Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 81. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkelausgleichung und Richtungsausgleichung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

als eine lange, und dies ist um so mehr der Fall, je weniger fest die Aufstellung des Instrumentes und dieses selbst ist. Der obige Vergleich der Einstellungszahlen bei gleichen Gewichten der Resultate wird dadurch wesentlich zu Gunsten der Winkelbeobachtungen modifiziert. Dies tritt im stärksten Masse bei Pfeilerdrehung hervor, die bei Triangulationen in flachen, und selbst in bergigen, aber waldreichen Gegenden gar nicht zu vermeiden ist.

2. Bei kurzen Beobachtungsreihen kann man in derselben Zeit mehr Einstellungen machen, als bei langen, besonders aus dem Grunde, weil bei diesen der Zeitverlust infolge des Ausbleibens von Lichtern und sonstiger Unterbrechungen viel grösser ist, als bei jenen.

3. Bei Anwendung von Winkelbeobachtungen kann auf jeder Station nach einem bestimmten, im voraus entworfenen Beobachtungsplan, welcher die Anzahl der Messungen jedes Winkels, die Fernrohr- und Kreislagen u. s. w. genau vorschreibt, beobachtet werden, während eine derartige Anordnung für Richtungsbeobachtungen undurchführbar ist. Bei erstern wird dadurch eine weit vollständigere Elimination von konstanten Fehlern und Teilungsfehlern möglich.

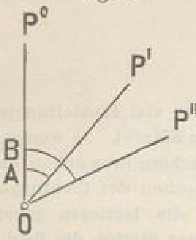
4. Auf den meisten Stationen giebt es eine oder mehrere Richtungen, deren Beobachtung weit schwerer und seltener als die der übrigen, und nur mittelst rascher Wahrnehmung einzelner Gelegenheiten von kurzer Dauer gelingt. Zur Ausnützung solcher Gelegenheiten ist die Winkelmethode weit geeigneter als die Richtungsmethode.

Diese Erwägungen und Erfahrungen sind es, die mich schon seit dem Jahre 1871 zur ausschliesslichen Anwendung von Winkelbeobachtungen geführt haben (vgl. Hauptdreiecke, 2. Band, 2. Abteilung: die Stationen Marienberg, Brautberg, Keulenberg, Brandberg und Schneekoppe der Märkisch-Schlesischen Kette, sowie im 3. Bande sämtliche Stationen des Märkischen Netzes); aber erst 1875 habe ich dieser Methode diejenige Ausbildung gegeben, in der sie seitdem konsequent von der trigonometrischen Abteilung für alle Messungen erster Ordnung angewandt ist, und zwar mit grossem Gewinn, nicht nur an Genauigkeit, sondern auch an Zeit.

§ 81. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkelausgleichung und Richtungsausgleichung.

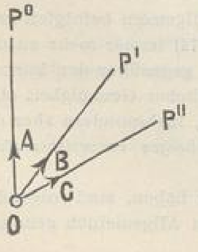
Nachdem wir im Bisherigen schon manche Beziehungen zwischen Winkeln und Richtungen betrachtet haben, z. B. die Stationsausgleichung von Winkelmessungen in allen Combinationen sowohl mit Winkeln als auch mit Richtungen als Unbekannten (§ 77.), wollen wir noch eine zur Aufklärung im Allgemeinen nützliche Theorie vorführen aus dem Werke: „Die Königlich Preussische Landestriangulation". Hauptdreiecke. Zweiter Teil. Zweite Abteilung. Berlin 1874. Auf S. 303—313 daselbst findet sich eine Abhandlung von *Schreiber:* „Vereinfachte Form der Stationsausgleichungsresultate", deren Grundgedanken darin besteht, dass den Stationsausgleichungsresultaten nicht (wie bei Bessel) die Form von *Winkeln* ..., sondern die Form von *Richtungen* gegeben wird.

Fig. 1.



Wenn 3 Strahlen $O\,P^\circ\;O\,P'\;O\,P''$ mehrfach eingeschnitten sind, so kann man als Unbekannte der Ausgleichung zunächst die 2 *Winkel* A, B betrachten, welche die Strahlen $O\,P'\;O\,P''$ mit dem Strahl $O\,P^\circ$ bilden (Fig. 1.). In dieser Weise wird bei der Bessel schen Ausgleichung verfahren (welche in unserem § 71. gelehrt wurde). Wir gehen nun aber zu einer anderen Anschauung über, und betrachten nach Fig. 2. die 3 *Richtungen* $A\,B\,C$ als Unbekannte, dann ist vorerst so viel klar, dass $B-A$ nach Fig. 2. $= A$ nach Fig. 1. ist, oder allgemeiner:

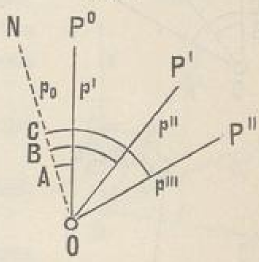
Fig. 2.



Annahme Fig. 1.		Annahme Fig. 2.	
Winkel A	= Richtungsunterschied	$B-A$	(1)
„ B	„	$C-A$	
. . . . .	. . . .	. . .	

Um die zweite Annahme aus der ersten hervorgehen zu lassen, erinnere man sich, dass „Richtungen“ nichts anderes sind, als Winkel, welche die geodätischen Strahlen $O\,P^\circ$ $O\,P'$ $O\,P''$ mit irgend *einem*, seiner geodätischen Lage nach unbekannten, aber für alle Richtungen gemeinsamen Anfangsstrahl $O\,N$ bilden, weshalb die Richtungen A , B , C von Fig. 2. ausführlicher durch Fig. 3. dargestellt werden können. Wenn nun in Fig. 3. $O\,N$ ebenfalls ein geodätischer, miteingeschnittener Strahl *wäre*, so würde man offenbar für Fig. 3. ein Normalgleichungssystem von der allgemeinen Form (10) §. 71. S. 235 erhalten, nämlich:

Fig. 3.



$$\left.\begin{aligned}(a\,a)\,A + (a\,b)\,B + (a\,c)\,C + (a\,l) = 0\\(a\,b)\,A + (b\,b)\,B + (b\,c)\,C + (b\,l) = 0\\(a\,c)\,A + (b\,c)\,B + (c\,c)\,C + (c\,l) + 0\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

wobei die Coefficienten $(a\,a)$ $(a\,b)\ldots$ die Bedeutungen von § 71. S. 236 haben, jedoch so, dass (nach Fig. 3.) p° dem fingierten Strahl $O\,N$ entspricht, p' dem Strahl P° u. s. w.

Um vollends die Normalgleichungen (2) völlig dem Falle von Fig. 3. oder Fig. 2. anzupassen, hat man nichts zu thun, als alle p°, d. h. $p_1{}^\circ$, $p_2{}^\circ$, $p_3{}^\circ \ldots =$ Null zu setzen. Thut man dieses in (8) , (9) und (11) § 71. S. 235—236, so findet man:

$$\begin{aligned}(a\,a) + (a\,b) + (a\,c) = [p'] &- \frac{p_1'}{[p_1]}(p_1' + p_1'' + p_1''' + \ldots)\\ &- \frac{p_2'}{[p_2]}(p_2' + p_2'' + p_2''' + \ldots)\\ &- \frac{p_3'}{[p_3]}(p_3' + p_3'' + p_3''' + \ldots)\end{aligned}$$

Nun ist aber in diesem Falle, weil alle $p^\circ = 0$ sind,

$$[p_1] = p_1' + p_1'' + p_1''' + \ldots$$
$$[p_2] = p_2' + p_2'' + p_2''' + \ldots \quad \text{u. s. w.}$$

also $$(a\,a) + (a\,b) + (a\,c) = [p'] - (p_1' + p_2' + p_3' + \ldots) = 0$$

Auf ähnliche Weise beweist man auch, dass alle anderen Vertikalreihen der Normalgleichungen (2) die Summe Null geben, d. h.:

$$\left.\begin{aligned}(a\,a) + (a\,b) + (a\,c) = 0\\(a\,b) + (b\,b) + (b\,c) = 0\\(a\,c) + (b\,c) + (c\,c) = 0\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$(a\,l) + (b\,l) + (c\,l) = 0 \qquad (4)$$

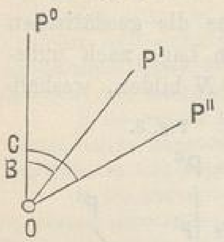
Naturgemäss haben wir damit gefunden, dass ein Normalgleichungssystem von der Form (2), welches sich auf *Richtungen* A , B , $C\ldots$ bezieht, keine eindeutige Auflösung zulässt, denn diese Gleichungen (2) sind vermöge (3) und (4) nicht untereinander unabhängig.

Obgleich die elementare Algebra die Unmöglichkeit einer eindeutigen Auflösung der Gleichungen (2) lehrt, wollen wir dieses doch noch unmittelbar verfolgen: Wenn A , B , C ein System ist, welches den Gleichungen (2) genügt, und man setzt an deren Stelle bzw. $A + z$, $B + z$, $C + z$, so hat man aus (2):

$$(a\,a)\,(A + z) + (a\,b)\,(B + z) + (a\,c)\,(C + z) + (a\,l) = 0,$$

d. h.: $$(a\,a)\,A + (a\,b)\,B + (a\,c)\,C + (a\,l) + \{(a\,a) + (a\,b) + (a\,c)\}\,z = 0$$

Fig. 4.



Der erste Teil verschwindet wegen (2) und der zweite Teil wegen (3); es ist also die Gleichung, welche für A, B, C befriedigt war, auch für $A+z$, $B+z$, $C+z$ allgemein richtig.

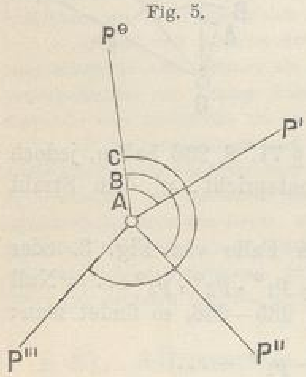
Da eine Richtung unbestimmt bleibt, so kann man eine solche $=0$ setzen, z. B. $A=0$ gesetzt, giebt aus (2):

$$\left.\begin{aligned}(a\,b)\,B+(a\,c)\,C+(a\,l)&=0\\(b\,b)\,B+(b\,c)\,C+(b\,l)&=0\\(b\,c)\,B+(c\,c)\,C+(c\,l)&=0\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Wegen (3) und (4) kann man hier eine Gleichung beliebig weglassen, z. B. die erste, und dann erhält man die Winkel B und C (Fig. 4.) eindeutig bestimmt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(b\,b)\,B+(b\,c)\,C+(b\,l)&=0\\(b\,c)\,B+(c\,c)\,C+(c\,l)&=0\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Fig. 5.



Die umgekehrte Operation, nämlich Winkelgleichungen in Richtungsgleichungen zu verwandeln, ergiebt sich ebenfalls aus (3) und (4), wie an einem Zahlenbeispiel erläutert werden soll.

Wenn gegeben ist (zu Fig. 5.):

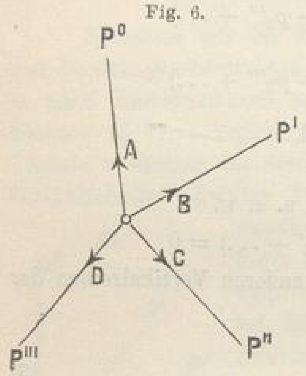
$$\left.\begin{aligned}+27\,A-\;\,9\,B-\;\,4\,C+13{,}4&=0\\-\;\,9\,A+18\,B-\;\,6\,C-\;\,7{,}0&=0\\-\;\,4\,A-\;\,6\,B+15\,C-12{,}9&=0\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

so bildet man die Summengleichung:

$$+14\,A+3\,B+5\,C-6{,}5=0$$

und diese setzt man mit Änderung der Vorzeichen zu den Gleichungen (7); also:

Fig. 6.



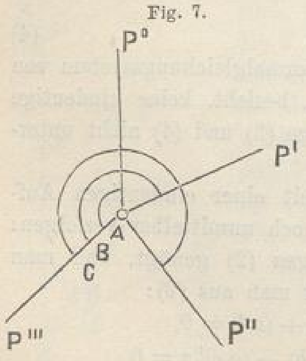
Summen:

$$\left.\begin{array}{r|l}-22 & -14\,A-\;\,3\,B-\;\,5\,C+\;\,6{,}5=0\\+14 & +27\,A-\;\,9\,B-\;\,4\,C+13{,}4=0\\+\;\,3 & -\;\,9\,A+18\,B-\;\,6\,C-\;\,7{,}0=0\\+\;\,5 & -\;\,4\,A-\;\,6\,B+15\,C-12{,}9=0\end{array}\right\}\qquad(8)$$

Endlich bildet man daraus, mit Verschiebung der Bezeichnungen $A\,B\,C\,D$ nach Fig. 1. und Fig. 2.:

$$\left.\begin{aligned}+22\,A-14\,B-\;\,3\,C-\;\,5\,D+\;\,6{,}5&=0\\-14\,A+27\,B-\;\,9\,C-\;\,4\,D+13{,}4&=0\\-\;\,3\,A-\;\,9\,B+18\,C-\;\,6\,D-\;\,7{,}0&=0\\-\;\,5\,A-\;\,4\,B-\;\,6\,C+15\,D-12{,}9&=0\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Fig. 7.



Dadurch haben wir nun die 3 Normalgleichungen (7), welche sich auf 3 Winkel A, B, C von Fig. 5. beziehen, umgewandelt in 4 Normalgleichungen (9) mit 4 Richtungen A, B, C, D von Fig. 6.

Man kann nun wieder irgend eine *andere* Richtung $=0$ setzen, z. B. D, und erhält damit aus (9):

$$\left.\begin{aligned}+22\,A-14\,B-\;\,3\,C+\;\,6{,}5&=0\\-14\,A+27\,B-\;\,9\,C+13{,}4&=0\\-\;\,3\,A-\;\,9\,B+18\,C-\;\,7{,}0&=0\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Dieses Winkelsystem (10) bezieht sich auf dieselben 4 Strahlen wie das Winkelsystem (7), abgesehen von den Bezeichnungen $A\ B\ C$ (vgl. Fig. 5. und 7.). Man kann also durch Vermittlung von Richtungen ein Winkelsystem auf andere Nullpunkte reduzieren.

Wir wollen diese allgemeine Theorie dazu benützen, bzw. daran erproben, dass wir den schon in § 77. erledigten Fall von Winkelmessungen in allen Combinationen *nochmals* vornehmen:

Fig. 8.

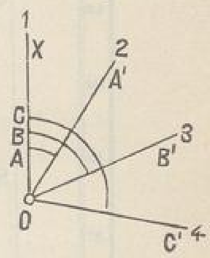


Fig. 8. stellt einen solchen Fall mit 4 Strahlen und 6 Winkeln vor.

Zwischen den Strahlen 1, 2, 3, 4 sind alle 6 Winkelcombinationen (1,2) (1,3) (1,4) (2,3) (2,4) (3,4) gemessen.

Die 3 Winkel $A\ B\ C$ von Fig. 8. seien die unabhängigen Unbekannten, dann hat man für die erste Messung die Fehlergleichung:

$$v_{12} = A - (1,2),$$

oder für die 4te Messung besteht die Fehlergleichung:

$$v_{23} = B - A - (2,3) \text{ u. s. w.}$$

Alle 6 derartigen Fehlergleichungen sind (ebenso wie in (2) S. 260):

$$\left.\begin{array}{l} v_{12} = +A \quad . \, . \quad . \, . - (1,2) \\ v_{13} = \quad . \, . + B \quad . \, . - (1,3) \\ v_{14} = \quad . \, . \quad . \, . + C - (1,4) \\ v_{23} = -A + B \quad . \, . - (2,3) \\ v_{24} = -A \quad . \, . + C - (2,4) \\ v_{34} = \quad . \, . - B + C - (3,4) \end{array}\right\} \tag{11}$$

die Normalgleichungen hiezu:

$$\left.\begin{array}{l} 3A - B - C - (a\,l) = 0 \\ -A + 3B - C - (b\,l) = 0 \\ -A - B + 3C - (c\,l) = 0 \end{array}\right\} \tag{12}$$

Die Absolutglieder hiezu sind (ebenso wie bei (3) S. 260):

$$\left.\begin{array}{l} (a\,l) = (1,2) - (2,3) - (2,4) \\ (b\,l) = (1,3) + (2,3) - (3,4) \\ (c\,l) = (1,4) + (2,4) + (3,4) \end{array}\right\} \tag{13}$$

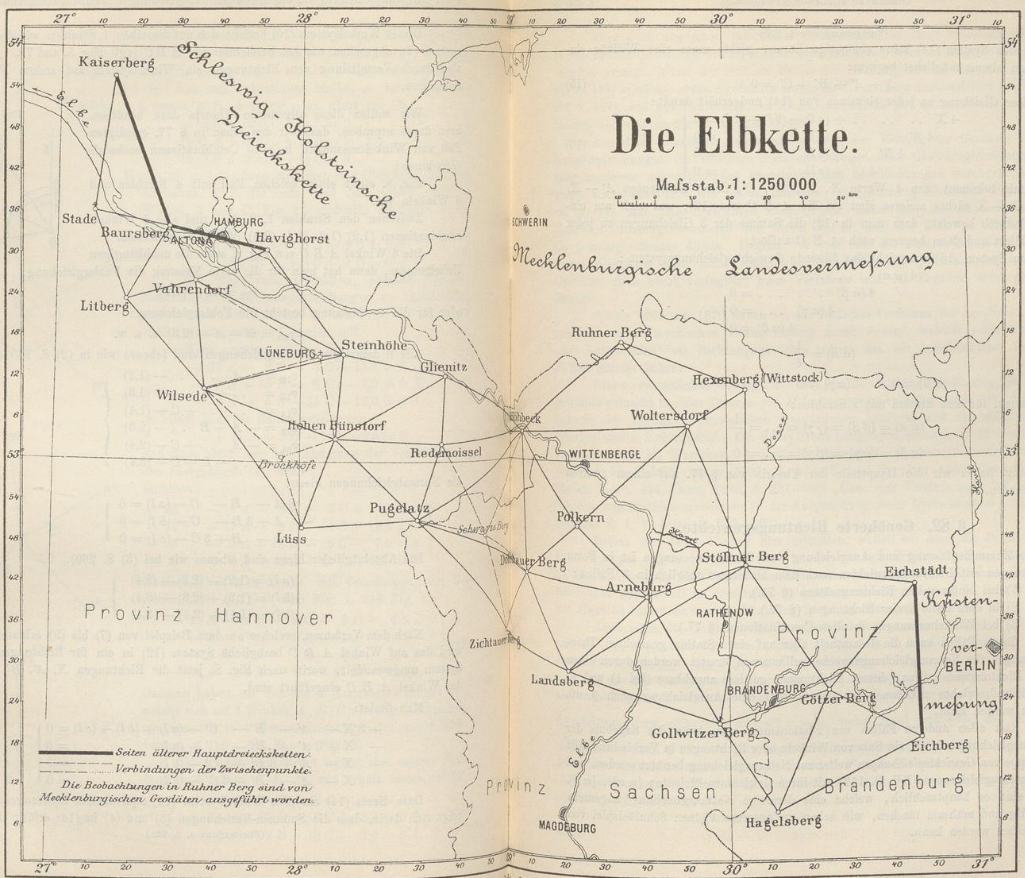
Nach dem Verfahren, welches an dem Beispiel von (7) bis (9) erläutert wurde, wird das auf Winkel $A\ B\ C$ bezügliche System (12) in ein für Richtungen giltiges System umgewandelt, worin nach Fig. 8. jetzt die Richtungen X, A', B', C' statt der Winkel $A\ B\ C$ eingeführt sind.

Man findet:

$$\left.\begin{array}{l} +3X - A' - B' - C' + (a\,l) + (b\,l) + (c\,l) = 0 \\ -X + 3A' - B' - C' - (a\,l) = 0 \\ -X - A' + 3B' - C' - (b\,l) = 0 \\ -X - A' - B' + 3C' - (c\,l) = 0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Dass dieses (14) ein dem Winkelsystem (12) äquivalentes Richtungssystem ist, zeigt sich darin, dass die Summen-Beziehungen (3) und (4) in (14) erfüllt sind.

(Fortsetzung s. S. 282.)



(Zu § 80 Seite 272—274.)

(Fortsetzung von S. 279.)

Da das System (14) keine eindeutige Lösung giebt, muss eine Willkür eintreten; man nimmt möglichst bequem:

$$X + A' + B' + C' = 0 \tag{15}$$

addiert diese Gleichung zu jeder einzelnen von (14) und erhält damit:

$$\left.\begin{array}{rl} 4X \;\ldots\;\ldots\;\ldots + (a\,l) + (b\,l) + (c\,l) & = 0 \\ 4A' \;\ldots\;\ldots - (a\,l) & = 0 \\ 4B' \;\ldots - (b\,l) & = 0 \\ 4C' + (c\,l) & = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Damit bekommt man 4 Werte X, A', B', C', deren Differenzen $A' - X$, $B' - X$, $C' - X$ nichts anderes sind als die $A\ B\ C$ aus (12), was sich am einfachsten dadurch beweist, dass man in (12) die Summe der 3 Gleichungen zu jeder einzeln addiert und dann bequem nach $A\ B\ C$ auflöst.

Dem System (16) entspricht das folgende Gewichtsgleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 4(\alpha\,\alpha) \;\ldots\;\ldots\;\ldots = 0 \\ 4(\alpha\,\beta) \;\ldots\;\ldots = 0 \\ 4(\alpha\,\gamma) \;\ldots = 0 \\ 4(\alpha\,\delta) = 0 \end{array}$$

woraus

$$(\alpha\,\alpha) = \frac{1}{4}$$

$$(\alpha\,\beta) = 0 \qquad (\alpha\,\gamma) = 0 \qquad (\alpha\,\delta) = 0$$

oder allgemein für eine Station mit s Strahlen:

$$(\alpha\,\alpha) = (\beta\,\beta) = (\gamma\,\gamma) = \ldots = \frac{1}{s}$$

$$(\alpha\,\beta) = (\alpha\,\gamma) = (\beta\,\gamma) = \ldots = 0$$

Damit haben wir die Hauptteile der Theorie von § 77. auf einem zweiten Wege gefunden.

§ 82. Genäherte Richtungsgewichte.

Die Zusammenfassung und Ausgleichung von Stationsmessungen ist in Form von Richtungen mit Richtungsgewichten nach dem bisherigen möglich in 3 Fällen:

1) bei lauter vollen Richtungssätzen (§ 75.),
2) in dem Falle *dreier* Richtungen (§ 76.),
3) bei Winkelmessungen in allen Combinationen (§ 77.)

In diesen Fällen kann die Gesamtheit aller auf einer Station gemachten Theodolitmessungen für Netzausgleichungszwecke vollkommen ersetzt werden durch *einen* Satz von Richtungsmessungen, dessen Richtungen gewisse angebbare (bei 1) und 3) gleiche) Einzelgewichte zukommen, so dass darauf eine Ausgleichung nach § 40. gegründet werden kann.

In fast allen anderen Fällen von Stationsmessungen kann das Ergebnis der Stationsausgleichung nur als ein Satz von Winkeln oder Richtungen in Verbindung mit einer Gruppe von *Gewichtsgleichungen* weiter zur Netzausgleichung benützt werden, und diese Gewichtsgleichungen (XV. S. 159) mit ihren Gewichtscoefficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$, $[\alpha\,\gamma]\ldots$ sind es hauptsächlich, welche eine derartige Netzausgleichung ungemein schwerfällig und mühsam machen, wie schon an unserem kleinen Schulbeispiel von § 72. gesehen werden kann.