Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 73. Genauigkeitsbestimmung für die Bessel sche Dreiecksnetz-Ausgleichung

§ 73. Genauigkeitsbestimmung für die Bessel sche Dreiecksnetz-Ausgleichung.

Das im vorhergehenden § 72. behandelte Vierecksbeispiel zeigt unmittelbar die Bessel sche Methode, welche zuerst bei der Gradmessung in Ostpreussen 1834 zur Anwendung kam, und auch bei den darauf folgenden Preussischen Triangulierungen beibehalten wurde. Bessel hat seine Methode ohne Genauigkeitsuntersuchungen abgeschlossen; und erst in den Arbeiten der Landesaufnahme seit 1870 haben wir die naturgemässe Weiterentwicklung der Bessel schen Methode auch in Hinsicht auf die Genauigkeitsuntersuchungen, welche wir nun an unserem Vierecksbeispiel behandeln:

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird für jede Station durch die Stationsausgleichung geliefert, wie für Nidden in (21) § 71. S. 239 angegeben wurde.

Für alle 4 Stationen wurde so erhalten:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Nidden} & m = \sqrt{\dfrac{70,2}{53}} = \pm 1,15 \\
\text{Lattenwalde} & m = \sqrt{\dfrac{68,6}{48}} = \pm 1,20 \\
\text{Kalleninken} & m = \sqrt{\dfrac{183,3}{22}} = \pm 2,89 \\
\text{Gilge} & m = \sqrt{\dfrac{12,6}{5}} = \pm 1,59
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Diese Bestimmungen entsprechen der ersten Formel m_1 oder μ_1 S. 157. Alle 4 Stationen zusammen geben nach der zweiten Formel m_1 oder μ_1 S. 157:

$$m_1 = \sqrt{\frac{70,2 + 68,6 + 183,3 + 12,6}{53 + 48 + 22 + 5}} = \sqrt{\frac{334,7}{128}} = \pm 1,62'' \qquad (2)$$

Übergehend zu der Fehlerquadratsumme, welche in der Netzausgleichung zu Tage tritt (bei der Landesaufnahme mit $[\mathfrak{V}\mathfrak{V}]$ bezeichnet), haben wir nach S. 159, unten, 3 Formeln, welche wir mit dem Material der Tabelle S. 244—245 alle ausrechnen:

1) $[v'' v''] = [\mathfrak{V}\mathfrak{V}] = (1)[1] + (2)[2] + (3)[3] + \ldots$

	(.)	[.]	(.)[.]
1.	− 0,595	− 7,536	+ 4,484
2.	− 0,719	− 7,687	+ 5,527
3.	− 1,133	− 5,416	+ 6,136
4.	− 0,790	− 4,798	+ 3,790
5.	− 1,149	− 1,693	+ 1,945
6.	− 1,875	− 10,401	+ 19,502
7.	− 3,173	− 9,520	+ 30,207

$$71,591 = [\mathfrak{V}\mathfrak{V}] \qquad (3)$$

2) $[v'' v''] = [\mathfrak{V}\mathfrak{V}] = -[w\,k]$

$$\begin{array}{lll}
w_1 = +7,010 & k_1 = -1,384 & -w_1 k_1 = +9,702 \\
w_2 = +3,979 & k_2 = -9,520 & -w_2 k_2 = +37,880 \\
w_3 = +2,577 & k_3 = -9,313 & -w_3 k_3 = +24,000
\end{array}$$

$$-[w\,k] = 71,582 = [\mathfrak{V}\mathfrak{V}] \qquad (4)$$

$$3)\quad [v''\,v''] = [\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}] = \frac{w_1^2}{[\mathrm{I\,I}]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[\mathrm{II\,II}\,.\,1]} + \frac{[w_3\,.\,2]^2}{[\mathrm{III\,III}\,.\,2]}$$

$$= \frac{7{,}0100^2}{3{,}3628} + \frac{4{,}0924^2}{0{,}5736} + \frac{2{,}9822^2}{0{,}3202}$$

$$= 14{,}613 + 29{,}198 + 27{,}775 = 71{,}586 = [\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}] \qquad (5)$$

Dasselbe Resultat (5) steht übrigens auch schon unten auf S. 245, wo es schematisch gelegentlich mitberechnet worden ist.

Wir haben also nun in hinreichender Übereinstimmung aus (3) (4) und (5):

$$[\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}] = 71{,}58.$$

Da die Anzahl der Netzbedingungsgleichungen $r = 3$ ist, so erhält man den mittleren Richtungsfehler aus der Netzausgleichung nach der Formel m_2 unten auf S. 159:

$$m_2 = \sqrt{\frac{71{,}58}{3}} = \pm\, 4{,}88'' \qquad (6)$$

Obgleich unser Beispiel in Bezug auf die Gewichtsbestimmung auf Kalleninken ein fingiertes ist (wie schon zu Anfang von § 72. S. 239 bemerkt wurde), so wird doch die allgemeine Erfahrung auch hier bestätigt, dass die Netzausgleichung einen grösseren mittleren Fehler m_2 ergiebt, als die Stationsausgleichungen $m_1 = +\, 1{,}62''$ nach (2).

Aus den Stationen und aus dem Netz zusammen hat man nun nach der Formel für m oben auf S. 160:

$$m = \sqrt{\frac{334{,}7 + 71{,}6}{128 + 3}} = \sqrt{\frac{406{,}5}{131}} = \pm\, 1{,}76'' \qquad (7)$$

Da in dieser allgemeinen Formel (7) die Stationsausgleichungen, wie immer, bedeutend überwiegen, so ist (7) nicht erheblich verschieden von (2).

Um auch eine Anwendung der Theorie der Funktionsgewichte zu haben, bestimmen wir noch das Gewicht der Seite $G\,K$ als Funktion der als fehlerfrei angenommenen Basis $L\,N$ und der ausgeglichenen Viereckswinkel, d. h. es handelt sich um die Funktion:

$$G\,K = L\,N\,\frac{\sin A^2 \sin (A^4 - A^3)}{\sin (A^6 - A^5) \sin A^7}$$

oder für die Rechnung bequemer, um die logarithmische Funktion:

$$F = \log \sin A^2 + \log \sin (A^4 - A^3) - \log \sin (A^6 - A^5) - \log \sin A^7 \qquad (8)$$

wobei unter $A^1\,A^2\,\ldots$ die ausgeglichenen Winkel verstanden sind. Die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion werden in gleicher Weise berechnet, wie die Coefficienten $A_1\,A_2\,\ldots$ der Seitenbedingungsgleichung (9) oder (10) § 72. S. 241. Die Resultate sind für Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:

$$f_1 = 0\ ,\ f_2 = +\,0{,}107\ ,\ f_3 = -\,4{,}063\ ,\ f_4 = +\,4{,}063\ ,\ f_5 = +\,1{,}929$$
$$f_6 = -\,1{,}929\ ,\ f_7 = -\,0{,}013$$

Diese f fügt man der Tabelle S. 244 in der Abteilung I. bei (kleingedruckt).

Dann folgt die Berechnung der q nach den Formeln von S. 160. Diese q schliessen sich auf S. 244 unmittelbar den $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ an. Man hat:

	q	f	fq
$q_1 = 0{,}107 \times 0{,}0175$	$= +0{,}0019$		
$q_2 = 0{,}107 \times 0{,}0764$	$= +0{,}0082$	$+0{,}107$	$+0{,}0009$
$q_3 = -4{,}063 \times 0{,}1431 + 4{,}063 \times 0{,}0745$	$= -0{,}2787$	$-4{,}063$	$+1{,}1324$
$q_4 = -4{,}063 \times 0{,}0745 + 4{,}063 \times 0{,}0805$	$= +0{,}0244$	$+4{,}063$	$+0{,}0991$
$q_5 = 1{,}929 \times 0{,}1667 - 1{,}929 \times 0{,}0833$	$= +0{,}1609$	$+1{,}929$	$+0{,}3104$
$q_6 = 1{,}929 \times 0{,}0833 - 1{,}929 \times 0{,}1667$	$= -0{,}1609$	$-1{,}929$	$+0{,}3104$
$q_7 = -0{,}013 \times 0{,}3333$	$= -0{,}0043$	$-0{,}013$	$+0{,}0000$
			$1{,}8532 = [fq]$ (10)

Hier haben wir die Berechnung der Produkt-Summe $[fq]$ sogleich an die Berechnung der q angeschlossen.

Es folgt die Berechnung der Ersatzglieder nach den Doppelformeln von S. 160:

	A	q	Aq	$\mathfrak{A}$	f	$\mathfrak{A}f$
1.	$+5{,}445$	$+0{,}0019$	$+0{,}0103$	$+0{,}3121$		$0{,}0000$
2.	$-1{,}175$	$+0{,}0082$	$-0{,}0096$	$+0{,}0053$	$+0{,}107$	$+0{,}0006$
3.	$+4{,}063$	$-0{,}2787$	$-1{,}1324$	$+0{,}3270$	$-4{,}063$	$-1{,}3286$
4.	$-3{,}412$	$+0{,}0244$	$-0{,}0833$	$+0{,}0282$	$+4{,}063$	$+0{,}1146$
5.	$+1{,}074$	$+0{,}1609$	$+0{,}1720$	$+0{,}2445$	$+1{,}929$	$+0{,}4716$
6.	$+0{,}786$	$-0{,}1609$	$-0{,}1260$	$+0{,}2205$	$-1{,}929$	$-0{,}4253$
7		$-0{,}0043$	$0{,}0000$		$-0{,}013$	$0{,}0000$
			$-1{,}1690 = [Aq]$			$-1{,}1671 = [\mathfrak{A}f]$

Die übrigen Ersatzglieder werden ebenso berechnet; alle 3 Ersatzglieder sind $-1{,}168 \quad +0{,}459 \quad -0{,}592$. Diese werden nebst dem schon bei (10) angegebenen $[fq] = 1{,}853$ in der Tabelle S. 245 rechts (im Kleingedruckten) beigesetzt, worauf die Elimination ganz von selbst auf den Wert führt:

$$\frac{1}{P} = 0{,}677$$

Dieses entspricht der Formel für $\frac{1}{P}$ unten auf S. 160, es kann auch ausführlicher so geschrieben werden:

$$\frac{1}{P} = 1{,}853 - \frac{1{,}168^2}{3{,}363} - \frac{0{,}440^2}{0{,}573} - \frac{0{,}372^2}{0{,}320}$$

$$= 1{,}853 - 0{,}400 - 0{,}338 - 0{,}432 = 0{,}677$$

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler ist bereits in (7) berechnet, $m = 1{,}76''$, also nun nach der Schlussformel von S. 130:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} = 1{,}76\sqrt{0{,}677} = 1{,}448$$

Dieses ist ein mittlerer Fehler in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale, es ist also nach der Ausgleichung:

$$\log G\,K = 3.942\,2898{\cdot}4 \pm 14{\cdot}5 \quad .$$