Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 76. Besonderer Fall dreier Sichtstrahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

ungleichgewichtige Elemente in die Ausgleichung einführen, so lange es sich nur um die Ausgleichung selbst und um Gewichte handelt, z. B. die ganze Tabelle für die Station Nidden in § 71. auf S. 238 könnte vor der Ausgleichung in 3 Sätzen dargestellt werden, von denen der erste nur l° und l'' mit $p_1 = 12$, der zweite l° und l' mit $p_2 = 19$ und der dritte l°, l', l'' mit $p_3 = 12$ enthielte. Damit würde man genau dieselben x', x'' auch $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$, $[\beta\,\beta]$ erhalten, wie bei der ausführlichen Rechnung in § 71., aber die Summe $[v\,v]$ und der mittlere Fehler würden anders und viel weniger zuverlässig.

Wollte man das Mittel aus n Sätzen als *einen* Satz mit dem Gewicht $= n$ (ohne andere Sätze oder Satzmittel) in sich selbst ausgleichen, und die Formeln des § 71. auf diesen Fall anwenden, so würde man natürlich zunächst den Satz selbst mit dem Gewicht $= n$ wiederfinden, wollte man aber auch die Fehlerberechnung mit $[v\,v]$ darauf anwenden, so würde man finden:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{(n-1)(s-1)} = \frac{0}{0} \tag{13}$$

oder in Worten: Wenn lauter volle Sätze in der Anzahl n vorliegen, so besteht die Stationsausgleichung lediglich in einer Mittelbildung, wodurch *ein* Satz vom Gewichte $= n$ erhalten wird, der aber an sich keinen Aufschluss über die Genauigkeit giebt. Zur Genauigkeitsuntersuchung muss man vielmehr auf die einzelnen Sätze zurückgehen.

§ 76. Besonderer Fall dreier Sichtstrahlen.

Der Fall *dreier* Sichten, welche in verschiedenen Kombinationen zusammen gemessen sind, bietet besonderes Interesse, weil in diesem Falle, ebenso wie bei der Mittelbildung aus gleichartigen Sätzen, es möglich sein wird, das ganze Ergebnis der Ausgleichung in Form von 3 einzelnen *Richtungen* mit gewissen Gewichten darzustellen. Bei mehr als drei Sichten ist das im Allgemeinen nicht mehr der Fall.

Wir wollen den Fall dreier Sichtstrahlen zuerst in (1)—(10) noch *nicht* erschöpfend behandeln, sondern zunächst nur annehmen, dass die 3 *Winkel* gemessen sind, welche zwischen den 3 Strahlen möglich sind.

Wir haben hiezu zwei Figuren gezeichnet, Fig. 1. und Fig. 2., von denen die

Fig. 1.
3 Richtungen und 3 Winkel.

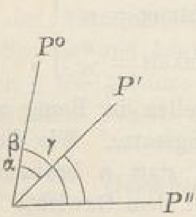
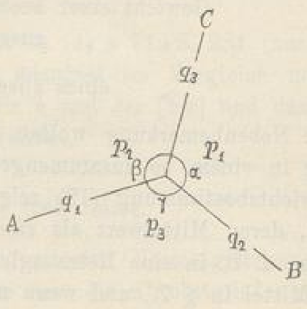


Fig. 2.
3 Richtungen und 3 Winkel.



erste Fig. 1. sich mehr den früheren Bezeichnungen von § 71. anschliesst, während Fig. 2. mehr der Symmetrie Rechnung trägt.

Nach Fig. 2. nehmen wir folgendes an:

$$\left.\begin{array}{llll} & \text{Strahlen} & A \quad B \quad C & \\ \text{Gemessene Winkel} & CB = \alpha & \text{mit dem Gewicht} & p_1 \\ \text{"} \quad \text{"} & AC = \beta & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & p_2 \\ \text{"} \quad \text{"} & BA = \gamma & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & p_3 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die drei Winkel α, β, γ in Fig. 2. müssen der Bedingung genügen:

Es soll sein $\alpha + \beta + \gamma - 360° = 0$

Wegen der Beobachtungsfehler wird werden:

$$\alpha + \beta + \gamma - 360° = w \quad (2)$$

Zur Tilgung des Widerspruches w werden die Verbesserungen v_1, v_2, v_3 angebracht, so dass wird:

$$(\alpha + v_1) + (\beta + v_2) + (\gamma + v_3) = 0$$

Dieses mit dem vorhergehenden zusammengenommen giebt:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \quad (3)$$

Dieses ist eine Bedingungsgleichung von der Form (4) § 43. S. 126, d. h. es ist:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \quad (4)$$

Die Ausgleichung selbst, die uns hier weniger interessiert, wird lediglich darauf führen, den Widerspruch w in (2) umgekehrt proportional den Gewichten p_1, p_2, p_3 auf die drei Winkel α, β, γ zu verteilen (ähnlich wie in dem Dreiecksbeispiel S. 34).

Wir wollen aber dann das Gewicht P_α des ausgeglichenen Winkels α bestimmen nach der Anleitung von (13) S. 125, welche in unserem Falle giebt:

$$\frac{1}{P_\alpha} = \left[\frac{ff}{p} . 1\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \quad (5)$$

Da die Ausgleichungsfunktion $F = \alpha$ ist, also $f_1 = 1$ und $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, so wird mit den Coefficienten a in (4) und mit den Gewichten p in (1) sehr einfach:

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = \frac{1}{p_1}, \left[\frac{af}{p}\right] = \frac{1}{p_1}, \left[\frac{aa}{p}\right] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \left[\frac{1}{p}\right]$$

Aus diesen Vorbereitungen setzt sich (5) so zusammen:

$$\frac{1}{P_\alpha} = \frac{1}{p_1} - \left(\frac{1}{p_1}\right)^2 \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{P_\alpha} = \frac{\frac{1}{p_1}\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)}{\left[\frac{1}{p}\right]} \quad (6)$$

Dieses stimmt überein mit der Bedeutung von (17) und (21) S. 34 (mit geändertem Zeichen p_α statt p_1 u. s. w.) und man kann auch unsere Formel (6) wieder ebenso wie früher die Formeln von S. 34 kurz so begründen, dass man das Gewicht des ausgeglichenen Winkels α zusammensetzt aus dem Gewichte p_1 des gemessenen Winkels α selbst und dem Gewichte $\frac{p_2 p_3}{p_2 + p_3}$ der Bestimmung von α auf dem Umweg über $360° - (\beta + \gamma)$.

Indessen, solche Nebenentwicklungen nicht weiter verfolgend, betrachten wir die zweite Form in (6), welcher man noch eine andere sehr wichtige Bedeutung unterlegen kann, indem man schreibt:

$$\frac{1}{P_\alpha} = \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_2} \tag{7}$$

wobei
$$\frac{1}{q_3} = \frac{\frac{1}{p_1}\,\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \qquad \frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{p_1}\,\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{8}$$

Hier haben q_3 und q_2 die Bedeutung unabhängiger *Richtungs*-Gewichte.

Wenn man die Formeln (8) auf alle Kombinationen 1.2 , 2.3 , 2.3 anwendet und auch noch etwas umformt, so hat man folgendes:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{\frac{1}{p_2}\,\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{p_1}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad \text{oder} \quad q_1 = (p_2 + p_3) + \frac{p_2 p_3}{p_1} \tag{9a}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{p_1}\,\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{p_2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad \text{„} \quad q_2 = (p_3 + p_1) + \frac{p_3 p_1}{p_2} \tag{9b}$$

$$\frac{1}{q_3} = \frac{\frac{1}{p_1}\,\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{p_3}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad \text{„} \quad q_3 = (p_1 + p_2) + \frac{p_1 p_2}{p_3} \tag{9c}$$

Hiezu gilt auch (7) in allen Kombinationen; und wir können nun den Satz aussprechen, dass, in Hinsicht auf die ausgeglichenen Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$, man die durch Ausgleichung erlangte Genauigkeit darstellen kann durch Richtungsgewichte q_1 , q_2 , q_3, aus welchen sich die Winkelgewichte P_α , P_β , P_γ nach der Ausgleichung ebenso zusammensetzen. wie wenn die q zu unabhängigen Richtungsmessungen gehörten. (Vgl. hiezu Fig. 2.)

Als Gewichts-Einheit, $p = 1$, dient hiebei eine Winkelmessung (α, β oder γ) vom Gewichte 1, und wenn wir nun die Änderung machen wollen, dass ein *Richtungs*gewicht zur Einheit wird, so müssen wir nach (3) § 70. S. 231 statt (9a) schreiben:

$$q_1 = \frac{p_2 + p_3}{2} + \frac{p_2 p_3}{2\,p_1} \tag{10}$$

wobei nun z. B. p_1 das Gewicht der gemessenen Richtung B und das Gewicht der gemessenen Richtung C ist, welche nach Fig. 2. den Winkel α zusammensetzen, wobei ausserdem angenommen ist, dass auch ein Satz $A\,C$ mit 2 Richtungsgewichten p_2 und ein Satz $B\,A$ mit 2 Richtungsgewichten p_3 gemessen ist.

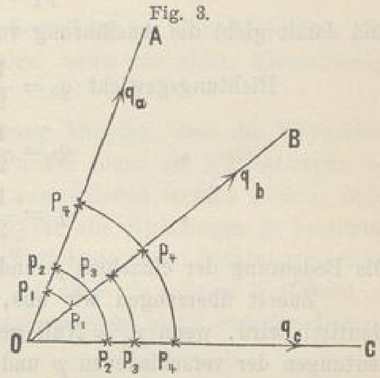
Die Formel (9a) oder (10) hat das eigenthümliche, dass sie $q_1 = \infty$ giebt, wenn $p_1 = 0$ wird; wenn also der Winkel α gar nicht gemessen ist, aber der Winkel β mit dem Gewicht p_2 und der Winkel γ mit dem Gewicht p_3, so bekommt die Richtung A das Gewicht $q_1 = \infty$, die Richtung B das Gewicht $q_2 = p_3$ und die Richtung C das Gewicht $q_3 = p_2$; oder man kann sagen, wenn nur 2 Winkel zwischen 3 Sichten gemessen sind, so werden die Richtungsgewichte nur eine erzwungene Form, welche die ursprünglichen Winkelgewichte wieder in sich schliesst. Der Umstand, dass einzelne Gewichte unendlich werden, schadet übrigens nichts, wenn man solche Messungen in Richtungsform in eine Triangulierungsausgleichung nach bedingten

Beobachtungen einführen will, weil hiebei (nach § 40.) stets die Gewichts*reciproken* gebraucht werden, z. B. $\left[\frac{a\,a}{p}\right]$, $\left[\frac{a\,b}{p}\right]$ u. s. w. auszurechnen ist, was mit einzelnen $p = \infty$ entsprechende Glieder-Null giebt, ohne die Rechnung formell zu beeinträchtigen.

Allgemeinster Fall für 3 Sichten.

Ausser den drei möglichen *Winkeln* zwischen drei Sichten kann auch noch ein *Richtungssatz* gemessen sein, welcher alle 3 Sichten zusammen trifft, und dann haben wir den allgemeinsten Fall der Messungs-Combinationen zwischen 3 Sichten, wie in Fig. 3. gezeigt und in nachfolgendem Schema dargestellt ist, im Anschluss an die Bezeichnungen von § 71.

Fig. 3.



$$\begin{array}{l|llll|l} \text{Satz}_1 & p_1{}^\circ & p_1{}' & \cdot & \cdot & \text{dabei ist } [p_1] = 2\,p_1 \\ \text{Satz}_2 & p_2{}^\circ & \cdot & \cdot & p_2{}'' & \qquad\quad [p_2] = 2\,p_2 \\ \text{Satz}_3 & \cdot & \cdot & p_3{}' & p_3{}'' & \qquad\quad [p_3] = 2\,p_3 \\ \text{Satz}_4 & p_4{}^\circ & p_4{}' & p_4{}'' & & \qquad\quad [p_4] = 3\,p_4 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} (11)$$

Wenn man hierauf die allgemeinen Formeln (11) § 71. S. 236 anwendet, so bekommt man:

$$\left.\begin{array}{ll} (a\,a) = p_1 + p_3 + p_4 - \dfrac{p_1{}^2}{2\,p_1} - \dfrac{p_3{}^2}{2\,p_3} - \dfrac{p_4{}^2}{3\,p_4} = & \dfrac{3\,p_1 + 3\,p_3 + 4\,p_4}{6} \\ -(a\,b) \qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{p_3{}^2}{2\,p_3} + \dfrac{p_4{}^2}{3\,p_4} = & \dfrac{3\,p_3 + 2\,p_4}{6} \\ (b\,b) = p_2 + p_3 + p_4 - \dfrac{p_2{}^2}{2\,p_2} - \dfrac{p_3{}^2}{2\,p_3} - \dfrac{p_4{}^2}{3\,p_4} = & \dfrac{3\,p_2 + 3\,p_3 + 4\,p_4}{6} \end{array}\right\} \quad (12)$$

Zur Gewichtsberechnung brauchen wir hieraus nach § 17. S. 58—59:

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] \quad (13)$$

$$[\alpha\,\alpha] = \frac{[b\,b]}{D}\ ,\quad [\alpha\,\beta] = \frac{-[a\,b]}{D}\ ,\quad [\beta\,\beta] = \frac{[a\,a]}{D} \quad (14)$$

Die Ausführung mit (12) giebt:

$$D = \frac{3\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) + 4\,p_4\,(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)}{12} \quad (15)$$

Daraus kann man zunächst die *Winkel*gewichte bilden; nämlich das Gewicht $P\,(A\,B)$ des Winkels $A\,B$ und das Gewicht $P\,(A\,C)$ des Winkels $A\,C$ sind so bestimmt:

$$\frac{1}{P\,(A\,B)} = [\alpha\,\alpha] \quad \text{und} \quad \frac{1}{P\,(A\,C)} = [\beta\,\beta] \quad (16)$$

der Winkel $B\,C$ setzt sich zusammen aus $A\,C - A\,B$ und deswegen wird das Gewicht des Winkels $B\,C$ nach (11) und (12) S. 78 (mit $f_1 = -1$, $f_2 = +1$) bestimmt durch:

$$\frac{1}{P\,(B\,C)} = [\alpha\,\alpha] + [\beta\,\beta] - 2\,[\alpha\,\beta] \quad (17)$$

All dieses kann man auf die Form von *Richtungs*gewichten q bringen, indem man bestimmt, dass sein soll:

$$\frac{1}{P\,(A\,B)} = \frac{1}{q_a} + \frac{1}{q_b}\ ,\quad \frac{1}{P\,(A\,C)} = \frac{1}{q_a} + \frac{1}{q_c}\ ,\quad \frac{1}{P\,(B\,C)} = \frac{1}{q_b} + \frac{1}{q_c} \quad (18)$$

Dieses sind 3 Gleichungen zur Bestimmung von q_a, q_b, q_c, wozu die 3 Gleichungen (16) und (17) gerade hinreichen; man findet aus (16), (17), (18) die Auflösungen:

$$\frac{1}{q_a} = [\alpha\,\beta] \quad , \quad \frac{1}{q_b} = [\alpha\,\alpha] - [\alpha\,\beta] \quad , \quad \frac{1}{q_c} = [\beta\,\beta] - [\alpha\,\beta] \tag{19}$$

Vor der Einsetzung wollen wir noch zur Abkürzung schreiben:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = [p] \tag{20}$$

und damit giebt die Ausführung von (19) mit (13)—(15):

$$\left.\begin{aligned} \text{Richtungsgewicht}\ q_a &= \frac{1}{2}\,\frac{3\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) + 4\,p_4\,[p]}{3\,p_3 + 2\,p_4} \\ \text{"}\qquad q_b &= \frac{1}{2}\,\frac{3\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) + 4\,p_4\,[p]}{3\,p_2 + 2\,p_4} \\ \text{"}\qquad q_c &= \frac{1}{2}\,\frac{3\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) + 4\,p_4\,[p]}{3\,p_1 + 2\,p_4} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Bedeutung der einzelnen p und q liegt in Fig. 3. S. 257.

Zuerst überzeugen wir uns, dass q_c nach (21) mit dem früheren q_1 in (10) identisch wird, wenn p_4 = Null gesetzt wird, wie es sein muss, wenn man die Bedeutungen der verschiedenen p und q in Fig. 2. und Fig. 3. vergleicht.

Wir wollen die Formeln (21) auf den Fall unseres Beispieles Station Nidden von S. 238 anwenden, und haben dann:

	A = Kalleninken	B = Gilge	C = Lattenwalde	
Satz $_1$	$p_1 = 19$	$p_1 = 19$	. . .	
Satz $_2$	$p_2 = 12$	. . .	$p_2 = 12$	(22)
Satz $_3$	$p_3 = 0$	. . .	. . .	
Satz $_4$	$p_4 = 12$	$p_4 = 12$	$p_4 = 12$	

Nach (20) und (21): $[p] = 19 + 12 + 12 = 43$

$$p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3 = 19 \times 12 = 228$$

$$q_a = \frac{1374}{24} = 57{,}25 \quad , \quad q_b = \frac{1374}{60} = 22{,}90 \quad , \quad q_c = \frac{1374}{81} = 16{,}96 \tag{23}$$

Zur Probe haben wir von früher (21) § 71. S. 239:

$$[\alpha\,\alpha] = 0{,}0611 \qquad [\alpha\,\beta] = 0{,}0175 \qquad [\beta\,\beta] = 0{,}0764$$

also nach (19):

$$\frac{1}{q_a} = 0{,}0175 \qquad \frac{1}{q_b} = 0{,}0436 \qquad \frac{1}{q_c} = 0{,}0589$$

$$q_a = 57{,}14 \qquad q_b = 22{,}94 \qquad q_c = 16{,}98 \tag{24}$$

Die Ergebnisse von (23) und (24) stimmen genügend überein.

Zur Vergleichung wollen wir auch die sogenannten „Anschnittszahlen" hersetzen, welche man zuweilen als Richtungsgewichte genommen hat.

Als „Anschnittszahl" wurde genommen die Anzahl von Einstellungen, welche eine Sicht im ganzen Verlaufe der Messungen auf einer Station erfahren hat, ohne Rücksicht auf die übrigen Sichten und die Verbindungen der Sichten unter sich.

Das Beispiel (22) giebt nach dieser Erklärung die Anschnittszahlen:

	Kalleninken	Gilge	Lattenwalde	
Anschnittszahl	$q_a' = 43$	$q_b' = 31$	$q_c' = 24$	(25)

Wollte man diese (25) als Näherungen für die richtigen Gewichte (23) oder

(24) gelten lassen, so würde man also in A erheblich zu wenig und in B und C zu viel erhalten.

Wir wollen auch nochmals die Eigenthümlichkeit hervorheben, dass ein Richtungsgewicht $q = \infty$ werden kann, z. B. $p_3 = 0$ und $p_4 = 0$ giebt $q_a = \infty$ und dabei $q_b = \frac{1}{2} p_1$ und $q_c = \frac{1}{2} p_2$, also wieder wie schon bei (9) und (10) bemerkt wurde, nur gezwungene Richtungsform und thatsächlich Zerfällung in Winkelgewichte. Dasselbe wird auch stattfinden bei mehr als 3 Strahlen, wenn gar nichts überschüssiges gemessen ist.

Wir wollen hieran auch noch die Bemerkung knüpfen, dass die Vierecksausgleichung von § 72, da das Viereck in keinem Punkte mehr als 3 Richtungen hat, auch nach dem Verfahren der Richtungsgewichte ausgeglichen werden könnte, indem man einfach die Gewichte q nach den Formeln (21) für alle Richtungen zu bestimmen und dann im wesentlichen nach § 59. (jedoch mit Zuziehung dieser Richtungsgewichte) zu verfahren hätte. Als Anwendung im Grossen ist aber ein solches Verfahren unmöglich, weil die Punkte eines Netzes im Allgemeinen mekr als 3 Strahlen haben.

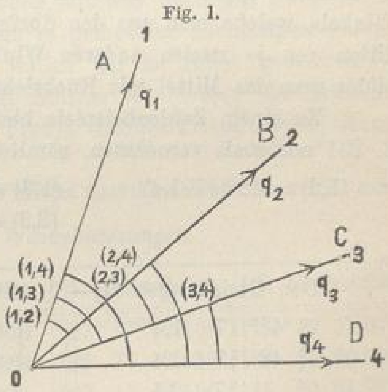
§ 77. Winkelmessung in allen Combinationen.

Die Winkelmessung in allen Combinationen ist nach den vollen Sätzen (§ 75.) und dem Falle dreier Strahlen (§ 76.) die dritte wichtige Anordnung von Winkelmessungen, weil sie, wie die beiden vorher erwähnten, die Ausgleichung mit der Form von Richtungsgewichten bieten wird.

Schon von Gauss und Gerling als Ideal gepriesen und von Hansen 1871 theoretisch behandelt, ist die Winkelmessung in allen Combinationen in neuester Zeit durch General Schreiber bei der Landesaufnahme zu neuem Leben gebracht worden, und bildet seit etwa 1880 den Grundton der preussischen Triangulierungen I. Ordnung.

Schon in § 67. haben wir die vorliegende Aufgabe mit einem Beispiele nach Gerling behandelt, und zwar mit gleichen und mit ungleichen Gewichten. Die ungleichen unregelmässig zerstreuten Gewichte sind aber in diesem Falle nicht erwünscht; gerade die *gleichen* Gewichte in Verbindung mit der gleichmässigen Verteilung geben dem Verfahren die Geschmeidigkeit und Übersichtlichkeit, welche seine Vorteile ausmachen.

Fig. 1.



Damit nehmen wir nun mit Fig. 1. an, man habe zwischen 4 Strahlen alle 6 möglichen Winkel gleichartig gemessen, nämlich:

Gemessene Winkel

$$(1,2)\ ,\ (1,3)\ ,\ (1,4)\ ,\ (2,3)\ ,\ (2,4)\ ,\ (3,4) \qquad (1)$$

Als unabhängige Unbekannte sollen die 3 Winkel zwischen dem ersten Strahl und den 3 folgenden Strahlen gelten, welche zur Unterscheidung von den gemessenen Winkeln (1,2) , (1,3) , (1,3) nun mit [1,2] , [1,3] , [1,4] bezeichnet werden, und damit bekommen wir für die 6 gemessenen Winkel folgende 6 Fehlergleichungen: