Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 71. Strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

denn jede andere Verteilung würde eine grössere Quadratsumme $(v\,A_1)^2 + (v\,B_1)^2 + \ldots$ geben. Setzt man die Werte für $v\,A_1$, $v\,B_1$ u. s. w. von (8) in (6) und (7) ein, so wird:

$$\frac{1}{2}\,\delta_1^2 + \frac{1}{2}\,\delta_2^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{6*}$$

$$p_1\,\delta_1^2 + p_2\,\delta_2^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{7*}$$

Diese 2 Bedingungen werden identisch, wenn man $p_1 = p_2 = \ldots = \frac{1}{2}$ setzt, d. h. wenn man jedem Winkel das halbe Gewicht einer Richtung giebt, was der schon zu Anfang erkannten Beziehung (3) entspricht.

Wir haben also erkannt, dass, wenn nur Winkelmessungen vorliegen, man zu gleichen Ergebnissen gelangt, gleichviel, ob man nach Winkeln oder nach Richtungen ausgleicht, und da die Winkelausgleichung einfacher ist, wird man dann wohl meistens bei derselben bleiben. Wenn aber in einem Satze mehr als 2 Richtungen vorkommen, so ist Winkelausgleichung unmöglich und es muss nach Richtungen, entsprechend der Minimumsbedingung (6), ausgeglichen werden.

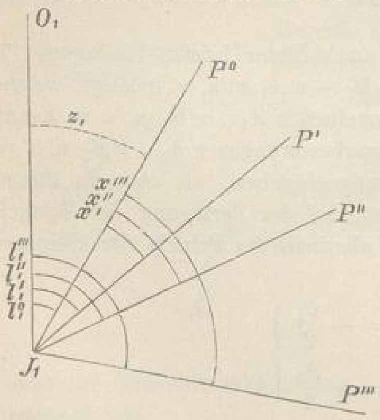
Richtungsmessungen haben noch das Eigentümliche, dass alle Ablesungen eines Satzes um eine beliebige Grösse verändert werden dürfen, wie folgendes Beispiel zeigt

Zielpunkt	Gemessene Richtungen	Reduktion auf $A = 0$	Reduktion auf $A = 57°\,37'\,3''$	
A	165° 46′ 12″	0° 0′ 0″	57° 37′ 3″	(9)
B	205 45 37	39 59 25	97 36 28	
C	286 54 20	121 8 8	178 45 11	

Die *Differenzen* der Richtungen, d. h. die Winkel, auf welche es bei trigonometrischen Berechnungen allein ankommt, bleiben immer dieselben, mag man die Originalablesungen benützen, oder dieselben auf einen Strahl = 0° 0′ 0″ reduzieren, oder einem Strahl seinen trigonometrischen Richtungswinkel als Richtung zuteilen, wie in der letzten Spalte der Zusammenstellung (9) angenommen ist.

§ 71. Strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze. (Bessels Methode.)

Fig. 1.
Richtungsmessungen. Satz 1.

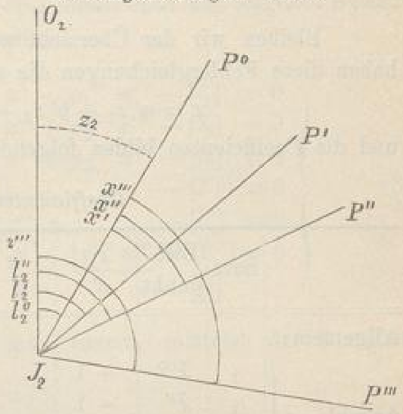


Wenn mehrere unvollständige Sätze auf einer Station gemessen sind, wie etwa in dem Beispiel von § 69. S. 228, so ist es zunächst immer angenehm, wenn wenigstens *eine* Sicht in allen Sätzen vorkommt, damit man alle Sätze an diese eine Sicht etwa als Nullstrahl anhängen und alles übrige vorläufig ordnen kann. Indessen ist dieses nicht wesentlich; die streng theoretische Ausgleichung solcher unvollständiger Richtungssätze ist von solcher Ordnung auf einen gemeinsamen Anfangsstrahl unabhängig, und macht nur etwa zur Gewinnung erster Näherungen davon Gebrauch.

Auf einem ersten Beobachtungspunkt J_1 (Fig. 1.) wird ein Limbuskreis aufgestellt, dessen

Nullhalbmesser die Lage $J_1\,O_1$ hat; und beim Einschneiden der geodätischen Strahlen $P^\circ\;P'\;P''\;P'''$ werden an dem Limbuskreisrand die Ablesungen $l_1^\circ\;l_1'\;l_1''\;l_1'''$ gemacht. Obgleich hiebei die Lage des Kreisnullhalbmessers $J_1\,O_1$ gegen die Zielstrahlen ohne alle geodätische Bedeutung ist, muss doch ein Winkel z_1, welcher den Nullhalbmesser $J_1\,O_1$ gegen einen der genannten Strahlen festlegt, mit in Rechnung genommen werden.

Fig. 2.
Richtungsmessungen. Satz 2.



Alles dieses wird mit verstelltem Limbus wiederholt, wie in Fig. 2. angedeutet ist; und indem wir nun die Sätze mit $_{1\;2\;3}\ldots$ numerieren, die Zielpunkte aber, und alles, was sich darauf bezieht, mit $^{\circ}\;'\;''\;'''\ldots$ unterscheiden, haben wir folgende Übersicht:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\text{Satz}_1 & l_1^\circ & l_1' & l_1'' & l_1''' & \ldots & z_1 \\
\text{Satz}_2 & l_2^\circ & l_2' & l_2'' & l_2''' & \ldots & z_2 \\
\text{Satz}_3 & l_3^\circ & l_3' & l_3'' & l_3''' & \ldots & z_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\text{Satz}_n & l_n^\circ & l_n' & l_n'' & l_n''' & \ldots & z_n
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Gewichte der Beobachtungen sollen entsprechend durch $p_1^\circ\;p_1'\;p_1''\ldots$ bezeichnet werden; es sind zwar gewöhnlich alle Gewichte der Beobachtungen auf einer Station einander gleich, es ist aber die allgemeine Einführung von Gewichten dennoch nötig, damit man das Ausfallen einzelner Beobachtungen mathematisch ausdrücken kann. Wenn z. B. im zweiten Satz der Zielpunkt P''' fehlt, so ist $p_2''' = 0$.

Durch die Ausgleichung werden allen Messungen Verbesserungen zugeteilt, welche mit v bezeichnet werden sollen; wir haben also ausser (1) noch folgende Bezeichnungen festgestellt:

$$\begin{array}{lllllllll}
 & \text{Gewichte:} & & & & \text{Verbesserungen:} & & & \\
\text{Satz}_1 & p_1^\circ & p_1' & p_1'' & p_1''' & v_1^\circ & v_1' & v_1'' & v_1''' \\
\text{Satz}_2 & p_2^\circ & p_2' & p_2'' & p_2''' & v_2^\circ & v_2' & v_2'' & v_2''' \\
\text{Satz}_3 & p_3^\circ & p_3' & p_3'' & p_3''' & v_3^\circ & v_3' & v_3'' & v_3'''
\end{array} \quad (2)$$

Die Beobachtungswerte l sind Richtungen. Man kann dieselben in jedem einzelnen Satz als Winkel betrachten, welche die Strahlen nach $P^\circ\;P'\;P''\;P'''$ mit einem gemeinschaftlichen aber unbekannten Anfangsstrahl nach O bilden. Diese Beobachtungen l sind gemacht worden zur Bestimmung derjenigen Winkel, welche die Strahlen $P^\circ\;P'\;P''\;P'''$ unter sich bilden, und da diese 4 Strahlen durch 3 Winkel gegenseitig festgelegt sind, so führen wir als unabhängige Unbekannte folgende Winkel ein:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Winkel } P^\circ P' = x' \\
\text{Winkel } P^\circ P'' = x'' \\
\text{Winkel } P^\circ P''' = x'''
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Es ist hiebei unwesentlich, dass diese Winkel einen Strahl, nämlich P° gemeinsam haben, man *könnte* auch z. B. die 3 Winkel $P^\circ P'$, $P'P''$, $P''P'''$ als unabhängige Unbekannte einführen.

Nun kann zur Aufstellung der Fehlergleichungen geschritten werden. Z. B. für die Messung l_2''' hat man nach Fig. 2.: Es soll sein $l_2''' = z_2 + x'''$, also mit Zufügung der Verbesserung v_2''':

$$l_2''' + v_2''' = z_2 + x'''$$

oder Fehlergleichung: $$v_2''' = z_2 + x''' - l_2'''$$

Das ganze System dieser Gleichungen ist:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l}
\text{Satz}_1 & v_1{}^\circ = z_1 - l_1{}^\circ & v_1' = z_1 + x' - l_1' & v_1'' = z_1 + x'' - l_1'' & v_1''' = z_1 + x''' - l_1''' \\
\text{Satz}_2 & v_2{}^\circ = z_2 - l_2{}^\circ & v_2' = z_2 + x' - l_2' & v_2'' = z_2 + x'' - l_2'' & v_2''' = z_2 + x''' - l_2''' \\
\text{Satz}_3 & v_3{}^\circ = z_3 - l_3{}^\circ & v_3' = z_3 + x' - l_3' & v_3'' = z_3 + x'' - l_3'' & v_3''' = z_3 + x''' - l_3''' \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Bleiben wir der Übersicht wegen bei 3 Sätzen und 4 Zielpunkten stehen, so haben diese Fehlergleichungen die allgemeine Form:

$$v = a' z_1 + b' z_2 + c' z_3 + a x' + b x'' + c x''' + l \quad (5)$$

und die Coefficienten bilden folgende Tabelle:

Coefficienten der Fehlergleichungen:

	Satz	Ziel-punkt	z_1 a'	z_2 b'	z_3 c'	x' a	x'' b	x''' c	l	p
Allgemein:										
Anzahl $= s$	1	P°	$+1$						$-l_1{}^\circ$	$p_1{}^\circ$
	1	P'	$+1$			$+1$			$-l_1'$	p_1'
	1	P''	$+1$				$+1$		$-l_1''$	p_1''
	1	P'''	$+1$					$+1$	$-l_1'''$	p_1'''
Anzahl $= s$	2	P°		$+1$					$-l_2{}^\circ$	$p_2{}^\circ$
	2	P'		$+1$		$+1$			$-l_2'$	p_2'
	2	P''		$+1$			$+1$		$-l_2''$	p_2''
	2	P'''		$+1$				$+1$	$-l_2'''$	p_2'''
Anzahl $= s$	3	P°			$+1$				$-l_3{}^\circ$	$p_3{}^\circ$
	3	P'			$+1$	$+1$			$-l_3'$	p_3'
	3	P''			$+1$		$+1$		$-l_3''$	p_3''
	3	P'''			$+1$			$+1$	$-l_3'''$	p_3'''
			Anzahl $= n$			Anzahl $= s - 1$				$[p]$ (6)

Vor Bildung der Normalgleichungen wollen wir folgende Summenbezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{array}{l}
p_1{}^\circ + p_1' + p_1'' + p_1''' \ldots = [p_1] \\
p_2{}^\circ + p_2' + p_2'' + p_2''' \ldots = [p_2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_1' + p_2' + p_3' + \ldots = [p'] \\
p_1'' + p_2'' + p_3'' + \ldots = [p''] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (7)$$

dabei ist $[p_1] + [p_2] + [p_3] + \ldots = [p^\circ] + [p'] + [p''] + \ldots = [p]$

Indem wir annehmen, dass alle Sätze *einzeln* aufgeführt sind (ohne Zusammenfassung gleichartiger Sätze) ist $[p] = R$ gleich der Anzahl aller eingeschnittenen Richtungen.

Der erste quadratische Normalgleichungs-Coefficient wird nach der Tabelle (6):

$$p_1{}^\circ\, 1^2 + p_1'\, 1^2 + p_1''\, 1^2 + p_1'''\, 1^2 = p_1{}^\circ + p_1' + p_1'' + p_1''' = [p_1]$$

und die erste Normalgleichung wird:

$$[p_1]\, z_1 + 0\, z_2 + 0\, z_3 + p_1'\, x' + p_1''\, x'' + p_1'''\, x''' - [p_1\, l_1] = 0$$

Wenn die Gewichte p alle an und für sich gleich, nämlich $= 1$ sind, so ist es in den Verbindungen mit l nicht nötig, die Gewichte p überhaupt zu schreiben, denn es ist $[p_1 l_1] = p_1{}^\circ l_1{}^\circ + p_1' l_1' + p_1'' l_1'' + p_1''' l_1'''$, d. h. die Summe aller derjenigen l, welche mit der Nummer $_1$ überhaupt vorkommen, und das kann man kürzer auch durch $[l_1]$ ausdrücken. Auf diese Weise erhält man das folgende System der Normalgleichungen in ausführlicher Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{llllll}
\underline{[p_1]\,z_1} & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & + p_1'\,x' + p_1''\,x'' + p_1'''\,x''' & -[l_1] & = 0 \\
\cdot\ \cdot & \underline{[p_2]\,z_2} & \cdot\ \cdot & + p_2'\,x' + p_2''\,x'' + p_2'''\,x''' & -[l_2] & = 0 \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \underline{[p_3]\,z_3} & + p_3'\,x' + p_3''\,x'' + p_3'''\,x''' & -[l_3] & = 0 \\
p_1'\ z_1 & + p_2'\ z_2 & + p_3'\ z_3 & + \underline{[p']\,x'} + \cdot\ \cdot\ \quad \cdot\ \cdot & -[l'] & = 0 \\
p_1''\ z_1 & + p_2''\ z_2 & + p_3''\ z_3 & \cdot\ \cdot\quad \underline{[p'']\,x''} + \cdot\ \cdot & -[l''] & = 0 \\
p_1'''\ z_1 & + p_2'''\ z_2 & + p_3'''\ z_3 & \cdot\ \cdot\qquad \cdot\ \cdot\ \underline{[p'''\,x''} & -[l'''] & = 0 \\
 & & & & \underline{[ll]} &
\end{array}\right\} \quad (8$$

Da viele Coefficienten ausfallen, kann man zuerst, mittelst der 3 ersten Gleichungen, $z_1\ z_2\ z_3$ in $x'\ x''\ x'''$ ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
-z_1 &= \frac{p_1'\,x' + p_1''\,x'' + p_1'''\,x''' - [l_1]}{[p_1]} \\
-z_2 &= \frac{p_2'\,x' + p_2''\,x'' + p_2'''\,x''' - [l_2]}{[p_2]} \\
-z_3 &= \frac{p_3'\,x' + p_3''\,x'' + p_3'''\,x''' - [l_3]}{[p_3]}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Setzt man diese Ausdrücke (9) in die 3 letzten Gleichungen (8), so bekommt man ein reduziertes Normalgleichungssystem, welches nur noch die Unbekannten $x'\ x''\ x'''$ enthält. Dasselbe System bekommt man auch, wenn man die Gleichungen (8) allmählich nach dem Schema S. 61 der Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$ u. s. f. reduziert; die erste so reduzierte Gleichung ist:

$$\left([p_2] - \frac{0}{[p_1]}\,0\right) z_2 + \left(0 - \frac{0}{[p_1]}\,0\right) z_3 + \left(p_2' - \frac{0}{[p_1]}\,p_1'\right) x' + \ldots = 0$$

d. h. die mit $[p_2]\,z_2$ anfangende zweite Gleichung der Gruppe (8) bleibt bei der ersten Reduktion unverändert.

Ebenso ist es mit der dritten Gleichung von (8). Die vierte Gleichung von (8) giebt bei der ersten Reduktion:

$$\left([p'] - \frac{p_1'}{[p_1]}\,p_1'\right) x' + \left(0 - \frac{p_1'}{[p_1]}\,p_1''\right) x'' + \left(0 - \frac{p_1'}{[p_1]}\,p_1'''\right) x''' - \left([l'] - \frac{p_1'}{[p_1]}\,[l_1]\right) = 0$$

Verfolgt man dieses Alles zu Ende, so erhält man ein System von folgender Form in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{r}
\underline{(a\,a)\,x'} + (a\,b)\,x'' + (a\,c)\,x''' + (a\,l) = 0 \\
\underline{(b\,b)\,x''} + (b\,c)\,x''' + (b\,l) = 0 \\
\underline{(c\,c)\,x'''} + (c\,l) = 0 \\
\underline{(l\,l)}\qquad\quad
\end{array}\right\} \quad 10)$$

Die Coefficienten haben folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned}
(a\,a) &= [p'] - \frac{p_1'}{[p_1]}p_1' - \frac{p_2'}{[p_2]}p_2' - \frac{p_3'}{[p_3]}p_3' - \dots \\
-(a\,b) &= \frac{p_1'}{[p_1]}p_1'' + \frac{p_2'}{[p_2]}p_2'' + \frac{p_3'}{[p_3]}p_3'' + \dots \\
-(a\,c) &= \frac{p_1'}{[p_1]}p_1''' + \frac{p_2'}{[p_2]}p_2''' + \frac{p_3'}{[p_3]}p_3''' + \dots \\
(b\,b) &= [p''] - \frac{p_1''}{[p_1]}p_1'' - \frac{p_2''}{[p_2]}p_2'' - \frac{p_3''}{[p_3]}p_3'' - \dots \\
-(b\,c) &= \frac{p_1''}{[p_1]}p_1''' + \frac{p_2''}{[p_2]}p_2''' + \frac{p_3''}{[p_3]}p_3''' + \dots \\
(c\,c) &= [p'''] - \frac{p_1'''}{[p_1]}p_1''' - \frac{p_2'''}{[p_2]}p_2''' - \frac{p_3'''}{[p_3]}p_3'''
\end{aligned}\right| \quad (11$$

Die Absolutglieder sind:

$$\left.\begin{aligned}
-(a\,l) &= [l'] - \frac{p_1'}{[p_1]}[l_1] - \frac{p_2'}{[p_2]}[l_2] - \frac{p_3'}{[p_3]}[l_3] - \dots \\
-(b\,l) &= [l''] - \frac{p_1''}{[p_1]}[l_1] - \frac{p_2''}{[p_2]}[l_2] - \frac{p_3''}{[p_3]}[l_3] - \dots \\
-(c\,l) &= [l'''] - \frac{p_1'''}{[p_1]}[l_1] - \frac{p_2'''}{[p_2]}[l_2] - \frac{p_3'''}{[p_3]}[l_3] - \dots
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Endlich das Fehlerquadrat-Summenglied:

$$(l\,l) = [l\,l] - \frac{[l_1]^2}{[p_1]} - \frac{[l_2]^2}{[p_2]} - \frac{[l_3]^2}{[p_3]} - \dots \quad (13)$$

Bei den Coefficienten (11) und den Absolutgliedern (12) können alle gleichartigen Sätze zusammengefasst werden, dagegen bei (13) müssen alle Ablesungen *einzeln* behandelt werden. Das System (10) wird nun wie gewöhnlich weiter behandelt (vgl. § 25.), und giebt sowohl die Unbekannten x' x'' x''', als auch alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w., und die Fehlerquadratsumme:

$$[v\,v] = (l\,l\,.\,3) \quad (14)$$

aus welcher das mittlere Fehlerquadrat berechnet wird:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{R - n - (s-1)} \quad (15)$$

Um den Nenner $R - n - (s-1)$ zu verstehen, muss man nach (6) überlegen, dass R die Anzahl aller eingeschnittenen Richtungen ist, n die Anzahl der Sätze und s die Anzahl der Zielpunkte. Damit ist auch n die Anzahl der Nullpunkts-Korrektionen $z_1\ z_2 \dots z_n$ und bei s Strahlen ist $s-1$ die Anzahl der unabhängigen unbekannten Winkel x' x'' x''' ... also $n + (s-1)$ die Anzahl aller Unbekannten, woraus bei R Beobachtungen, nach dem Satze (19) § 27. S. 87 der Nenner $n - u$ $= R - (n + (s-1))$ in (15) folgt.

Indem wir zu einem Zahlenbeispiel übergehen, bemerken wir, dass man unter $l°$ l' l'' u. s. w. nicht die vollen Winkelablesungen zu verstehen braucht, sondern dass man die Grade, Minuten und beliebige Sekunden ein für allemal absondern darf. So haben wir bei dem folgenden Beispiel S. 238, welches aus der „Gradmessung in Ostpreussen" S. 101 und 102 ausgewählt ist, bei l' und l'' bzw. 26° 14′ 50″ und 87° 4′ 50″ vorn abgesondert.

Nach den Formeln (11) und nach dem Anblick der Tabelle S. 238 bildet man die Coefficienten:

$$(a\,a) = 31 - \frac{0^2}{24} - \frac{19^2}{38} - \frac{12^2}{36} = +17{,}500$$
$$-(a\,b) = \frac{0}{24}\,12 + \frac{19}{38}\,0 + \frac{12}{36}\,12 = +\ 4{,}000$$
$$(b\,b) = 24 - \frac{12^2}{24} - \frac{0^2}{38} - \frac{12^2}{36} = +14{,}000$$

und nach den Formeln (12) die Absolutglieder:

$$-(a\,l) = 68{,}25 - \frac{0}{24}\,37{,}25 - \frac{19}{38}\,48{,}50 - \frac{12}{36}\,53{,}25 = +26{,}250$$
$$-(b\,l) = 70{,}75 - \frac{12}{24}\,37{,}25 - \frac{0}{38}\,48{,}50 - \frac{12}{36}\,53{,}25 = +34{,}375$$

Dieses ist die unmittelbare Anwendung der Formeln (11) und (12), man wird sich aber bald gewöhnen, nach dem Anblick der Tabelle S. 238 kürzer so schreiben:

$$(a\,a) = 31 - \frac{0}{2}\,0 - \frac{1}{2}\,19 - \frac{1}{3}\,12 = +17{,}500$$
$$-(a\,b) = \frac{0}{2}\,12 + \frac{1}{2}\,0 + \frac{1}{3}\,12 = +\ 4{,}000$$
$$(b\,b) = 24 - \frac{1}{2}\,12 - \frac{0}{2}\,0 - \frac{1}{3}\,12 = +14{,}000$$

Das Fehlersummenglied wird nach (13) so berechnet:

$$(l\,l) = 496{,}43 - \frac{165{,}68}{2} - \frac{168{,}73}{2} - \frac{285{,}42}{3} = 234{,}09$$

Die Normalgleichungen sind also in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{rrr} +\underline{17{,}50\,x'} - & 4{,}00\,x'' - & 26{,}25 = 0 \\ & +\underline{14{,}00\,x''} - & 34{,}37 = 0 \\ & & +\underline{234{,}09} \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Wenn man hier nach § 25. S. 82 einmal reduziert, so erhält man:

$$\begin{array}{rr} +\underline{13{,}086\,x''} - & 40{,}370 = 0 \\ & +\underline{194{,}72} \\ & \underline{70{,}18} = [v\,v] \end{array}$$

also $x'' = +\frac{40{,}370}{13{,}086} = +2{,}205$ und zugleich $[\beta\,\beta] = \frac{1}{13{,}086} = 0{,}0764$

Kehrt man die Eliminationsordnung um, so bekommt man auch x' und $[\alpha\,\alpha]$.

Die Auflösung der Normalgleichungen (16) giebt also zunächst:

$$x' = +2{,}205 \qquad x'' = +3{,}085 \qquad (17)$$
$$[v\,v] = 70{,}2 \qquad (18)$$

Fügt man diese x' und x'' von (18) zu den Näherungsannahmen für Gilge und Lattenwalde hinzu, welche oben in der Tabelle auf S. 238 angegeben sind, so hat man die auf der Station Nidden ausgeglichenen Winkel:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Kalleninken-Gilge} & = 26^\circ\,14'\,50'' + x' = 26^\circ\,14'\,52{,}205'' \\ \text{Kalleninken-Lattenwalde} & = 87^\circ\ \ 4'\,50'' + x'' = 87^\circ\ \ 4'\,53{,}085'' \end{array}\right\} \qquad (19)$$

Wir brauchen auch noch die Gewichts-Coefficienten der Normalgleichungen (16) und können dazu irgend eines der Verfahren von § 28. oder § 33. benützen. Den

Station Nidden.

Quer-Summen $[p_q]$		Kalle-ninken l°	*a* Gilge l'	*b* Latten-walde l''	$l^\circ + l' + l'' = [l_q]$	l'^2	l''^2	$[l_q]^2$
		0°0′00″	26°14′50″	87°4′50″				
	2	+ 0,00″		+ 5,00″	5,00		25,00	25,00
	2	0,00		5,75	5,75		33,06	33,06
	2	0,00		5,50	5,50		30,25	30,25
	2	0,00		7,00	7,00		49,00	49,00
	2	0,00		2,00	2,00		4,00	4,00
12	2	0,00		2,75	2,75		7,56	7,56
	2	0,00		1,50	1,50		2,25	2,25
	2	0,00		2,50	2,50		6,25	6,25
	2	0,00		0,50	0,50		0,25	0,25
	2	0,00		1,75	1,75		3,06	3,06
	2	0,00		1,00	1,00		1,00	1,00
	2	0,00		2,00	2,00		4,00	4,00
				37,25	37,25		165,68	165,68
$[p_1] = 24$		(12)	(0)	(12)				
	2	+ 0,00	+ 4,25		4,25	18,06		18,06
	2	0,00	3,00		3,00	9,00		9,00
	2	0,00	0,75		0,75	0,56		0,56
	2	0,00	3,50		3,50	12,25		12,25
	2	0,00	4,00		4,00	16,00		16,00
	2	0,00	2,50		2,50	6,25		6,25
	2	0,00	1,25		1,25	1,56		1,56
	2	0,00	4,50		4,50	20,25		20,25
	2	0,00	3,00		3,00	9,00		9,00
19	2	0,00	6,00		6,00	36,00		36,00
	2	0,00	1,75		1,75	3,06		3,06
	2	0,00	2,75		2,75	7,56		7,56
	2	0,00	2,25		2,25	5,06		5,06
	2	0,00	0,00		0,00	0,00		0,00
	2	0,00	2,00		2,00	4,00		4,00
	2	0,00	1,75		1,75	3,06		3,06
	2	0,00	0,25		0,25	0,06		0,06
	2	0,00	1,00		1,00	1,00		1,00
	2	0,00	4,00		4,00	16,00		16,00
			48,50		48,50	168,73		168,73
$[p_2] = 38$		(19)	(19)	(0)				
	3	0,00	+ 0,00	+ 2,75	2,75	0,00	7,56	7,56
	3	0,00	3,50	2,75	6,25	12,25	7,56	39,06
	3	0,00	1,25	3,00	4,25	1,56	9,00	18,06
	3	0,00	3,25	4,75	8,00	10,56	22,56	64,00
	3	0,00	2,25	3,75	6,00	5,06	14,06	36,00
	3	0,00	3,75	3,25	7,00	14,06	10,56	49,00
12	3	0,00	− 0,25	1,25	1,00	0,06	1,56	1,00
	3	0,00	1,25	1,75	3,00	1,56	3,06	9,00
	3	0,00	2,25	1,00	3,25	5,06	1,00	10,56
	3	0,00	0,50	2,25	2,75	0,25	5,06	7,56
	3	0,00	1,00	4,75	5,75	1,00	22,56	33,06
	3	0,00	1,00	2,25	3,25	1,00	5,06	10,56
			19,75	33,50	53,25	52,42	109,60	285,42
$[p_3] = 36$		(12)	(12)	(12)	s. o.	168,73	165,68	
$[p] = 98$		$[p^\circ] = 43$	$[p'] = 31$ $[l'] = 68,25$	$[p''] = 24$ $[l''] = 70,75$		496,43		

einen Wert $[\beta\,\beta] = 0{,}0764$ haben wir schon gelegentlich bei (16) gefunden. Um alle Gewichts-Coefficienten zusammen zu erhalten, verfährt man etwa nach (20) S. 90, d. h. man bildet aus unseren Normalgleichungen (16) die folgenden (voll ausgeschriebenen) Gewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rl|rl} +17{,}50\,[\alpha\,\alpha] - 4{,}00\,[\alpha\,\beta] &= 1 & +17{,}50\,[\alpha\,\beta] - 4{,}00\,[\beta\,\beta] &= 0 \\ -4{,}00\,[\alpha\,\beta] + 14{,}00\,[\alpha\,\beta] &= 0 & -4{,}00\,[\alpha\,\beta] + 14{,}00\,[\beta\,\beta] &= 1 \end{array}\right\} \quad (20)$$

daraus erhält man die Gewichts-Coefficienten

$$[\alpha\,\alpha] = +0{,}0611 \qquad \left.\begin{array}{l}[\alpha\,\beta] = +0{,}0175 \\ [\beta\,\beta] = +0{,}0764\end{array}\right\} \quad (21)$$

Der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung wird nach (15) und (18):

$$m = \sqrt{\frac{70{,}2}{98-43-2}} = \sqrt{\frac{70{,}2}{53}} = \pm 1{,}15'' \quad (22)$$

Damit ist die Stationsausgleichung Nidden erledigt.

Die im Vorstehenden behandelte Stationsausgleichung ist zuerst von Bessel in der „Gradmessung in Ostpreussen" 1838, S. 69—71 gelehrt worden, jedoch ohne die Berechnung des Fehlerquadratsummengliedes und des mittleren Fehlers nach den Formeln (13)—(15), welche erst später dazu gekommen sind.

Bessel hat auf S. 70 der Gradmessung in Ostpreussen statt unserer l die Bezeichnungen m, m_1', m_2' u. s. w., und statt unserer z_1, z_2, z_3 die Zeichen x, x_1, x_2 u. s. w., ferner entsprechen unseren x', x'', x''' die Bessel schen A, B, C. Unsere z_1, z_2, z_3 stehen in einer gewissen Beziehung zu derjenigen Grösse, welche auf S. 134 der Gradmessung in Ostpreussen von Bessel mit z bezeichnet ist, vgl. hiezu unseren späteren § 74.

Die Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ haben wir hier nur aus der Elimination im Anschluss an (16) bestimmt, was sehr einfach geht, und z. B. bei der Landesaufnahme, in der Zeit dieser Methode, immer so gemacht wurde; man kann aber auch, was eine durchschlagende Probe giebt, ausserdem alle v einzeln ausrechnen, wozu die z nach (9) erforderlich sind. Die Einzelausrechnung und Quadrierung aller v findet man angewendet in dem Rheinischen Dreiecksnetz des geodätischen Instituts Heft III, 1882, vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 73.

§ 72. Dreiecksnetz-Ausgleichung nach Bessels Methode.

Wir schneiden aus dem Netz der Gradmessung in Ostpreussen das in Fig. 1. gezeichnete Viereck mit zwei Diagonalen heraus, und wählen von den Originalmessungen der Gradmessung in Ostpreussen diejenigen aus, welche sich auf dieses Viereck beziehen. (Die Messungen in Kalleninken sind mit einem schwächeren Instrument gemacht, als die Messungen auf Nidden, Lattenwalde und Gilge; da es sich aber hier nur um ein einfaches Rechenbeispiel handelt, so werden wir von diesem Unterschiede absehen, und alle Originalmessungen als gleichberechtigt in die Ausgleichung einführen.)

Fig. 1.
Viereck der Gradmessung in Ostpreussen.