Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 70. Unterscheidung von Winkelmessung und Richtungsmessung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Winkel zwischen 4 Sichten und 10 Orientierungs-Unbekannte in 10 gemessenen Sätzen, also 13 Unbekannte.

Die in Vorstehendem behandelte Näherungsausgleichung empfiehlt sich aus vielen Gründen, und sie dürfte vielleicht in neuer Zeit noch mehr Bedeutung deswegen gewinnen, weil die strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze, welche wir im nachfolgenden § 71. lehren werden, mit der dazu gehörigen formell strengen Bessel schen Netz-Ausgleichung (§ 72.) allmählich gegen andere Verfahren zurücktritt.

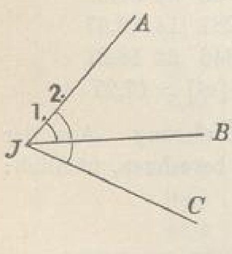
§ 70. Unterscheidung von Winkelmessung und Richtungsmessung.

Wir haben schon im Bisherigen mehrfach die Unterscheidung von Winkelmessungen und Richtungsmessungen gemacht, ohne dabei scharfe Erklärungen zu geben, indem diese Benennungen heute so allgemein, schon bei den Messungen, gebraucht werden, dass ihr Sinn als bekannt vorausgesetzt werden konnte, nämlich so, dass eine *Winkelmessung* (im engeren Sinne) sich stets auf *zwei* Sichtstrahlen, links und rechts, bezieht, während ein Satz von *Richtungs*messungen beliebig viele Sichtstrahlen enthalten kann.

Winkelmessung erscheint also als besonderer Fall der Richtungsmessung, und wenn man mehrere Winkelmessungen aneinander setzt, so bekommt man für die trigonometrischen Rechnungen dasselbe, was ein Satz von Richtungsmessungen bietet, und nur wenn es sich um Ausgleichungs- und Genauigkeitsfragen handelt, ist die Unterscheidung von Winkeln und Richtungen in dem angegebenen Sinne von Bedeutung.

Die heutigen Benennungen Winkelmessung und Richtungsmessung haben sich in diesem Sinne erst in den letzten Jahrzehnten festgesetzt. Gauss unterschied 1821 (Astr. Nachr. 1. Band, S. 81) „Winkelmessungen auf einmal gemacht“ (Richtungen) und „Winkelmessungen unabhängig gemacht“ (Winkelmessungen im engeren Sinne), Bessel und Hagen gebrauchten 1837 die Worte Winkel und Richtung ohne scharfe Unterscheidung nach dem heutigen Sinne, welche wie es scheint von *Hansen* herrührt, der eine Ausgleichung nach „Richtungen“ 1841 in „Astr. Nachr., 18. Band“, S. 173, gab. Auch *Gerling* gebraucht in seinen „Ausgleichungs-Rechnungen“ 1843, „Winkel“ und „Richtungen“, so wie heute gebräuchlich ist.

Fig. 1.
3 Richtungen $A\ B\ C$
2 Winkel 1. 2.



Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir die wichtigsten Begriffe über mittlere Fehler und Gewichte von Winkeln und Richtungen festsetzen.

Ein Winkel kann immer betrachtet werden als Differenz zweier Richtungen; z. B. in Fig. 1. ist:

$$\text{Winkel } A\,J\,B = \text{Richtung } J\,B - \text{Richtung } J\,A \tag{1}$$

Ist daher r ein mittlerer Richtungsfehler und m ein mittlerer Winkelfehler, so ist nach (1):

$$\pm m = \pm r \pm r$$

$$m^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$$

$$m = r\sqrt{2} \tag{2}$$

oder in Gewichtsverhältnissen, wenn p ein Winkelgewicht und q ein Richtungsgewicht ist:

$$\left.\begin{aligned} p:q &= \frac{1}{2} : 1 \text{ oder} = 1:2 \\ \text{oder } p &= \frac{q}{2} \quad , \quad q = 2p \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

d. h. eine Winkelmessung hat nur halbes Gewicht p im Vergleich mit dem Gewicht q einer Richtungsmessung.

Da durch Messungswiederholung auch das Gewicht verdoppelt wird, ergiebt sich auch, dass die Doppelmessung eines Winkels gleiches Gewicht hat mit der einfachen Messung einer Richtung.

Eine einzelne Richtungsmessung ist für praktische Zwecke wertlos, denn *eine* solche Messung bestimmt nur den Winkel, welcher eine Theodolit-Sicht mit der Sicht für die Null-Ablesung bildet, z. B. wenn man bei einer Theodolit-Aufstellung einen Punkt A anzielt und 26° 17′ 20″ abliest, so heisst das, die Sicht A macht den Winkel 26° 17′ 20″ mit derjenigen Sichtlinie, welche man bei der Ablesung 0° 0′ 0″ hat. Würde man nun den Theodolit wegnehmen, so hätte man für trigonometrische Berechnungen absolut Nichts erhalten. Man muss für geodätische Zwecke immer mindestens *zwei* Richtungen zusammen messen. Die Richtungen, welche bei einer und derselben Limbusstellung gemessen werden, bilden zusammen einen *Satz* (oder Gyrus).

Wenn nach Fig. 1. die 3 Richtungen $A\,B\,C$ in einem Satz eingeschnitten sind, so ist jede Richtung mit einem besonderen Fehler $v\,A$, $v\,B$, $v\,C$ behaftet, und wenn die 3 Messungen in eine Ausgleichung eingehen, so muss werden:

$$(v\,A)^2 + (v\,B)^2 + (v\,C)^2 + \ldots = \text{Minimum} \qquad (4)$$

Wenn andererseits die 3 Strahlen $A\,B\,C$ durch 2 *Winkel*messungen $A\,B$ und $A\,C$ gegen einander festgelegt werden, so entsprechen diesen 2 Winkelmessungen 4 Richtungsverbesserungen, es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \text{Winkelverbesserung } \delta_1 &= v\,B_1 - v\,A_1 \\ \text{Winkelverbesserung } \delta_2 &= v\,C_2 - v\,A_2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

wo δ_1 und δ_2 Winkelverbesserungen, und $v\,A_1$, $v\,B_1$, $v\,A_2$, $v\,C_2$ Richtungsverbesserungen sind. Wenn man nun nach Richtungen ausgleicht, so besteht die Bedingung (für gleiche Gewichte):

$$(v\,A_1)^2 + (v\,B_1)^2 + (v\,A_2)^2 + (v\,C_2)^2 + \ldots \text{ Minimum} \qquad (6)$$

während bei einer Ausgleichung nach Winkeln gälte:

$$p_1\,\delta_1^2 + p_2\,\delta_2^2 + \ldots = p_1\,(v\,B_1 - v\,A_1)^2 + p_2\,(v\,C_2 - v\,A_2)^2 + \ldots = \text{Minimum} \qquad (7)$$

wo p_1 und p_2 die Winkelgewichte sind.

Angenommen, man habe die Ausgleichung nach dieser letzten Bedingung (7) bewirkt, so ist man zur Kenntnis der *Differenzen* $v\,B_1 - v\,A_1$ u. s. w. gelangt, welche in (5) mit δ_1, δ_2 u. s. w. bezeichnet wurden; die einzelnen $v\,A_1$, $v\,B_1$ u. s. w. kennt man vorerst noch nicht. Wenn aber diese Richtungsverbesserungen $v\,A_1$, $v\,B_1$ u. s. w. in gar keinen anderen Verbindungen in die Rechnung eingehen, als eben in diesen Differenzen δ_1, δ_2 u. s. w., so hat man das Recht, bei der Zerlegung der Winkelverbesserungen δ in je 2 Richtungsverbesserungen abermals das Prinzip der kleinsten Quadratsumme anzuwenden und zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} v\,A_1 &= -\frac{\delta_1}{2} \qquad & v\,B_1 &= +\frac{\delta_1}{2} \\ v\,A_2 &= -\frac{\delta_2}{2} \qquad & v\,B_2 &= +\frac{\delta_2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

denn jede andere Verteilung würde eine grössere Quadratsumme $(v\,A_1)^2 + (v\,B_1)^2 + \ldots$ geben. Setzt man die Werte für $v\,A_1$, $v\,B_1$ u. s. w. von (8) in (6) und (7) ein, so wird:

$$\frac{1}{2}\,\delta_1^2 + \frac{1}{2}\,\delta_2^2 + \ldots = \text{Minimum} \qquad (6^*)$$

$$p_1\,\delta_1^2 + p_2\,\delta_2^2 + \ldots = \text{Minimum} \qquad (7^*)$$

Diese 2 Bedingungen werden identisch, wenn man $p_1 = p_2 = \ldots = \frac{1}{2}$ setzt, d. h. wenn man jedem Winkel das halbe Gewicht einer Richtung giebt, was der schon zu Anfang erkannten Beziehung (3) entspricht.

Wir haben also erkannt, dass, wenn nur Winkelmessungen vorliegen, man zu gleichen Ergebnissen gelangt, gleichviel, ob man nach Winkeln oder nach Richtungen ausgleicht, und da die Winkelausgleichung einfacher ist, wird man dann wohl meistens bei derselben bleiben. Wenn aber in einem Satze mehr als 2 Richtungen vorkommen, so ist Winkelausgleichung unmöglich und es muss nach Richtungen, entsprechend der Minimumsbedingung (6), ausgeglichen werden.

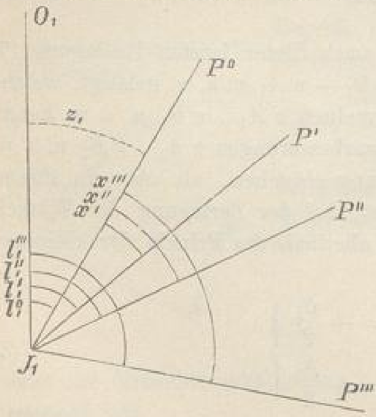
Richtungsmessungen haben noch das Eigentümliche, dass alle Ablesungen eines Satzes um eine beliebige Grösse verändert werden dürfen, wie folgendes Beispiel zeigt

Zielpunkt	Gemessene Richtungen	Reduktion auf $A = 0$	Reduktion auf $A = 57°\,37'\,3''$	
A	165° 46′ 12″	0° 0′ 0″	57° 37′ 3″	
B	205 45 37	39 59 25	97 36 28	(9)
C	286 54 20	121 8 8	178 45 11	

Die *Differenzen* der Richtungen, d. h. die Winkel, auf welche es bei trigonometrischen Berechnungen allein ankommt, bleiben immer dieselben, mag man die Originalablesungen benützen, oder dieselben auf einen Strahl = 0° 0′ 0″ reduzieren, oder einem Strahl seinen trigonometrischen Richtungswinkel als Richtung zuteilen, wie in der letzten Spalte der Zusammenstellung (9) angenommen ist.

§ 71. Strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze. (Bessels Methode.)

Fig. 1.
Richtungsmessungen. Satz 1.



Wenn mehrere unvollständige Sätze auf einer Station gemessen sind, wie etwa in dem Beispiel von § 69. S. 228, so ist es zunächst immer angenehm, wenn wenigstens *eine* Sicht in allen Sätzen vorkommt, damit man alle Sätze an diese eine Sicht etwa als Nullstrahl anhängen und alles übrige vorläufig ordnen kann. Indessen ist dieses nicht wesentlich; die streng theoretische Ausgleichung solcher unvollständiger Richtungssätze ist von solcher Ordnung auf einen gemeinsamen Anfangsstrahl unabhängig, und macht nur etwa zur Gewinnung erster Näherungen davon Gebrauch.

Auf einem ersten Beobachtungspunkt J_1 (Fig. 1.) wird ein Limbuskreis aufgestellt, dessen