36{,}2''$	$= -\,0{,}4''$
	2.	$35{,}8$	$-\,37{,}5$	$= -\,1{,}7$
	3.	. .	. .	. .
	4.	$35{,}8$	$-\,33{,}7$	$= +\,2{,}1$
	5.	$35{,}8$	$-\,36{,}1$	$= -\,0{,}3$
	6.	$35{,}8$	$-\,34{,}7$	$= +\,1{,}1$
	7.	$35{,}8$	$-\,36{,}5$	$= -\,0{,}7$
Summe				$+\,3{,}2 - 3{,}1 = +\,0{,}1$ soll $= 0{,}0$

Die algebraischen Summen dieser $A - l = v$ sind bekanntlich $=$ Null, was als Rechenprobe der Abteilung II. dient und hier mit $+\,0{,}1$ statt $0{,}0$ genügend stimmt.

Weiter bildet man für die Abteilung I b die Quersummen und die Quermittel, z. B.:

$$\frac{0{,}0'' - 0{,}4'' + 1{,}9'' + 0{,}2''}{4} = \frac{+\,1{,}7''}{4} = +\,0{,}4'' = x.$$

Diese x der letzten Spalte von I b setzt man unverändert hinauf nach I a.

II. Die soeben besprochenen x werden zu den l in I a addiert, und die Summen nach II a heruntergesetzt. Hier bildet man wieder spaltenweise die Mittel B, welche als Resultat gelten.

Genäherte Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze. (Station Trenk.)

Satz Num.	Ia. Beobachtete Richtungen. Erste Stufe. Mednicken l^0	Fuchsberg l'	Wargelitten l''	Galtgarben l'''	x	
1	0° 0′ 0,0″	83° 30′ 36,2″	287° 14′ 11,0″	346° 24′ 18,4″	+ 0,4	
2	0,0	37,5	14,5	. .	— 1,1	
3	0,0	. .	12,5	18,0	+ 0,3	
4	0,0	33,7	14,1	. .	+ 0,3	
5	0,0	36,1	13,4	. .	— 0,3	von Ib.
6	0,0	34,7	. .	19,6	0,0	heraufgesetzt.
7	0,0	36,5	. .	. .	— 0,3	
8	0,0	. .	13,7	20,5	— 0,9	
9	0,0	. .	11,2	. .	+ 0,8	
10	0,0	. .	. .	16,5	+ 1,0	
Summen	10. 0,0″	6. 214,7″	7. 90,4″	5. 93,0″	10 + 6 + 7 + 5 = 28	
Mittel A.	0° 0′ 0,0″	83° 30′ 35,8″	287° 14′ 12,9″	346° 24′ 18,6″		

	Ib. Differenzen $A - l = v$				Quer-Summen	Anzahl q	Mittel x
1	0,0″	— 0,4″	+ 1,9″	+ 0,2″	+ 1,7	4	+ 0,4″
2	0,0	— 1,7	— 1,6	. .	— 3,3	3	— 1,1
3	0,0	. .	+ 0,4	+ 0,6	+ 1,0	3	+ 0,3
4	0,0	+ 2,1	— 1,2	. .	+ 0,9	3	+ 0,3
5	0,0	— 0,3	— 0,5	. .	— 0,8	3	— 0,3
6	0,0	+ 1,1	. .	— 1,0	+ 0,1	3	0,0
7	0,0	— 0,7	. .	. .	— 0,7	2	— 0,3
8	0,0	. .	— 0,8	— 1,9	— 2,7	3	— 0,9
9	0,0	. .	+ 1,7	. .	+ 1,7	2	+ 0,8
10	0,0	. .	. .	+ 2,1	+ 2,1	2	+ 1,0
Summen	0,0″	+ 3,2″	+ 4,0″	+ 2,9″		28	
		— 3,1	— 4,1	— 2,9			
	0,0	+ 0,1	— 0,1	0,0			
Probe, soll:	0,0	0,0	0,0	0,0			

	IIa. Verbesserte Richtungen $l + x$. Zweite Stufe.				
1	359° 59′ 60,4″	83° 30′ 36,6″	287° 14′ 11,4″	346° 24′ 18,8″	
2	58,9	36,4	13,4	. .	
3	60,3	. .	12,8	18,3	
4	60,3	34,0	14,4	. .	Diese Werte werden
5	59,7	35,8	13,1	. .	durch Additionen
6	60,0	34,7	. .	19,6	$l + x$
7	59,7	36,2	. .	. .	von I. gebildet.
8	59,1	. .	12,8	19,6	
9	60,8	. .	12,0	. .	
10	61,0	. .	. .	17,5	
Summen	10. 600,2″	6. 213,7″	7. 89,9″	5. 93,8″	
Mittel B.	0° 0′ 0,0″	83° 30′ 35,6″	287° 14′ 12,8″	346° 24′ 18,8″	

Um dieses Verfahren zu begründen, erinnern wir uns, dass es immer darauf ankommt, die Differenzen v zwischen den Resultaten und den Beobachtungen in ihrer Quadratsumme $[v\,v]$ möglichst klein zu machen. Man kann nun in diesem Falle die Gesamtsumme $[v\,v]$ in zweifacher Weise zerlegt denken:

1) Zerlegung nach Kolumnen $[v\,v] = [v^\circ\,v^\circ] + [v'\,v'] + [v''\,v''] + \ldots$ (1)

2) Zerlegung nach Linien $[v\,v] = [v_1\,v_1] + [v_2 v_2] + [v_3\,v_3] + [v_4 v_4] + \ldots$ (2)

Durch die Bildung der Kolumnenmittel A wird in jeder Kolumne für sich die Summe $[v^\circ\,v^\circ]$, bzw. $[v'\,v']$ oder $[v''\,v'']$ möglichst klein gemacht, und in den einzelnen Linien wird dann $[v_1\,v_1]$, bzw. $[v_2\,v_2]$ u. s. w. noch verkleinert durch Anbringung der Satzverschiebungen $x_1\;x_2$ u. s. w., welche die arithmetischen Mittel der v jeder Linie sind.

Letzteres zeigt sich am deutlichsten an derjenigen Kolumne, welche am Anfang zur Hauptorientierung gedient hat, in unserem Beispiel an der Kolumne Mednicken; diese erhält in der Tabelle I b alle $v = 0$, d. h. alle Widersprüche werden dadurch den anderen Kolumnen zugeschoben, und erst nach Einführung der Verschiebungen x tritt eine gerechtere Verteilung der v ein.

Die *allmähliche* Verkleinerung von $[v\,v]$, zuerst in den Kolumnen, dann in den Linien, entspricht näherungsweise der M. d. kl. Q., welche bei strenger Anwendung eine *gemeinsame* Berücksichtigung aller Beziehungen in den Kolumnen und in den Linien verlangen würde.

Die Zahlenwerte der Tabelle II a haben immer noch den Charakter von *Original*-Beobachtungen, denn es sind nur die Ablesungen jedes Satzes um eine *konstante* Grösse x verschoben worden, und solche Verschiebung ist bei Richtungs-Beobachtungs-Sätzen immer willkürlich zulässig.

Man kann daher, mit der Tabelle II a von neuem anfangend, die ganze Rechnung wiederholen, eine dritte Stufe III bilden, und es ist möglich, dass man durch fortgesetzte Wiederholungen dieser Art den Resultaten einer strengen Ausgleichung nach der M. d. kl. Q. unbegrenzt nahe kommt.

Dabei kann man auch für jede Ausgleichungsstufe die Quadratsumme $[v^2]$ der übrig bleibenden Fehler ausrechnen und an deren allmählicher Abnahme sehen, ob die Rechnungsgang convergiert. Wir haben das an unserem Beispiele S. 228 bis zur dritten Stufe durchgeführt und folgendes erhalten:

Station Trenk

	Stufe I	Stufe II	Stufe III
Mednicken . . .	0° 0′ 0,0″	0° 0′ 0,0″	0° 0′ 0,00″
Fuchsberg . . .	83 30 35,8	83 30 35,6	83 30 35,55
Wargelitten . . .	287 14 12,9	287 14 12,8	287 14 12,67
Galtgarben . . .	346 24 18,6	346 24 18,8	346 24 18,81
	$[v^2] = 30{,}22$	$[v^2] = 18{,}42$	$[v^2] = 17{,}97$

Von der II. zur III. Stufe ist kaum noch merkliche Änderung. Aus der Summe $[v^2]$ kann man auch einen mittleren Fehler einer Richtung berechnen, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{17{,}37}{28 - 13}} = \sqrt{\frac{17{,}97}{15}} = \pm 1{,}09''$$

Der Nenner $28 - 13$ ist hier dadurch entstanden, dass 28 gemessene Richtungen vorhanden sind, welchen aber als Unbekannte gegenüber stehen erstens 3 unabhängige

Winkel zwischen 4 Sichten und 10 Orientierungs-Unbekannte in 10 gemessenen Sätzen, also 13 Unbekannte.

Die in Vorstehendem behandelte Näherungsausgleichung empfiehlt sich aus vielen Gründen, und sie dürfte vielleicht in neuer Zeit noch mehr Bedeutung deswegen gewinnen, weil die strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze, welche wir im nachfolgenden § 71. lehren werden, mit der dazu gehörigen formell strengen Bessel schen Netz-Ausgleichung (§ 72.) allmählich gegen andere Verfahren zurücktritt.

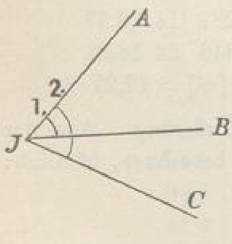
§ 70. Unterscheidung von Winkelmessung und Richtungsmessung.

Wir haben schon im Bisherigen mehrfach die Unterscheidung von Winkelmessungen und Richtungsmessungen gemacht, ohne dabei scharfe Erklärungen zu geben, indem diese Benennungen heute so allgemein, schon bei den Messungen, gebraucht werden, dass ihr Sinn als bekannt vorausgesetzt werden konnte, nämlich so, dass eine *Winkelmessung* (im engeren Sinne) sich stets auf *zwei* Sichtstrahlen, links und rechts, bezieht, während ein Satz von *Richtungs*messungen beliebig viele Sichtstrahlen enthalten kann.

Winkelmessung erscheint also als besonderer Fall der Richtungsmessung, und wenn man mehrere Winkelmessungen aneinander setzt, so bekommt man für die trigonometrischen Rechnungen dasselbe, was ein Satz von Richtungsmessungen bietet, und nur wenn es sich um Ausgleichungs- und Genauigkeitsfragen handelt, ist die Unterscheidung von Winkeln und Richtungen in dem angegebenen Sinne von Bedeutung.

Die heutigen Benennungen Winkelmessung und Richtungsmessung haben sich in diesem Sinne erst in den letzten Jahrzehnten festgesetzt. Gauss unterschied 1821 (Astr. Nachr. 1. Band, S. 81) „Winkelmessungen auf einmal gemacht“ (Richtungen) und „Winkelmessungen unabhängig gemacht“ (Winkelmessungen im engeren Sinne), Bessel und Hagen gebrauchten 1837 die Worte Winkel und Richtung ohne scharfe Unterscheidung nach dem heutigen Sinne, welche wie es scheint von *Hansen* herrührt, der eine Ausgleichung nach „Richtungen“ 1841 in „Astr. Nachr., 18. Band“, S. 173, gab. Auch *Gerling* gebraucht in seinen „Ausgleichungs-Rechnungen“ 1843, „Winkel“ und „Richtungen“, so wie heute gebräuchlich ist.

Fig. 1.
3 Richtungen A B C
2 Winkel 1. 2.



Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir die wichtigsten Begriffe über mittlere Fehler und Gewichte von Winkeln und Richtungen festsetzen.

Ein Winkel kann immer betrachtet werden als Differenz zweier Richtungen; z. B. in Fig. 1. ist:

$$\text{Winkel } A\,J\,B = \text{Richtung } J\,B - \text{Richtung } J\,A \tag{1}$$

Ist daher r ein mittlerer Richtungsfehler und m ein mittlerer Winkelfehler, so ist nach (1):

$$\pm m = \pm r \pm r$$
$$m^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$$
$$m = r\sqrt{2} \tag{2}$$

oder in Gewichtsverhältnissen, wenn p ein Winkelgewicht und q ein Richtungsgewicht ist: