Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 72. Dreiecksnetz-Ausgleichung nach Bessels Methode

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

einen Wert $[\beta\,\beta] = 0{,}0764$ haben wir schon gelegentlich bei (16) gefunden. Um alle Gewichts-Coefficienten zusammen zu erhalten, verfährt man etwa nach (20) S. 90, d. h. man bildet aus unseren Normalgleichungen (16) die folgenden (voll ausgeschriebenen) Gewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} +17{,}50\,[\alpha\,\alpha] - 4{,}00\,[\alpha\,\beta] = 1 & \qquad +17{,}50\,[\alpha\,\beta] - 4{,}00\,[\beta\,\beta] = 0 \\ -4{,}00\,[\alpha\,\beta] + 14{,}00\,[\alpha\,\beta] = 0 & \qquad -4{,}00\,[\alpha\,\beta] + 14{,}00\,[\beta\,\beta] = 1 \end{array}\right\} \quad (20)$$

daraus erhält man die Gewichts-Coefficienten

$$[\alpha\,\alpha] = +\,0{,}0611 \qquad \left.\begin{array}{l} [\alpha\,\beta] = +\,0{,}0175 \\ [\beta\,\beta] = +\,0{,}0764 \end{array}\right\} \quad (21)$$

Der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung wird nach (15) und (18):

$$m = \sqrt{\frac{70{,}2}{98 - 43 - 2}} = \sqrt{\frac{70{,}2}{53}} = \pm\,1{,}15'' \quad (22)$$

Damit ist die Stationsausgleichung Nidden erledigt.

Die im Vorstehenden behandelte Stationsausgleichung ist zuerst von Bessel in der „Gradmessung in Ostpreussen" 1838, S. 69—71 gelehrt worden, jedoch ohne die Berechnung des Fehlerquadratsummengliedes und des mittleren Fehlers nach den Formeln (13)—(15), welche erst später dazu gekommen sind.

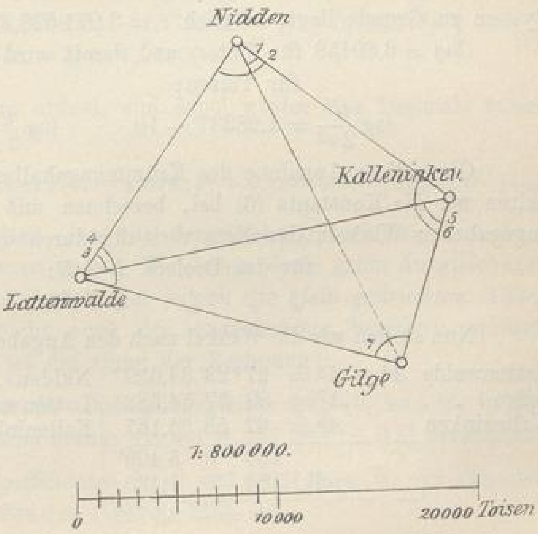
Bessel hat auf S. 70 der Gradmessung in Ostpreussen statt unserer l die Bezeichnungen m, m_1', m_2' u. s. w., und statt unserer z_1, z_2, z_3 die Zeichen x, x_1, x_2 u. s. w., ferner entsprechen unseren x', x'', x''' die Bessel schen A, B, C. Unsere z_1, z_2, z_3 stehen in einer gewissen Beziehung zu derjenigen Grösse, welche auf S. 134 der Gradmessung in Ostpreussen von Bessel mit z bezeichnet ist, vgl. hiezu unseren späteren § 74.

Die Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ haben wir hier nur aus der Elimination im Anschluss an (16) bestimmt, was sehr einfach geht, und z. B. bei der Landesaufnahme, in der Zeit dieser Methode, immer so gemacht wurde; man kann aber auch, was eine durchschlagende Probe giebt, ausserdem alle v einzeln ausrechnen, wozu die z nach (9) erforderlich sind. Die Einzelausrechnung und Quadrierung aller v findet man angewendet in dem Rheinischen Dreiecksnetz des geodätischen Instituts Heft III, 1882, vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 73.

§ 72. Dreiecksnetz-Ausgleichung nach Bessels Methode.

Wir schneiden aus dem Netz der Gradmessung in Ostpreussen das in Fig. 1. gezeichnete Viereck mit zwei Diagonalen heraus, und wählen von den Originalmessungen der Gradmessung in Ostpreussen diejenigen aus, welche sich auf dieses Viereck beziehen. (Die Messungen in Kalleninken sind mit einem schwächeren Instrument gemacht, als die Messungen auf Nidden, Lattenwalde und Gilge; da es sich aber hier nur um ein einfaches Rechenbeispiel handelt, so werden wir von diesem Unterschiede absehen, und alle Originalmessungen als gleichberechtigt in die Ausgleichung einführen.)

Fig. 1.
Viereck der Gradmessung in Ostpreussen.



Die Beobachtungen und die Ausgleichung für die Station Nidden haben wir bereits im vorigen § 71. behandelt; für die übrigen Stationen geben wir die Originalmessungen nicht mehr, sondern nur die Ergebnisse der Stationsausgleichungen; es sind dieses zuerst die ausgeglichenen Winkel und dann die Gewichts-Coefficienten:

Station Nidden.	Winkel.	Gewichts-Coefficienten.		
Kalleninken—Gilge . .	$A^1 = 26°14'52{,}205''$	$[\alpha\alpha] = +0{,}0611$	$[\alpha\beta] = +0{,}0175$	(1)
Kalleninken—Lattenwalde	$A^2 = 87\ \ 4\ 53{,}085$		$[\beta\beta] = +0{,}0764$	
Station Lattenwalde.				
Nidden—Kalleninken . .	$A^3 = 45°25'28{,}827''$	$[\alpha\alpha] = +0{,}1431$	$[\alpha\beta] = +0{,}0745$	(2)
Nidden—Gilge	$A^4 = 72\ 48\ 53{,}486$		$[\beta\beta] = +0{,}0805$	
Station Kalleninken.				
Gilge—Lattenwalde . .	$A^5 = 62°58'36{,}167''$	$[\alpha\alpha] = +0{,}1667$	$[\alpha\beta] = +0{,}0833$	(3)
Gilge—Nidden	$A^6 = 110\ 28\ 23{,}667$		$[\beta\beta] = +0{,}1667$	
Station Gilge.				
Lattenwalde—Kalleninken	$A^7 = 89°37'54{,}583$	$[\alpha\alpha] = +0{,}3333$		(4)

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist nach den allgemeinen Regeln von § 58. leicht anzugeben; man hat:

$W = 7$ Winkel,
$p = 4$ Punkte,
$l = 6$ Linien, darunter $l' = 1$ einseitig gemessene Linie, also nach (12) § 58. S. 174

$l - 2p + 3 = 1$ Seitengleichung,
$l - l' - p + 1 = 2$ Dreiecksgleichungen,
$W - 2p + 4 = 3$ Gleichungen im Ganzen.

Als Grundlinie wählen wir nach S. 168 der „Gradmessung in Ostpreussen" die Seite:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nidden—Lattenwalde} = 14\,047{,}7228 \text{ Toisen} = 27\,379{,}522 \text{ Meter} \\ \qquad (log = 4.147\,6059{\cdot}3) \quad (log = 4.437\,4258{\cdot}6) \end{array}\right\} \quad (5)$$

Als Krümmungshalbmesser zur Excessberechnung nimmt Bessel auf S. 253 der Gradmessung in Ostpreussen den Äquatorhalbmesser der Erde, welcher dem metrischen System zu Grunde liegt, nämlich $r = 3\,271\,628{,}89$ Toisen $= 6\,376\,522$ Meter. ($log = 6.80458$ für Meter) und damit wird:

$$\text{für Toisen:} \quad log\,\frac{\varrho''}{2\,r^2} = 1.98387 - 10 \qquad \text{für Meter:} \quad log\,\frac{\varrho''}{2\,r^2} = 1.40423 - 10 \quad (6)$$

Ohne diese Annahme des Krümmungshalbmessers hier weiter zu erörtern, behalten wir die Konstante (6) bei, berechnen mit der Basis (5) und den bei (1)—(4) angegebenen Winkeln das Netz vorläufig durch und finden die sphärischen Excesse:

für das Dreieck $L\,G\,K$: $\varepsilon = 1{,}430''$
„ „ „ $L\,N\,K$: $\varepsilon = 1{,}835''$

Nun stellen wir die Winkel nach den Angaben (1)—(4) in Dreiecken zusammen:

Lattenwalde	$A^4 - A^3 =$	$27°23'34{,}659''$	Nidden . .	$A^2 =$	$87°\ 4'53{,}085''$
Gilge . .	$A^7 =$	$89\ 37\ 54{,}583$	Lattenwalde	$A^3 =$	$45\ 25\ 23{,}827$
Kalleninken	$A^5 =$	$62\ 58\ 36{,}167$	Kalleninken	$A^6 - A^5 =$	$47\ 29\ 47{,}500$
		$180°\ 0'\ 5{,}409''$			$180°\ 0'\ 4{,}412''$
	soll	$180\ \ 0\ \ 1{,}430$		soll	$180\ \ 0\ \ 1{,}835$
		$w = +3{,}979''$			$w = +2{,}577''$ (7)

Indem wir die Winkelverbesserungen mit (1), (2), ... (7) bezeichnen, haben wir die (7) entsprechenden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(4)-(3)+(7)+(5)+3{,}979''=0 \\ (2)+(3)+(6)-(5)+2{,}577\ \ =0\end{array}\right\} \qquad (8)$$

Zur Bildung der Seitengleichung kann man für G als Centralpunkt die Seite GK auf zweifache Art aus GL ableiten, dieses giebt:

$$\text{Es soll sein } \frac{\sin A^4 \sin A^5 \sin A^1}{\sin(A^2-A^1)\sin A^6 \sin(A^4-A^3)}=1$$

was auf folgende logarithmische Rechnung führt:

			Diff. für 10″
$A^4 = 72°\,48'\,58{,}486''$	$\log\sin A^4$	9.980 1680·4	+ 65
$A^5 = 62\ \ 58\ \ 36{,}167''$	$\log\sin A^5$	9.949 7909·0	+ 107
$A^1 = 26\ \ 14\ \ 52{,}205''$	$\log\sin A^1$	9.645 6725·3	+ 427
	Summe Z	9.575 6314·7	
$A^2 - A^1 = 60°\,50'\ \ 0{,}880''$	$\log\sin(A^2-A^1)$	9.941 1176·2	+ 117
$A^6 = 110\ \ 28\ \ 23{,}667$	$\log\sin A^6$	9.971 6634·1	— 78
$A^4 - A^3 = 27\ \ 23\ \ 34{,}659$	$\log\sin(A^4-A^3)$	9.662 8434·6	+ 406
	Summe N	9.575 6244·9	

$$\text{Summe } Z - \text{Summe } N = w = +69{\cdot}8.$$

Damit wird die Seitengleichung für Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:

$$+0{,}65\,(4)+1{,}07\,(5)+4{,}27\,(1)-1{,}17\,(2-1)+0{,}78\,(6)-4{,}06\,(4-3)+6{,}98=0$$

Wenn man die Coefficienten mit den Cotangenten nach (26) § 57. S. 168 genauer berechnet, und auch das Absolutglied nach dem Legendreschen Satz kontroliert (vgl. (10) § 59. S. 197), so wird vorstehende Gleichung mit mehr Decimalen:

$$\left.\begin{array}{r}+0{,}6511\,(4)+1{,}0739\,(5)+4{,}2698\,(1)-1{,}1751\,(2-1)+0{,}7861\,(7) \\ -4{,}0630\,(4-3)+7{,}0100=0\end{array}\right\} \qquad (9)$$

Wenn man nach den Nummern ordnet, und dabei wieder eine Decimale fallen lässt, bekommt man:

$$+5{,}445\,(1)-1{,}175\,(2)+4{,}063\,(3)-3{,}412\,(4)+1{,}074\,(5)+0{,}786\,(6)+7{,}010=0 \qquad (10)$$

Nun ist alles so weit vorbereitet, dass die Ausgleichung nach der Formelanweisung von § 55. S. 156—160 beginnen kann. Wir haben diese ganze Ausgleichung in der Tabelle auf S. 244—245 vereinigt, wobei jedoch die *klein gedruckten Teile*, welche sich auf ein Funktions-Gewicht *nach* der Ausgleichung beziehen, vorerst ausser Betracht bleiben. Folgendes ist der Gang der Rechnung:

I. Man setzt die Coefficienten der Bedingungsgleichungen (9) und (8) in die Tabelle S. 244. Diese Coefficienten sind ebenso wie auf S. 157 mit $A\,B\,C$ bezeichnet.

II. Man setzt die Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ und $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. von (1)—(4) S. 240 ebenfalls tabellarisch auf S. 244 ein (vgl. S. 158).

III. Die Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ u. s. w. werden nach den Formeln von S. 158 berechnet, z. B.:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= A_1[\alpha\alpha] + A_2[\alpha\beta] + A_3[\alpha\gamma] + \ldots\\ &= 5{,}445 \times 0{,}0611 - 1{,}175 \times 0{,}0175\\ &= 0{,}3327 - 0{,}0206 = +\,0{,}3121.\end{aligned}$$

IV. Ausrechnung der Normalgleichungs-Coefficienten [I I] u. s. w. nach S. 158, z. B.:

$$\begin{aligned}[\mathrm{I\,I}] = [A\,\mathfrak{A}] &= +\,5{,}445 \times 0{,}3121\\ &\quad -\,1{,}175 \times 0{,}0053\\ &\quad +\;.\;.\;.\;.\;.\;.\ \text{zusammen} = +\,3{,}3628.\end{aligned}$$

$$[\mathrm{I\,II}] = [A\,\mathfrak{B}] \text{ oder } = [\mathfrak{A}\,B], \text{ mit Probe } = -\,0{,}0544 \text{ u. s. w.}$$

So erhält man die Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned}+\,\underline{\underline{3{,}3628\,k_1}} - 0{,}0544\,k_2 + 0{,}3084\,k_3 + 7{,}010 &= 0\\ +\,\underline{\underline{0{,}5745\,k_2}} - 0{,}1519\,k_3 + 3{,}979 &= 0\\ +\,\underline{\underline{0{,}3861\,k_3}} + 2{,}577 &= 0\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Auflösung, welche bei IV. S. 245 in zwei Reduktionen angedeutet ist, giebt die Korrelaten:

$$\text{V.} \qquad k_1 = -\,1{,}384 \qquad k_2 = -\,9{,}520 \qquad k_3 = -\,9{,}313 \tag{12}$$

und nebenbei auch die Fehlerquadratsumme des Netzes:

$$\text{V.} \qquad [\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}] = 71{,}5863 \tag{13}$$

Die Korrelaten k setzt man auf S. 244 nach III. hinauf und hat dann die Winkelkorrektionen nach S. 159 unmittelbar, z. B.:

$$\begin{aligned}\text{VI.} \qquad (1) &= \mathfrak{A}_1\,k_1 + \mathfrak{B}_1\,k_2 + \mathfrak{C}_1\,k_3\\ (1) &= -\,0{,}3121 \times 1{,}384 \;\ldots - 0{,}0175 \times 9{,}313\\ (1) &= -\,0{,}4319 - 0{,}1630 = -\,0{,}5949''\end{aligned} \tag{14}$$

Zur Probe kann man auch die Hilfsgrössen [1] [2] u. s. w. benützen, z. B. nach S. 159:

$$\text{VII.} \quad [1] = A_1\,k_1 + B_1\,k_2 + \ldots = 5{,}445\,(-\,1{,}384) = -\,7{,}5358$$

Diese [1] [2] u. s. w. sind auf S. 244 als VII. oben unter I. beigesetzt.

Hat man sie alle berechnet, so hat man nach den Gewichtsgleichungen von S. 159:

$$\begin{aligned}(1) &= [1]\,[\alpha\alpha] + [2]\,[\alpha\beta] + \ldots\\ &= -\,7{,}536 + 0{,}0611 - 7{,}687 + 0{,}0175\\ (1) &= -\,0{,}4604 - 0{,}1345 = -\,0{,}5949\end{aligned} \tag{15}$$

übereinstimmend mit (14). Alle diese Winkelverbesserungen sind unter der Bezeichnung (a) in dem am Schluss S. 343 angegebenen Abrisse enthalten.

Wenn alle diese Winkelkorrektionen (1) (2) . . . (7) so kontrolliert sind, so fügt man sie zu den ursprünglich gegebenen Winkeln hinzu, und hat dann folgende ausgeglichene Winkel:

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{Nidden} & A^1+(1) = & 26^\circ\,14'\;51{,}610'' \\ & A^2+(2) = & 87\quad 4\;\;52{,}366 \\ \text{Kalleninken} & A^3+(3) = & 45^\circ\,25'\;22{,}694'' \\ & A^4+(4) = & 72\;\;48\;\;57{,}696 \\ \text{Lattenwalde} & A^5+(5) = & 62^\circ\,58'\;35{,}018'' \\ & A^6+(6) = & 110\;\;28'\;21{,}792 \\ \text{Gilge} & A^7+(7) = & 89^\circ\,37'\;51{,}410'' \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Damit lässt sich das Netz ohne Widerspruch berechnen, und zwar giebt die sphärische Dreiecksberechnung mit 7 stelligen Logarithmen unter Zugrundlegung der schon oben bei (5) angegebenen Basisseite $L\,N$ die Seitenlogarithmen, welche in dem nachfolgenden Abriss enthalten sind. Dabei sind auch die in (16) bereits mitgeteilten ausgeglichenen Winkel nochmals in Form von Richtungen vorgeführt.

Abriss der Netzausgleichung zu Fig. 1. S. 239 nach Bessels Methode.

Zielpunkt	Stations-Ausgleichung A	Netzverbesserung (a)	Netz-Ausgleichung $A+(a)$	*log S*
	1. Station Nidden			
Kalleninken	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	4.132 6080·0
Gilge . . . . . A^1	26 14 52,205	— 0,595″	26 14 51,610	4.268 2865·1
Lattenwalde . . . A^2	87 4 53,085	— 0,719	87 4 52,366	4.147 6059·3
	2. Station Lattenwalde			
Nidden	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	4.147 6059·3
Kalleninken . . . A^3	45 25 23,827	— 1,133″	45 25 22,694	4.279 4379·2
Gilge . . . . . A^4	72 48 58,486	— 0,790	72 48 57,696	4.229 2360·8
	3. Station Kalleninken			
Gilge	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	3.942 2898·3
Lattenwalde . . . A^5	62 58 36,167	— 1,149″	62 58 35,018	4.279 4379·2
Nidden . . . . . A^6	110 28 23,667	— 1,875	110 28 21,792	4.132 6080·0
	4. Station Gilge			
Lattenwalde	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	4.229 2360·8
Kalleninken . . . A^7	89 37 54,583	— 3,173″	89 37 51,410	3.942 2898·3

Berechnungs-Ordnung.		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	w
		Bedingungsgleichungen.							
I.	A	+ 5,445	— 1,175	+ 4,063	— 3,412	+ 1,074	+ 0,786		+ 7,010
	B			— 1,000	+ 1,000	+ 1,000		+ 1,000	+ 3,979
	C		+ 1,000	+ 1,000		— 1,000	+ 1,000		+ 2,577
	f		+ 0,107	— 4,063	+ 4,063	+ 1,929	— 1,929	— 0,013	
VII.		[1] = — 7,536	[2] = — 7,687	[3] = — 5,416	[4] = — 4,798	[5] = — 1,693	[6] = — 10,401	[7] = — 9,520	
		Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ ... oder numeriert [1.1], [1.2] ...							
		1	2	3	4	5	6	7	
II.	(1)	+ 0,0611	+ 0,0175						
	(2)	+ 0,0175	+ 0,0764						
	(3)			+ 0,1431	+ 0,0745				
	(4)			+ 0,0745	+ 0,0805				
	(5)					+ 0,1667	+ 0,0833		
	(6)					+ 0,0833	+ 0,1667		
	(7)							+ 0,3333	
		Übertragungs-Coefficienten 𝔄 𝔅 ℭ ...							Correlaten s. unten V.
III.	𝔄	+ 0,3121	+ 0,0053	+ 0,3270	+ 0,0282	+ 0,2445	+ 0,2205		$k_1 = -1{,}384$
	𝔅			— 0,0686	+ 0,0060	+ 0,1667	+ 0,0833	+ 0,3333	$k_2 = -9{,}520$
	ℭ	+ 0,0175	+ 0,0764	+ 0,1431	+ 0,0745	— 0,0833	+ 0,0833		$k_3 = -9{,}313$
	q	+ 0,0019	+ 0,0082	— 0,2787	+ 0,0244	+ 0,1609	— 0,1609	— 0,0043	
VI.	(..)	— 0,595 = (1)	— 0,719 = (2)	— 1,133 = (3)	— 0,790 = (4)	— 1,149 = (5)	— 1,875 = (6)	— 3,173 = (7)	

Normalgleichungen.

	k_1	k_2	k_3	w	k_1	k_2	k_3	k'
IV.	+ 3,3628	− 0,0544	+ 0,3084	+ 7,0100	+ 3,363	− 0,054	+ 0,308	− 1,168
		+ 0,5745	− 0,1519	+ 3,9790		+ 0,574	− 0,152	+ 0,459
			+ 0,3861	+ 2,5770			+ 0,386	− 0,592
				+ 0,0000				+ 1,853
		+ 0,5736	− 0,1469	+ 4,0924		+ 0,574	− 0,147	+ 0,440
			+ 0,3578	+ 1,9341			+ 0,358	− 0,485
				− 14,6130				+ 1,447
	$k_3 = -\frac{2,9822}{0,3202}$		+ 0,3202	+ 2,9822			+ 0,320	− 0,372
	$= -9,313$			− 43,8110				+ 1,111
V.	− 1,384 $= k_1$	− 9,520 $= k_2$	− 9,313 $= k_3$	− 71,5863 $= -[\mathfrak{V}\mathfrak{V}]$				+ 0,677 $= \frac{1}{P}$