



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Handbuch der Vermessungskunde**

**Jordan, Wilhelm**

**Stuttgart, 1895**

§ 80. Die Elbkette (mit Netzbild S. 280-281)

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83060](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83060)

Winkel 2, 3 wird gemessen:

in der Kreisstellung  $30^\circ$ , Hingang und Rückgang in Fernrohrlage I

„ „ „  $90^\circ$ , Hingang in I, Rückgang in II

„ „ „  $150^\circ$ , Hingang und Rückgang in II u. s. w.

Da jeder Winkel im ganzen ebenso oft in Fernrohrlage I wie in Fernrohrlage II gemessen werden muss, so ist es bei ungerader Kreisstellungszahl nicht anders zu machen, als mindestens in *einer* Kreisstellung Hingang und Rückgang in verschiedenen Fernrohrlagen zu messen.

Wenn die Winkelmessungen nach den vorstehenden Regeln auf allen Stationen angeordnet und ausgeglichen sind, so nimmt die Netzausgleichung in allem Wesentlichen die Form der Richtungsangleichungen von § 59. und § 61. an, nur mit dem kleinen Unterschied, dass die einzelnen Richtungen nicht alle gleiches Gewicht (Gewicht = 1) haben, sondern Gewichte, welche nach der Tabelle auf S. 269 zwischen 24 und 28 schwanken. Man könnte vielleicht wohl auch die Gewichtsunterscheidungen zwischen 24, 25 und äusserstenfalls 28 vernachlässigen, doch bringt deren Mitführung gar keine Schwierigkeit.

Der Nachweis, dass die allgemeine Besselsche Netzausgleichung von § 72. mit § 55. durch die Schreibersche Winkelmessung in allen Combinationen übergeht in Netzausgleichung mit einzelnen Richtungen, ist in unserer vorigen 3. Auflage, 1890, S. 252–256 im einzelnen formell geführt worden, was wir diesesmal übergehen wollen, da der Grundgedanke dazu im Vorhergehenden genügend dargelegt ist. Statt dessen wollen wir im nächsten § 80. noch ein Netz-Beispiel zu dem besprochenen Verfahren betrachten.

### § 80. Die Elbkette.

Zu einem Beispiel der Triangulierungsbehandlung nach Schreibers Winkel-Methode nehmen wir die „Elbkette“, deren Netzbild auf S. 280–281 gegeben ist, nach dem amtlichen Werke: „Die königl. preussische Landestriangulation“. Hauptdreiecke. Vierter Teil. Die Elbkette. Zweite Abteilung, die Beobachtungen und deren Ausgleichung, gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme. Berlin 1891, (vgl. Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 399 und 1891, S. 455–459. Zur Anlage dieser Kette im Allgemeinen ist mitzuteilen:

Die Elbkette hat im Osten und im Westen feste Anschlüsse, welche in der Zeichnung auf S. 280–281 durch *starke Linien* angedeutet sind, nämlich:

im Osten Küstenvermessung:

$$\text{Eichstädt-Eichberg} \quad \log S = 4.619\,7943 \cdot 5$$

$$\text{Azimut } (Et - Eg) = 177^\circ 19' 53,221''$$

$$\text{„ } (Eg - Et) = 357^\circ 21' 14,480''$$

im Westen: Boursberg-Havighorst  $\log S = 4.430\,7451 \cdot 8$

$$\text{Boursberg-Kaiserberg} \quad \log S = 4.638\,2214 \cdot 6$$

$$\text{Winkel Havighorst-Boursberg-Kaiserberg} = 236^\circ 39' 50,203''$$

Der Anschluss im Osten ist ein in allen Beziehungen fester, während im Westen, mit zwei Seiten und einem Winkel, nur ein Anschluss in Hinsicht auf die *relative* Lage der drei Punkte Kaiserberg, Boursberg, Havighorst stattfindet.

Abgesehen von den Nebenpunkten Schwarzenberg, Lüneburg und Brockhöfe hat die Elbkette:



$p = 28$  Punkte,

$l = 62$  zweiseitige Sichtlinien.

Es folgen hieraus nach den Regeln (11) S. 173:

$l - 2p + 3 = 9$  Seitengleichungen

und  $l - p + 1 = 35$  Dreiecksgleichungen.

Im Ganzen 44 Bedingungsgleichungen.

Hiezu kommen aber noch zwei Seitengleichungen (V und XLVI) für linearen Zwangsanschluss, erstens im Westen mit den zwei Seiten Kaiserberg-Baursberg und Baursberg-Havighorst, und zweitens eine durchlaufende Seitengleichung von Westen nach Osten bei Eichstädt-Eichberg. Was den *Winkelzwang* in Baursberg betrifft, so erzeugt dieser nicht eine neue Gleichung, sondern wird dadurch ausgedrückt, dass die Richtungen von Baursberg nach Kaiserberg und nach Havighorst beide die *gleiche* Verbesserung erhalten. (Verbesserung (6) in der Gesamtnumerierung.)

Was die Anordnung der Messungen betrifft, so besteht die Eigentümlichkeit, dass die Messungen teils nach der alten Besselschen Satzmethode, teils nach der Schreiber'schen Methode ausgeführt sind, und zwar in folgender Verteilung (S. 280—281):

*Stationen mit Winkelmessung in allen Combinationen nach Schreiber's Methode.*

1. Kaisersberg . . .	2 Sichten
2. Stade . . . . .	3 "
3. Baursberg . . . .	5 " (4)
4. Litberg . . . . .	4 "
5. Havighorst . . . .	3 "
6. Vahrendorf . . . .	5 "
7. Wilsede . . . . .	5 "
8. Steinhöhe . . . . .	5 "
9. Hohen-Bünstorf . .	6 "
10. Lüss . . . . .	3 "
11. Glienitz . . . . .	4 "
12. Redemoissel . . . .	4 "
13. Pugelatz . . . . .	6 "
14. Hölbeck . . . . .	7 "
16. Zichtauer Berg . .	3 "
Summe 65 Sichten	

*Stationen mit Richtungsmessungen nach der alten, Besselschen Methode.*

15. Dolchauer Berg . .	6 Sichten
17. Polkern . . . . .	4 "
18. Woltersdorf . . . .	6 "
19. Ruhnerberg . . . .	3 "
20. Hexenberg . . . . .	3 "
21. Landsberg . . . . .	5 "
22. Arneburg . . . . .	6 "
23. Stöllner Berg . . .	7 "
24. Gollwitzer Berg . .	5 "
25. Götzer Berg . . . .	5 "
26. Hagelsberg . . . . .	3 "
27. Eichstädt . . . . .	3 "
28. Eichberg . . . . .	3 "
Summe 59 Sichten	

Im Ganzen  $65 + 59 = 124$  Sichten, entsprechend den schon vorher erwähnten  $l = 62$  zweiseitigen gemessenen Verbindungslinien.

Die Station Baursberg hat *zwei* feste Anschlussrichtungen, weshalb die Winkelmessung und Ausgleichung nach dem in § 78. beschriebenen Verfahren geschah.

Die Station Baursberg giebt nochmals Gelegenheit zur Ausgleichung von Winkeln mit Anschluss an zwei feste Richtungen. Man hat nämlich aus „Kön. Preuss. Landes-*Triang.*, Hauptdreiecke, IV. Teil“, die Elbkette 1891, S. 69—70 durch Mittelbildung die folgenden 9 gemessenen Winkel und dazu einen fest gegebenen Winkel [1,5].

1. Havighorst	2. Vahrendorf	3. Litberg.	4. Stade.	5. Kaisersberg.
	(1,2) = $50^{\circ} 46' 35,17''$ $p = 1$	(1,3) = $107^{\circ} 55' 45,37''$ $p = 1$	(1,4) = $178^{\circ} 56' 37,13''$ $p = 1$	[1,5] = $236^{\circ} 41' 37,75''$ fest gegeben
		(2,3) = $57^{\circ} 9' 10,24''$ $p = 2$	(2,4) = $128^{\circ} 10' 3,29''$ $p = 2$	(2,5) = $186^{\circ} 55' 0,50''$ $p = 1$
			(3,4) = $71^{\circ} 0' 52,95''$ $p = 2$	(3,5) = $128^{\circ} 45' 51,98''$ $p = 1$
				(4,5) = $57^{\circ} 44' 58,60''$ $p = 1$



Zuerst eliminiert man den Anschlusszwang, wobei wir nur noch die Sekunden schreiben:

$$\begin{array}{lll}
 (1,2) = 35,17'' & (1,3) = 45,37'' & (1,4) = 37,13'' \\
 [1,5] - (2,5) = 37,25 & [1,5] - (3,5) = 45,77 & [1,5] - (4,5) = 39,15 \\
 \hline
 \text{Mittel } (1,2) = 36,21'' & \text{Mittel } (1,3) = 45,57'' & \text{Mittel } (1,4) = 38,14'' \\
 \text{Dazu von oben:} & (2,3) = 10,24 & (2,4) = 3,29 \\
 & & (3,4) = 52,95
 \end{array}$$

Diese 6 Winkel haben nun alle  $p = 2$ , sind also gleichgewichtig. Man gleicht dieselben so aus:

$$\begin{array}{llll}
 (1,2) = \begin{cases} 36,21'' \\ 36,21 \end{cases} & (1,3) = \begin{cases} 45,57'' \\ 45,57 \end{cases} & (1,4) = \begin{cases} 38,14'' \\ 38,14 \end{cases} & (2,3) = \begin{cases} 10,24'' \\ 10,24 \end{cases} \\
 (1,3) - (2,3) = 35,33 & (1,4) - (3,4) = 45,19 & (1,2) + (2,4) = 39,50 & (1,3) - (1,2) = 9,36 \\
 (1,4) - (2,4) = 34,85 & (1,2) - (2,3) = 46,45 & (1,3) + (3,4) = 38,52 & (3,4) - (2,4) = 10,34 \\
 \hline
 \text{Mittel } [1,2] = 35,65'' & [1,3] = 45,70'' & [1,4] = 38,58'' & [2,3] = 10,04''
 \end{array}$$

Ebenso auch noch  $[2,4] = 2,92''$  und  $[3,4] = 52,88''$ .

Wenn man alles zusammen nimmt, die Grade und Minuten wieder zusetzt, und das Ergebnis der Ausgleichung in Form eines Richtungssatzes mit Havighorst als Anfang =  $0^\circ 0' 0''$  schreibt, so hat man:

1. Havighorst =  $0^\circ 0' 0,00''$
2. Vahrendorf =  $50 \quad 46 \quad 35,65$
3. Litberg =  $107 \quad 55 \quad 45,70$
4. Stade =  $178 \quad 56 \quad 38,58$
5. Kaiserberg =  $236 \quad 41 \quad 37,75$

Betrachten wir weiter beispielshalber die Station Litberg näher, so sehen wir zuerst, dass dieselbe 4 Richtungen hat: Boursberg, Vahrendorf, Wilsede, Stade; es ist daher nach der Tabelle von § 79. auf S. 270 mit  $s = 4$  gemessen worden, d. h. 6 Winkel mit  $n = 6$  facher Wiederholung in Lage I und II oder  $2n = 12$  facher Wiederholung der Einzellagen. Es treten daher auf S. 72—73 des amtlichen Werkes „Elbkette“ im Ganzen 72 Winkelmessungen auf mit den Normalgleichungen:

$$\begin{array}{ll}
 24 \ A = +1,35'' & A = +0,056'' \\
 24 \ B = +1,20 & B = +0,050 \\
 24 \ C = -3,80 & C = -0,158 \\
 24 \ D = +1,25 & D = +0,052
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 24 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \end{array}} \right\} \quad (a)$$

Die hierzu gehörigen Gewichtsgleichungen werden ebenso einfach, nämlich:

$$\begin{array}{ll}
 (10) = 0,0417 [10] \\
 (11) = 0,0417 [11] \\
 (12) = 0,0417 [12] \\
 (13) = 0,0417 [13]
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (10) \\ (11) \\ (12) \\ (13) \end{array}} \right\} \quad (b)$$

Diese Gewichtsgleichungen sind entsprechend den Gewichtsgleichungen XV auf S. 159, deren erste heisst:

$$(1) = (\alpha \alpha) [1] + (\alpha \beta) [2] + (\alpha \gamma) [3]$$

Es ist also in der vorstehenden Gleichungsgruppe (b):

$$\begin{aligned}
 (\alpha \alpha) &= (\beta \beta) = (\gamma \gamma) = 0,0417 = \frac{1}{24} \\
 (\alpha \beta) &= (\alpha \gamma) = \dots = 0
 \end{aligned}$$



Auch die vorstehende Gruppe (a) ist im allgemeinen Falle durch die viel umständlicheren Gleichungen III und VIII c unten auf S. 156 vertreten.

Man sieht also deutlich, dass die Schreibersche Methode in der allgemeinen alten Besselschen Methode von S. 156—160 in aller Strenge mit enthalten ist, aber viel einfacher ist als jene.

In allem übrigen verweisen wir auf das oben S. 272 citierte amtliche Original-Werk „die Elbkette“.

#### Litteratur-Angaben zu § 75.—80.

Die ersten allgemeinen theoretischen Untersuchungen über Stations- und Netzausgleichungen mit Winkeln und Richtungen hat Hansen angestellt in seinen Abhandlungen „Von der Methode der kleinsten Quadrate 1868—1871“, (vgl. die Anmerkung unten auf S. 145). Hansen hat bereits die 3 Fälle erkannt, in welchen Stationsausgleichungen in Form von unabhängigen Richtungen dargestellt werden können, nämlich 1) lauter volle Sätze, 2) nicht mehr als 3 Strahlen, 3) Winkelmessung in allen Combinationen. Namentlich diesen dritten Fall hat Hansen behandelt in „fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in 10 Supplementen“ u. s. w. Abh. d. math. phys. Cl. d. K. sächs. Ges. d. Wiss., IX. Band, 1871, S. 169—184, „das Beobachtungsverfahren betreffend, welches Gauss in der Hannöverschen Gradmessung angewendet hat.“

General Schreiber hat die Methode der Winkelmessung in allen Combinationen, sowohl theoretisch behandelt als auch praktisch verwertet in dem amtlichen Werk: „Die Königl. Preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, II. Teil., 2. Abteilung, Berlin 1874“. Dazu gehört auch „Über die Anordnung von Horizontalwinkel-Beobachtungen auf der Station“, von Schreiber, „Zeitschr. f. Verm. 1878“, S. 209—237 und Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen, Schreiber, „Zeitschr. f. Verm., 1879“, S. 97—149.

Die Charakterisierung des Verfahrens der Winkelmessung in allen Combinationen ist von General Schreiber in der „Zeitschr. f. Verm. 1878“, S. 209—211 gegeben worden, wobei die Zeichen  $p$ ,  $n$ ,  $q$  andere Bedeutungen haben als in unserem Vorhergehenden, wie folgt:

Wenn auf einer Station  $n$  Richtungen vorhanden und  $p$  volle Beobachtungsreihen oder  $\frac{p}{2}$  volle Sätze (zwei Beobachtungsreihen hin und her bilden einen Satz) gemessen sind, so ist mit  $n \cdot p$  Einstellungen das Gewicht  $p$  für jede Richtung erreicht, wobei das Gewicht einer einmaligen Richtungsbeobachtung gleich 1 gesetzt ist. Misst man dagegen jeden Winkel  $q$  mal, so ist die Anzahl der Einstellungen gleich  $n(n-1)q$ , (da  $n$  Richtungen  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Winkel bilden). Um daher in beiden Fällen gleiche Gewichte der Resultate zu erhalten, muss man haben:

$$\frac{nq}{2} = p, \text{ woraus } q = \frac{2p}{n}$$

Es wird somit das Gewicht  $p$  für jede Richtung erreicht:

- 1) mit  $n \cdot p$  Einstellungen bei Messung voller Sätze,
- 2) mit  $2(n-1)p$  Einstellungen bei Messung von Winkeln.

Demnach erfordern Winkelbeobachtungen mehr, niemals aber doppelt so viel Einstellungen als Richtungsbeobachtungen, selbst nicht in deren günstigstem Falle (bei vollen Sätzen). Je weniger es auf einer Station möglich gewesen ist, in lauter vollen Sätzen zu beobachten (was schon bei Stationen von 4 Richtungen selten möglich ist), um so mehr geht die Überlegenheit der Richtungsbeobachtungen bezüglich der Einstellungszahl verloren; immerhin bleiben die letzteren gegen Winkelbeobachtungen im Vorteil. Oder mit andern Worten: je länger auf einer Station die Beobachtungsreihen, desto weniger Einstellungen sind nötig, um ein bestimmtes Gewicht der Resultate zu erreichen.

Trotz dieses Ergebnisses und im Widerspruch mit der seit Bessel allgemein befolgten geodätischen Praxis bin ich bei der Preussischen Landestriangulation (1868—1874) immer mehr zu der Überzeugung gekommen, dass die Überlegenheit langer Beobachtungsreihen gegenüber den kurzen, im Sinne der wie oben berechneten Gewichte, nur eine nominelle, an wirklicher Genauigkeit aber eine illusorische ist; dass vielmehr kurze Beobachtungsreihen den langen, insbesondere aber die kürzesten allen andern, d. h. reine Winkelbeobachtungen den Richtungsbeobachtungen vorzuziehen sind, weil sie bei gleichem Zeitaufwand genauere Resultate geben.

Die Gründe, die mich zu der oben ausgesprochenen Ansicht geführt haben, sind folgende:

1. Eine kurze Beobachtungsreihe giebt die Richtungsunterschiede im Allgemeinen genauer,



als eine lange, und dies ist um so mehr der Fall, je weniger fest die Aufstellung des Instrumentes und dieses selbst ist. Der obige Vergleich der Einstellungszahlen bei gleichen Gewichten der Resultate wird dadurch wesentlich zu Gunsten der Winkelbeobachtungen modifiziert. Dies tritt im stärksten Masse bei Pfeilerdrehung hervor, die bei Triangulationen in flachen, und selbst in bergigen, aber walddreichen Gegenden gar nicht zu vermeiden ist.

2. Bei kurzen Beobachtungsreihen kann man in derselben Zeit mehr Einstellungen machen, als bei langen, besonders aus dem Grunde, weil bei diesen der Zeitverlust infolge des Ausbleibens von Lichtern und sonstiger Unterbrechungen viel grösser ist, als bei jenen.

3. Bei Anwendung von Winkelbeobachtungen kann auf jeder Station nach einem bestimmten, im voraus entworfenen Beobachtungsplan, welcher die Anzahl der Messungen jedes Winkels, die Fernrohr- und Kreislagen u. s. w. genau vorschreibt, beobachtet werden, während eine derartige Anordnung für Richtungsbeobachtungen undurchführbar ist. Bei erstern wird dadurch eine weit vollständigere Elimination von konstanten Fehlern und Teilungsfehlern möglich.

4. Auf den meisten Stationen giebt es eine oder mehrere Richtungen, deren Beobachtung weit schwerer und seltener als die der übrigen, und nur mittelst rascher Wahrnehmung einzelner Gelegenheiten von kurzer Dauer gelingt. Zur Ausnützung solcher Gelegenheiten ist die Winkel- methode weit geeigneter als die Richtungsmethode.

Diese Erwägungen und Erfahrungen sind es, die mich schon seit dem Jahre 1871 zur ausschliesslichen Anwendung von Winkelbeobachtungen geführt haben (vgl. Hauptdreiecke, 2. Band, 2. Abteilung: die Stationen Marienberg, Brautberg, Keulenberg, Brandberg und Schneekoppe der Märkisch-Schlesischen Kette, sowie im 3. Bande sämtliche Stationen des Märkischen Netzes); aber erst 1875 habe ich dieser Methode diejenige Ausbildung gegeben, in der sie seitdem konsequent von der trigonometrischen Abteilung für alle Messungen erster Ordnung angewandt ist, und zwar mit grossem Gewinn, nicht nur an Genauigkeit, sondern auch an Zeit.

### § 81. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkelausgleichung und Richtungs- ausgleichung.

Nachdem wir im Bisherigen schon manche Beziehungen zwischen Winkeln und Richtungen betrachtet haben, z. B. die Stationsausgleichung von Winkelmessungen in allen Combinationen sowohl mit Winkeln als auch mit Richtungen als Unbekannten (§ 77.), wollen wir noch eine zur Aufklärung im Allgemeinen nützliche Theorie vorführen aus dem Werke: „Die Königlich Preussische Landestriangulation“. Hauptdreiecke. Zweiter Teil. Zweite Abteilung. Berlin 1874. Auf S. 303–313

dieselbst findet sich eine Abhandlung von *Schreiber*: „Vereinfachte Form der Stationsausgleichungsergebnisse“, deren Grundgedanken darin besteht, dass den Stationsausgleichungsergebnissen nicht (wie bei Bessel) die Form von *Winkeln* ..., sondern die Form von *Richtungen* gegeben wird.

Wenn 3 Strahlen  $OP^0 OP' OP''$  mehrfach eingeschnitten sind, so kann man als Unbekannte der Ausgleichung zunächst die 2 Winkel  $A, B$  betrachten, welche die Strahlen  $OP' OP''$  mit dem Strahl  $OP^0$  bilden (Fig. 1.). In dieser Weise wird bei der Besselschen Ausgleichung verfahren (welche in unserem § 71. gelehrt wurde). Wir gehen nun aber zu einer anderen Anschauung über, und betrachten nach Fig. 2. die 3 Richtungen  $ABC$  als Unbekannte, dann ist vorerst so viel klar, dass  $B - A$  nach Fig. 2. =  $A$  nach Fig. 1. ist, oder allgemeiner:

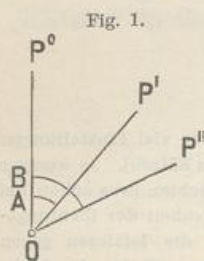


Fig. 1.

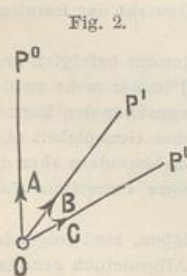


Fig. 2.

Annahme Fig. 1.

Winkel  $A$  = Richtungsunterschied

„  $B$  „

Annahme Fig. 2.

$B - A$

$C - A$

(1)