Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

Erster Teil. Parallelprojektion.

Erster Teil.

Parallelprojektion.

§ 3. Hauptsätze der Parallelprojektion.

1) Aus den Anfangsgründen der Stereometrie ergeben sich einige wichtige Sätze, die sowohl für die schiefe als auch für die gerade Parallelprojektion von grundlegender Bedeutung sind.

Erklärung. **Strecken, Gerade oder ebene Figuren, die der Bildebene parallel sind, heißen frontal.**[1])

I. **Jede frontale Strecke hat ein paralleles und gleiches Bild.**

Zieht man (Fig. 5) durch alle Punkte der zur Bildebene 𝔅 parallelen Strecke AB die projizierenden Strahlen parallel einer beliebig gewählten Richtung, so schneidet die durch sie bestimmte projizierende Ebene 𝔈 die Bildebene 𝔅 in einer zu AB parallelen Spur A'B' (L. I. § 71, 1), also ist A'B' ∥ AB. Da AA' ∥ BB' ist, so ist AA'B'B ein Parallelogramm und daher auch A'B' = AB. Die Parallelprojektion einer Strecke auf eine zu ihr parallele Ebene kann demnach als eine Parallelverschiebung längs der Projektionsstrahlen der Endpunkte aufgefaßt werden.

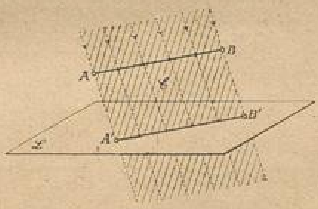


Fig. 5.

II. **Jede frontale ebene Figur hat ein ihr kongruentes Bild.**

Die Parallelprojektion A'B'C'D'E' (Fig. 6) der zur Bildebene 𝔅 parallelen Figur ABCDE ist dieser kongruent (Beweis!). Man kann sich das Bild durch Parallelverschiebung der Figur ABCDE entstanden denken.

Welches Schrägbild hat ein frontaler Kreis?

2) Bezeichnet a' die Projektion einer beliebigen Strecke a, so heißt das Verhältnis a' : a ihr **Projektions-** oder **Abbildungsverhältnis.**

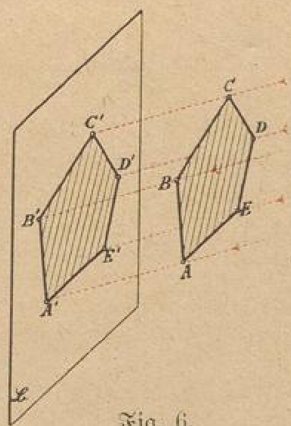


Fig. 6.

[1]) frons (lat.) = Stirn.

III. **Parallele Strecken haben parallele Bilder von gleichem Projektionsverhältnis.**

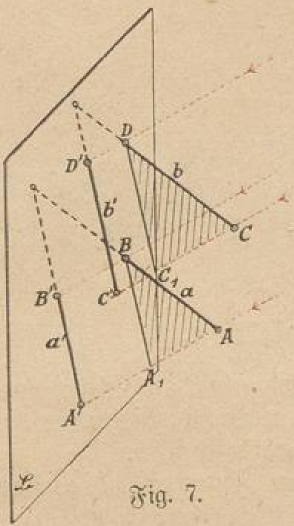


Fig. 7.

Sind $AB = a$ und $CD = b$ (Fig. 7) zwei parallele Strecken, so müssen auch ihre projizierenden Ebenen einander parallel sein (L. I. § 63, 4) und deshalb die Bildebene in parallelen Spuren schneiden (L. I. § 70, 1). Daher ist $A'B' \parallel C'D'$. Zieht man jetzt $BA_1 \parallel B'A'$ und $DC_1 \parallel D'C'$, so ist $\triangle ABA_1 \sim \triangle CDC_1$. Folglich verhält sich $\frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1D}{CD}$ oder, da $A_1B = A'B' = a'$ und $C_1D = C'D' = b'$ ist,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

Parallele Strecken werden also durch Parallelprojektion im gleichen Verhältnis gekürzt oder gestreckt. Was folgt daraus für die Bilder von parallelen Strecken von gleicher Länge? Vgl. die Schattenbilder der parallelen Stäbe von Zäunen.

Parallelogramme erscheinen in der Abbildung wieder als Parallelogramme.

Für die gerade Parellelprojektion ist

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \cos\varphi,$$

wo φ den Neigungswinkel der Strecken a und b zu der Bildebene bedeutet.

IV. **Teilverhältnisse von Strecken bleiben bei Parallelprojektion erhalten.**

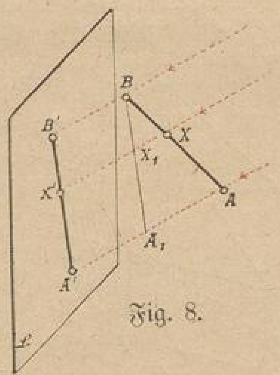


Fig. 8.

Denn wird (Fig. 8) die Strecke AB durch den Punkt X im Verhältnis m:n geteilt, so wird auch ihr Bild A'B' durch die Projektion X' des Teilpunktes im gleichen Verhältnis geteilt.

$$\frac{AX}{XB} = \frac{A'X'}{X'B'} = \frac{m}{n}.$$

Wird z. B. AB durch X halbiert, so wird auch A'B' durch X' halbiert.

Erster Abschnitt.

Schiefe Parallelprojektion.

(Parallelprojektion auf eine Tafel.)

§ 4. Bestimmung der Richtung der Projektionsstrahlen. Die erste Grundaufgabe.

1a) Für alle Darstellungen in schiefer Parallelprojektion benutzen wir als **Bildebene** 𝔅 (Fig. 9) die lotrecht gehaltene Zeichenebene (Wandtafel!). Wir setzen ein für allemal fest, daß die Projektionsstrahlen von vorn und oben kommen und zwar im allgemeinen von rechts oben nach links unten verlaufen.

Die lotrecht stehende Bildebene 𝔅 schneiden wir durch eine horizontale Ebene 𝔊, die im allgemeinen zur Aufnahme der darzustellenden Gebilde dient und daher **Grundebene** heißt. Ihre Schnittgerade OX mit der Bildebene heißt **Projektions-** oder **Bildachse.**

b) Von besonderer Bedeutung für unser Abbildungsverfahren sind die zur Bildebene senkrechten Geraden, die wir im folgenden zur

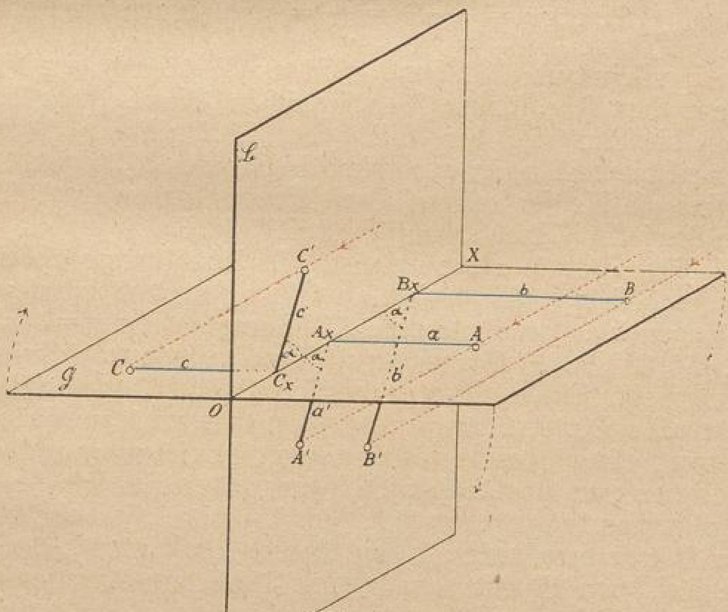


Fig. 9.

Abkürzung **Tiefenlinien** nennen. Es seien $AA_x = a$, $BB_x = b$ und $CC_x = c$ (Fig. 9) drei in der Grundebene gelegene Tiefenlinien, deren Fußpunkte auf der Bildachse entsprechend die Punkte A_x, B_x

und C_x sind. Projizieren wir nach Wahl irgend einer Projektionsrichtung die Strecken a, b und c auf die Bildebene, so sind nach § 3, S. III ihre Bilder a′, b′ und c′ parallel, schneiden also die Bildachse unter dem gleichen Winkel α, ferner haben sie das gleiche Projektionsverhältnis q ($a' : a = b' : b = c' : c = q$).

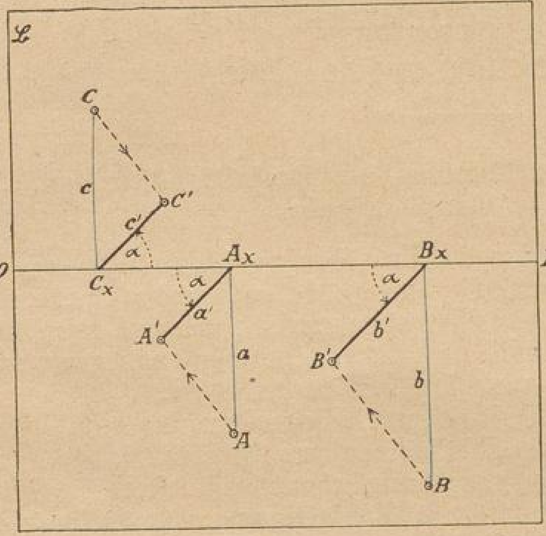


Fig. 10.

Die Angabe des Projektionsverhältnisses q und des Winkels α gibt uns das einfachste Mittel an die Hand, Schrägbilder ohne Benutzung der projizierenden Strahlen zu entwerfen, da durch q und α die Richtung der Projektionsstrahlen vollständig festgelegt ist. Durch q ist zunächst nur der Neigungswinkel φ bestimmt, unter dem die Projektionsstrahlen (z. B. AA′) die Bildebene treffen. Denn es ist z. B. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{A'A_x}{AA_x} = \frac{a'}{a} = q$[1]). (Warum reicht die Angabe von q allein zur Abbildung nicht aus?) Durch den Winkel α, in dem aus den Fig. 9 und 10 ersichtlichen Sinne gemessen, wird dann noch die Richtung der Bilder der Tiefenlinien eindeutig bestimmt, weil die verlängert gedachten Bildstrecken a′, b′ und c′ nichts anderes sind als die senkrechten Projektionen der durch A, B und C gehenden Projektionsstrahlen auf 𝔅 (L. I. § 72, 3a).

Die Größen q und α nennt man die **Abbildungszahlen.** Man kann für sie beliebige Werte wählen. Der Zweckmäßigkeit und Einfachheit wegen bevorzugt man die Abbildungszahlen $q = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ und $\alpha = 30°, 45°, 60°, 90°$.[2]) Oft wird q als **Verkürzungsverhältnis** bezeichnet, da es meist kleiner als oder höchstens gleich 1 gewählt wird.

c) Für alle Darstellungen denken wir uns im folgenden, da wir nur eine Zeichenebene zur Verfügung haben, die Grundebene um die Achse OX samt den in ihr liegenden Figuren heruntergeklappt (s. Fig. 9 und 10), so daß der vordere Teil von 𝔊 mit dem unteren von 𝔅 und der hinter der Bildebene gelegene Teil von 𝔊 mit dem oberen Teile von 𝔅 zusammenfällt.

---

[1]) Für $\frac{a'}{a} = q = 1$ z. B. ist $\varphi = 45°$; für $\frac{a'}{a} = \frac{1}{2}$ ist $\varphi \approx 63{,}43°$.

[2]) Die Wahl dieser Winkel ist deswegen praktisch und bequem, weil sich dabei stets die gebräuchlichen rechtwinkligen Zeichendreiecke mit 30° und 60°, 45° und 45° verwenden lassen.

2 a) Erste Grundaufgabe. Die schiefe Parallelprojektion eines in der Grundebene gelegenen Punktes A für die Abbildungszahlen q und α (z. B. $\frac{1}{2}$ und 45°) zu bestimmen.

Wir fällen (Fig. 11) von A auf die Bildachse das Lot AA_x und ziehen unter einem Winkel von 45° zur Bildachse $A_x A' = \frac{1}{2} A_x A$. A′ ist dann das gesuchte Bild von A.

Man findet demnach das Schrägbild eines beliebigen in der Grundebene gelegenen Punktes A, indem man auf die Bildachse das Lot AA_x fällt und diese Strecke für die gegebenen Abbildungszahlen abbildet. Der Endpunkt A′ der Bildstrecke $A_x A'$ ist das gesuchte Bild des Punktes A.

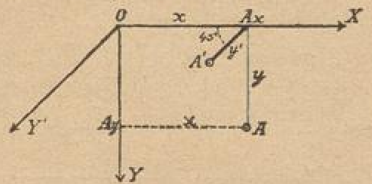


Fig. 11.

Die Abbildung mehrerer Punkte (Fig. 10), z. B. A, B und C, für dieselben Abbildungszahlen kann dadurch sehr vereinfacht werden, daß die Verbindungsstrecken von A, B und C mit ihren Bildern A′, B′ und C′ AA′, BB′, CC′ einander parallel sind (Grund?). Es braucht infolgedessen bei der Zeichnung nur für ein Achsenlot (AA_x) die Verkürzung bestimmt zu werden.

b) Statt unmittelbar durch seine Lage kann ein Punkt A auch durch seine senkrechten Abstände von einem rechtwinkligen Achsensystem (Koordinatensystem) gegeben sein (Fig. 11). Die Bildachse wählen wir als x-Achse und die in einem beliebigen Punkte O auf ihr in der Grundebene errichtete Senkrechte als y-Achse. $OA_x = x$ ist die Abszisse und $OA_y = A_x A = y$ die Ordinate des Punktes A, x und y sind seine Koordinaten.

Aufgabe. Bilde für $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$ die Punkte ab, deren Koordinaten sind $x = \pm 3$; $y = \pm 2{,}4$ (Längeneinheit 1 cm).

Wie bildet sich die y-Achse ab?

§ 5. Die Abbildung ebener, in der Grundebene gelegener oder ihr paralleler Figuren.

1) Aufgabe 1. Das Schrägbild eines in der Grundebene gelegenen Rechtecks ABCD, dessen Seite AB auf der Bildachse liegt, zu zeichnen (Fig. 12). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Die Seiten AB und CD bilden sich in natürlicher Größe ab, und zwar fällt AB mit seinem Bilde zusammen. Dagegen erscheinen die zur Bildebene senkrechten Strek-

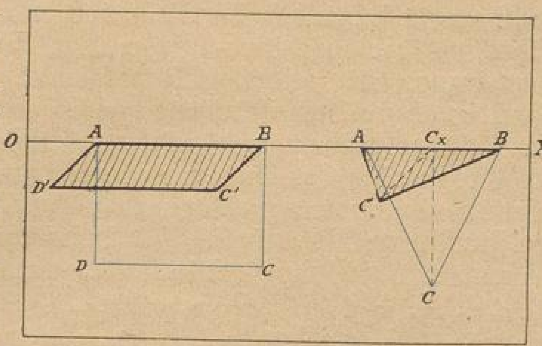


Fig. 12.

ken AD und BC im Bilde auf die Hälfte verkürzt und ihre Projektionen A′C′ und B′D′ bilden mit der Bildachse einen Winkel von 45°. Zeichnung!

Aufgabe 2. Das Schrägbild eines in der Grundebene gelegenen gleichschenkligen Dreiecks ABC, dessen Seite AB auf der Bildachse liegt, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Lösung s. Fig. 12.

Aufgabe 3. Das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden regelmäßigen Sechsecks zu zeichnen, von dem ein Seitenpaar der Bildachse parallel ist (Fig. 13). $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

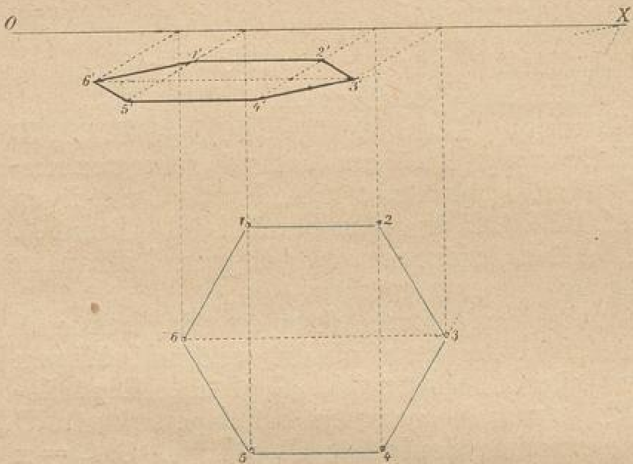


Fig. 13.

Wie bilden sich die frontalen Strecken $\overline{12}$, $\overline{54}$, $\overline{63}$ ab? Eine sehr scharfe Genauigkeitsprobe für die Zeichnung besteht darin, daß die Verlängerungen der Seiten der Urfigur und der ihrer zugehörigen Bilder (z. B. $\overline{43}$ und $\overline{4'3'}$) sich auf der Achse schneiden müssen. (Grund?) Vgl. § 20. 1b u. 2.)

Aufgabe 4. Das Schrägbild eines beliebig in der Grundebene gelegenen Fünfecks $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ zu zeichnen. Genauigkeitsprobe! (Vgl. Aufgabe 3.)

Aufgabe 5. Ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkte durch ihre Koordinaten gegeben sind, abzubilden. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

A: $x = 3$, $y = 2$; B: $x = 7$, $y = 4$; C: $x = 5$, $y = 6$. Längeneinheit 1 cm.

2) Das **Bild einer Kurve,** die in der Grundebene gelegen ist, erhält man dadurch, daß man auf ihr eine hinreichend große Anzahl aufeinander folgender Punkte wählt, sie nach der Grundaufgabe abbildet und die aufeinander folgenden Bildpunkte durch einen stetigen Kurvenzug aus freier Hand verbindet. Eine übergroße Zahl von Punkten abzubilden, ist unzweckmäßig. Denn mit Hilfe unseres Auges, das für den schönen und stetigen Verlauf einer Kurve außerordentlich empfindlich ist, können nahe beieinander liegende Punkte meist genauer verbunden werden, als es durch Einschaltung neu bestimmter Zwischenpunkte möglich ist. Beim Ausziehen des Bildes in Tusche bedient man sich eines Kurvenlineals.

Aufgabe 6. Das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden Kreises mit dem gegebenen Radius r, dessen Mittelpunkt M auf der Bildachse liegt, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Wir teilen den Durchmeſſer AB (Fig. 14), der mit ſeinem Bilde zuſammenfällt, in eine Anzahl, etwa 8, gleiche Teile und ziehen in den Teilpunkten die zum Durchmeſſer ſenkrechten Sehnen. Ihre Endpunkte bilden wir in bekannter Weiſe ab und verbinden ſie durch einen zuſammenhängenden Kurvenzug. Das **Schrägbild des Kreiſes** heißt **Ellipſe.** Sie iſt die Schnittkurve des von ſämtlichen Projektionsſtrahlen gebildeten Zylindermantels mit der Bildebene, der dieſe oberhalb und unterhalb der Achſe durchſtößt. Erzeuge mit Drahtmodellen Schrägbilder von Kreiſen! Beobachte die Schattenbilder von Rädern und die Sonnenbilder runder Öffnungen!

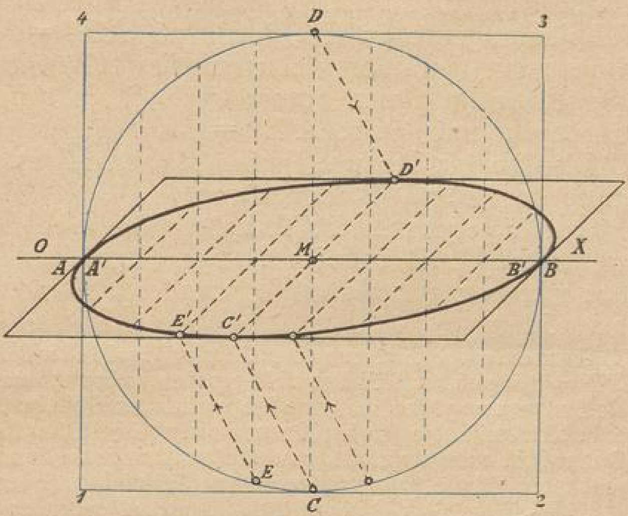


Fig. 14.

Für die Darſtellung der Ellipſe braucht nur der vor der Bildebene gelegene Halbkreis gezeichnet und abgebildet zu werden. Wie findet man daraus das Bild des hinter der Bildebene liegenden Halbkreiſes (ſ. § 3, S. III und IV)?

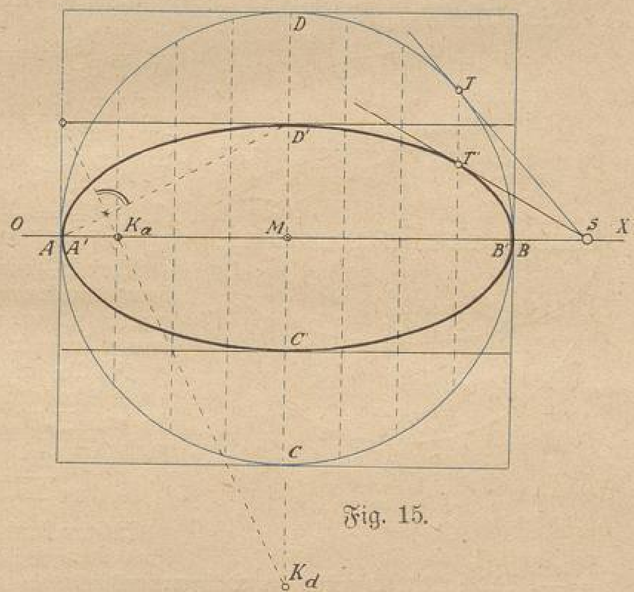


Fig. 15.

Um eine möglichſt genaue Zeichnung der Ellipſe zu erhalten, iſt es nützlich, einige Tangenten in den Endpunkten der zueinander ſenkrechten Durchmeſſer AB und CD, die das Tangentenquadrat 1 2 3 4 bilden, mit abzubilden. Das iſt auch wichtig, um die ſeitlich übergreifenden Bogenſtücke bei A und B, die ſogenannten Henkel, in ſchöner und genauer Form zu gewinnen. Dazu iſt jedoch namentlich die Abbildung einiger weiterer Punkte bei A und B erforderlich.

Nach der Bemerkung in § 4, 2a) ſind die Verbindungslinien der Kreispunkte mit ihren Bildern parallel (z. B. CC' ∥ EE'). Dadurch wird das fortgeſetzte umſtändliche Teilen überflüſſig.

Aufgabe 7. Es soll der in Aufg. 6 bezeichnete Kreis für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 90°$ abgebildet und die Tangente im Punkte T′ der Ellipse bestimmt werden (Fig. 15).

Wo müssen sich die Tangente des Kreises in T und die zugehörige Ellipsentangente in T′ schneiden? $A'B' = AB$ und $C'D'$ sind die Bilder der senkrechten Durchmesser AB und CD des Kreises. Da die Kurve zu ihnen symmetrisch ist, so heißen sie die Achsen der Ellipse, und zwar $A'B' = 2a$ die große (Hauptachse) und $C'D' = 2b$ die kleine Achse (Nebenachse). Hinsichtlich der Zeichnung der Kurve s. Anmerkung.

Das angegebene Abbildungsverfahren des Kreises ändert sich nicht, wenn der Kreis beliebig in der Grundebene liegt (Grund?). Man hat nur den zur Bildachse parallelen Durchmesser als Bildachse zu betrachten.

Anmerkung. Sind von einer Ellipse (Fig. 16) die beiden Achsen ($A'B' = 2a$ und $C'D' = 2b$) und der Mittelpunkt M gegeben, so benutzt man beim Ausziehen mit Vorteil die Krümmungskreise in den Endpunkten der Achse, den sogenannten Scheitelpunkten, d. h. die Kreise, die sich der Kurve in den Scheitelpunkten am innigsten anschmiegen. Dadurch ist man imstande, von der punktweise bestimmten und mit Bleistift vorgezeichneten Ellipse Kurvenstücke in den Scheiteln mit der Zirkelreißfeder auszuziehen.

Es sei (Fig. 16) k ein durch den Scheitel A′ gehender Kreis, dessen Mittelpunkt auf A′B′ liegt. Er schneide die Ellipse in den Punkten P′ und Q′, den Bildern der Punkte P und Q des um M mit a beschriebenen Kreises. Nach der Zeichnung der Ellipse ist dann

$$\text{(I)} \quad \frac{P'P_x}{PP_x} = q = \frac{D'M}{DM} = \frac{b}{a}.$$

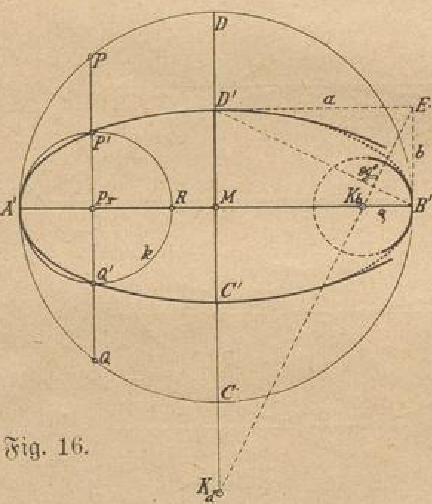


Fig. 16.

Ist R der zweite Schnittpunkt von K mit der großen Achse A′B′, so ergibt sich durch Anwendung des Sehnensatzes nach (I)

$$\text{(II)} \quad \frac{P_xR}{P_xB} = \frac{A'P_x \cdot P_xR}{A'P_x \cdot P_xB} = \frac{P_xP'^2}{P_xP^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Rückt P_x immer näher an den Scheitel A′ heran, so kommen auch die Punkte P′ und Q′ immer näher, und der Kreis k schmiegt sich immer inniger an die Ellipse in A′ an. Fällt endlich P_x mit A′ zusammen, so wird P_xR gleich dem doppelten „Krümmungsradius" 2ρ und P_xB' gleich $A'B' = 2a$. Mithin ist nach (II) $\frac{2\rho}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$ oder $\rho = \frac{b^2}{a}$.

Entsprechend findet man für den Radius der Krümmungskreise in C′ und D′ $r = \frac{a^2}{b}$. Die Mittelpunkte der Krümmungskreise in den Scheitelpunkten B′ und D′ erhält man gleichzeitig durch folgende einfache Konstruktion: Man vervollständige das rechtwinklige Dreieck MB′D′ zu dem Rechteck MB′ED′ und fälle von E das Lot auf B′D′, das MB′ in K_b und die Verlängerung von D′C′ in K_d trifft. Es ist dann $K_bB' = \rho$ und $K_dD' = r$. Beweis!

3) Denkt man sich eine in der Grundebene gelegene Figur, z. B. ein Fünfeck, samt der Grundebene parallel zu sich verschoben, so erhalten wir nach § 3, S. II stets ein kongruentes und gleichliegendes Bild. Das ist wichtig für die Abbildung der Grund- und Deckflächen von Prismen und Zylindern.

§ 6. Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. Die zweite Grundaufgabe.

1 a) Um die Lage eines Punktes im Raume festzulegen, wählen wir (Fig. 17) auf der wagerechten Achse unserer lotrechten Bildebene B einen beliebigen Punkt O und errichten in O auf der Bildachse sowohl in der Bildebene wie in der wagerechten Grundebene G die Senkrechte. So erhalten wir drei zueinander senkrechte Achsen, die als x- oder Breitenachse, y- oder Tiefenachse, z- oder Höhenachse unterschieden werden. Ihr Schnittpunkt O heißt **Null-** oder **Anfangspunkt** des rechtwinkligen Achsenkreuzes. Die drei Achsen bestimmen drei zueinander senkrechte Ebenen, die **Koordinatenebenen.** Durch diese Ebenen wird der ganze Raum in acht Fächer, Raumachtel, geteilt (Modell eines Raumachtels!). Um eine einfache Anschauung zu gewinnen, denken wir uns die in einer Fußbodenecke eines Zimmers zusammenstoßenden Flächen endlos erweitert. Die Fußbodenebene entspricht unserer Grundebene G oder der xy-Ebene, die lotrechten Wandflächen entsprechen unseren lotrechten Ebenen, und zwar ist die xz-Ebene unsere Bildebene (Frontebene) B, die yz-Ebene heißt Seitenebene, da ein auf der Grundebene vor B stehender Beschauer sie zur Seite hat.

Ist ein Punkt P in einem Raumachtel gegeben, so fällen wir auf die Koordinatenebenen die Lote $PP_1 = z$, $PP_2 = y$ und $PP_3 = x$. Diese Abstände des Punktes P von den Koordinatenebenen heißen die **Koordinaten** von P. Durch sie ist die Lage des Punktes P bestimmt. Denn ziehen wir P_1P_x senkrecht zu OX, so ist $OP_x = x$ und $P_1P_x = y$ (vgl. auch § 63, 4). Indes ist die Lage von P nur dann völlig bestimmt, wenn außer den Koordinaten x, y und z (z. B. 4; 3; 5) noch das Raumachtel angegeben ist, in dem P liegt. Wieviel Punkte gibt es, die dieselben Koordinaten haben?

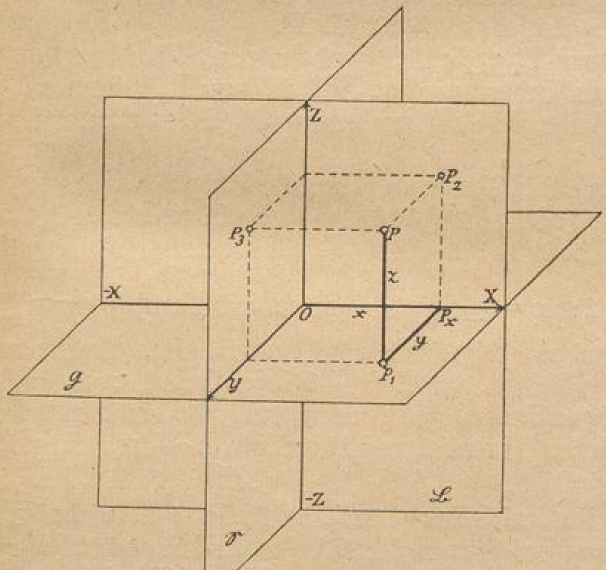


Fig. 17.

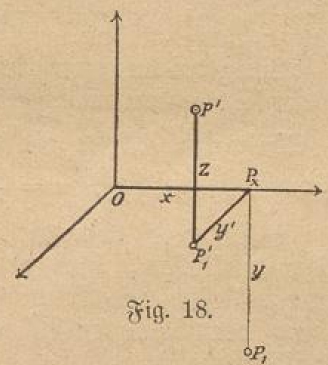


Fig. 18.

Um nun die Lage eines Punktes P lediglich durch die Angabe seiner Koordinaten zu bestimmen, wählen wir auf der x-Achse die Richtung OX, auf der y-Achse die Richtung OY und auf der z-Achse die nach oben gehende Richtung als die positive. Die entgegengesetzten Richtungen sind dann negativ. Wir gelangen dann zu dem Punkte P mit den Koordinaten $x = +2$, $y = +3$, $z = +2,5$ (Längeneinheit 1 cm), indem wir von O auf der x-Achse 2 cm in positiver Richtung bis P_x, dann parallel der positiven Richtung der y-Achse 3 cm bis P_1 und endlich parallel der positiven Richtung der z-Achse 2,5 cm bis P gehen, also dem Streckenzuge $OP_x P_1 P$ folgen. Die Lage des Punktes P ist eindeutig bestimmt. Wie gelangen wir zum Punkte Q mit den Koordinaten $x = -2$, $y = +3$, $z = -2,5$?

b) Für uns kommt im folgenden besonders der Fall in Betracht, daß der Punkt P durch seine senkrechte Projektion P_1 auf die Grundebene, den **Grundriß** von P (welche Koordinaten sind dadurch gegeben?) und durch seinen Abstand z von der Grundebene, der positiv oder negativ sein kann, gegeben ist.

Der Einfachheit halber stellen wir die abzubildenden Körper zumeist in das erste Raumachtel, für das die Achsenrichtungen sämtlich positiv sind.

2a) **Zweite Grundaufgabe. Das Schrägbild eines beliebigen Raumpunktes P zu bestimmen.**

Wir erhalten das Bild des Punktes P (Fig. 17 und 18), der durch seine Koordinaten x, y und z gegeben ist, indem wir das Bild des Streckenzuges $OP_x P_1 P$ bestimmen. P_1P bildet sich dabei in natürlicher Größe parallel der z-Achse ab (§ 3, S. I).

Ist P durch seinen Grundriß P_1 (Fig. 18) und seinen Abstand z von der Grundebene gegeben, so finden wir das Bild P' von P, indem wir zunächst P_1 in bekannter Weise abbilden und dann $P_1'P' = z$ parallel zur z-Achse ziehen.

Wie gewinnt man aus der Abbildung des Punktes die Abbildung von Strecken und daraus die von Flächen und Körpern?

Aufgabe. Bilde die Punkte ab mit den Koordinaten

$$x = \pm 3; \; y = \pm 2; \; z = \pm 4 \text{ (Längeneinheit 1 cm).}$$

b) Nennen wir die zur x-Achse (Bildachse) parallelen Geraden **Breitenlinien**, die zur y-Achse parallelen **Tiefenlinien** und die zur z-Achse parallelen **Höhenlinien**, so können wir für die Darstellung von Körpern in schiefer Parallelprojektion die einfache Regel aufstellen:

Breiten- und Höhenlinien erscheinen auch im Bild als solche in natürlicher Größe, dagegen erscheinen die Tiefenlinien nach Maßgabe der Abbildungszahlen verkürzt und um ihren Schnittpunkt mit der Bildachse gedreht.

§ 7. Abbildung von Körpern und Körperschnitten.

1a) **Aufgabe 1.** Das Schrägbild eines auf der Grundebene ruhenden Würfels (Kantenlänge $a = 4$ cm), dessen Grundkante CD auf der Bildachse liegt, für die Abbildungszahlen $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ zu zeichnen (Fig. 19).

Man bilde zunächst die Grundfläche für die gegebenen Abbildungszahlen und dann die Ecken der Deckfläche ab (Genauigkeitsproben!). Welche Seitenflächen des Würfels bilden sich in wahrer Größe ab? Was für Figuren sind die Bilder der anderen Flächen?

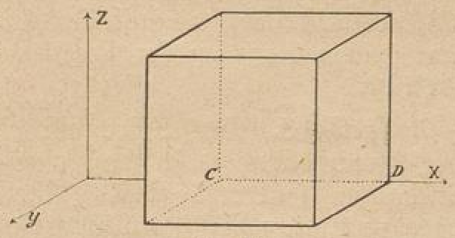


Fig. 19.

Sichtbarkeit. Betrachtet man den abzubildenden Würfel in der Richtung der Projektionsstrahlen (Sehstrahlen), so sind einzelne Kanten dem Auge nicht sichtbar. Die Bilder solcher dem Auge *nicht sichtbaren Linien eines Körpers werden im folgenden punktiert oder auch weggelassen, dagegen die der sichtbaren gleichmäßig ausgezogen.* Die Abbildungen gewinnen dadurch sehr an Anschaulichkeit.

Aufgabe 2. Den in Aufg. 1 bezeichneten Würfel auch für die Abbildungszahlen

	a)	b)	c)	d)
$q =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\alpha =$	30°	45°	90°	45°

darzustellen (Fig. 20).

Um die Wirkung auf das Auge beurteilen zu können, sind die Schrägbilder desselben Würfels für die gebräuchlichen, in Aufg. 2 gegebenen Abbildungszahlen nebeneinander gezeichnet. Der unschöne Eindruck, den

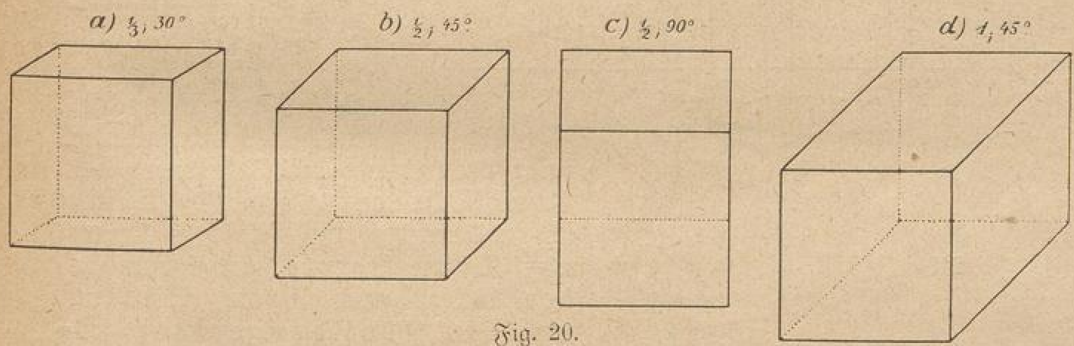


Fig. 20.

man z. B. im Falle Aufg. 2d) erhält, rührt daher, daß man das Bild nicht in der Richtung der Projektionsstrahlen betrachtet. Geschieht dieses in einiger Entfernung, so verschwindet für das Auge die Verzerrung, und das Bild wirkt richtig. Die Projektion mit den Werten $q = 1$ und $\alpha = 45°$ ist unter dem Namen **Kavalierperspektive**[1]) bekannt, da sie seinerzeit den französischen

[1]) Der Name wird auch darauf zurückgeführt, daß die Projektion mit den Werten $q = 1$ und $\alpha = 45°$ früher zur Anfertigung von Übersichtsplänen von Festungswerken benutzt wurde. Mit „Kavaliere" bezeichnet man die hohen Aufbauten bei den Festungswerken.

Kavalieren auf der Kriegsschule als die bequemste zur Anwendung empfohlen wurde. Für $q = 1$ und $\alpha = 90°$ erhält man die sogenannte **Militärperspektive**, die also den Grundriß in wahrer Gestalt liefert. Bei sehr steilem Einfallen der Projektionsstrahlen spricht man von **Vogelperspektive.**

Aufgabe 3. Das Schrägbild eines Würfels zu zeichnen, der so auf der Grundebene ruht, daß eine Diagonale seiner Grundfläche zur Bildachse senkrecht steht (Übereckstellung). a) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$; b) $q = 1$, $\alpha = 90°$ (Militärperspektive).

Aufgabe 4. Den Körper zu zeichnen, der aus einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm entsteht, wenn man die Ecken durch Schnitte, die durch die Mitten dreier in einer Ecke zusammenstoßender Kanten geführt werden, abschneidet. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$. (Kubooktaeder, Kristallform von Eisenkies).

Aufgabe 5. Ein auf der Grundebene stehendes gerades Prisma mit der Höhe h in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Die Grundfläche des Prismas sei ein beliebiges Fünfeck ABCDE, das nach Gestalt und Lage in Fig. 21 angegeben ist. Nach Abbildung der Grundfläche zieht man durch die Eckpunkte A'B'C'D'E' des Bildes die Parallelen zur z-Achse und trägt auf ihnen die gegebene Höhe h ab. Die Deckfläche ergibt sich danach durch Parallelverschiebung um die Höhe h nach oben.

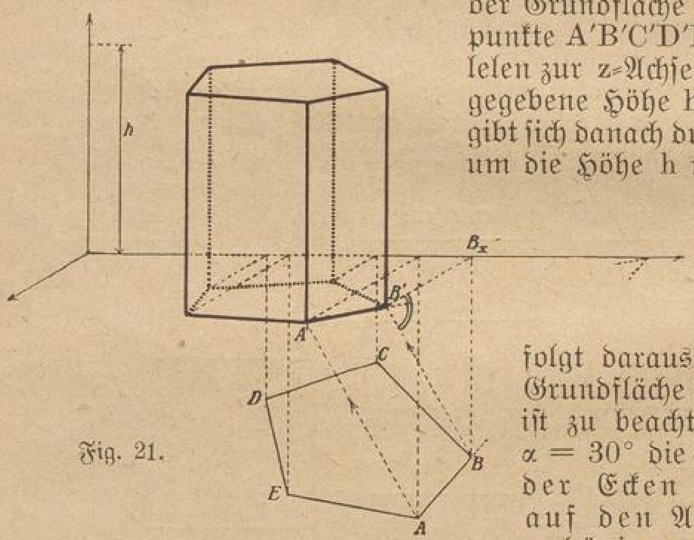
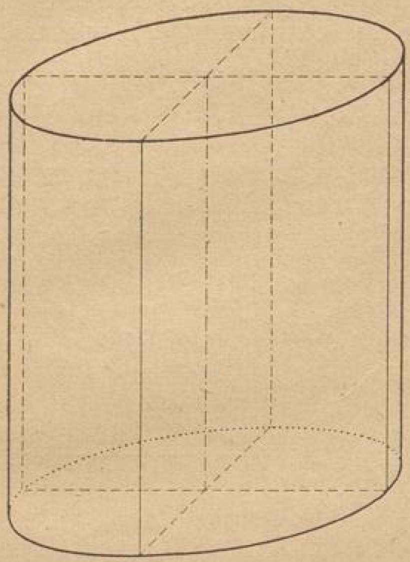


Fig. 21.

Die Grundseiten und ihre Bilder (z. B. AB und A'B') schneiden sich auf der Bildachse. Welche Vereinfachung folgt daraus für die Abbildung der Grundfläche des Körpers? Weiter ist zu beachten, daß für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30°$ die Verbindungsstrecken der Ecken mit ihren Bildern auf den Abbildungen der zugehörigen Tiefenlinien (30°-Linien) senkrecht stehen, z. B. $BB' \perp B'B_x$.

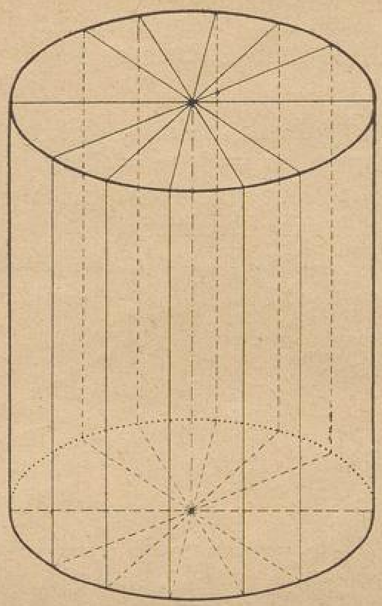
Aufgabe 6. Das Schrägbild eines auf der Grundebene stehenden geraden Zylinders von der Höhe h zu zeichnen. a) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45$, b) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 90°$ (Fig. 22 und 23).

Die Zylinderachse lassen wir der Einfachheit halber mit der z-Achse zusammenfallen. Die Grundfläche wird nach § 5, Aufg. 6 abgebildet. Die der Grundfläche parallele und kongruente Deckfläche ergibt sich wie beim Prisma durch Parallelverschiebung um die Höhe h. Die gemeinsamen Tangenten der Bilder der Grund- und Deckfläche des Zylinders bilden für den Mantel die Sichtbarkeitsgrenzen, die in Fig. 23 mit den Seitenlinien des in der Bildebene gelegenen Achsenschnittes (Frontalschnittes) zusammenfallen.



($\frac{1}{2}$, 45°)

Fig. 22.



($\frac{1}{2}$, 90°)

Fig. 23.

b) **Aufgabe 7.** Das Schrägbild einer auf der Grundebene stehenden Pyramide mit der Höhe h zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Von der Pyramide (Fig. 24) ist außer der Höhe die Grundfläche nach Lage und Gestalt, ferner die senkrechte Projektion S_1 (Grundriß) der Spitze gegeben. Zeichnung!

Aufgabe 8. Einen geraden Kegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ (vgl. Fig. 29).

c) **Aufgabe 9.** Ein regelmäßiges Oktaeder mit der Achsenlänge $l = 6$ cm in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen (Fig. 25). $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

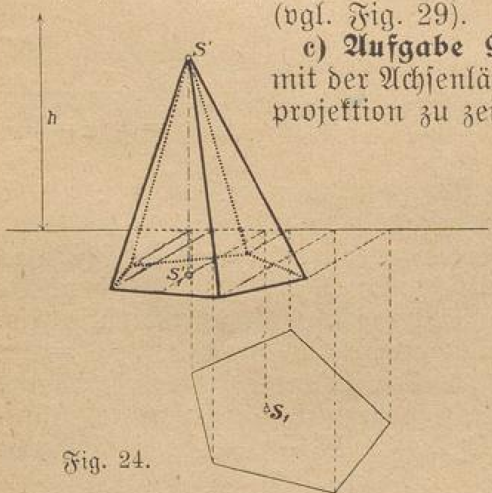


Fig. 24.

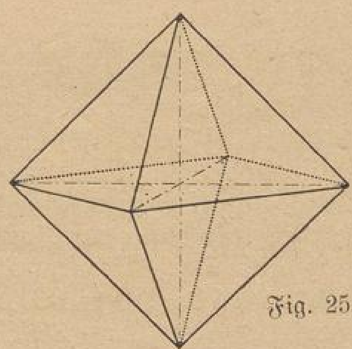


Fig. 25.

Der Einfachheit halber lassen wir die drei Achsen des Körpers mit den Achsen unseres Koordinatensystems zusammenfallen. Die Höhen- und Breitenachse erscheinen im Bilde in natürlicher Größe, während die Tiefenachse auf ein Drittel verkürzt wird (L. I. § 103).

Bilde den Körper auch ab, wenn die Kantenlänge $a = 4$ cm gegeben ist.

Aufgabe 10. Das Schrägbild eines Rhombendodekaeders zu zeichnen. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

Der Körper entsteht aus dem Würfel, indem auf die Seitenflächen regelmäßige vierseitige Pyramiden, deren Höhe gleich der halben Kantenlänge ist, aufgesetzt werden. Der Körper wird von 12 Rhom-

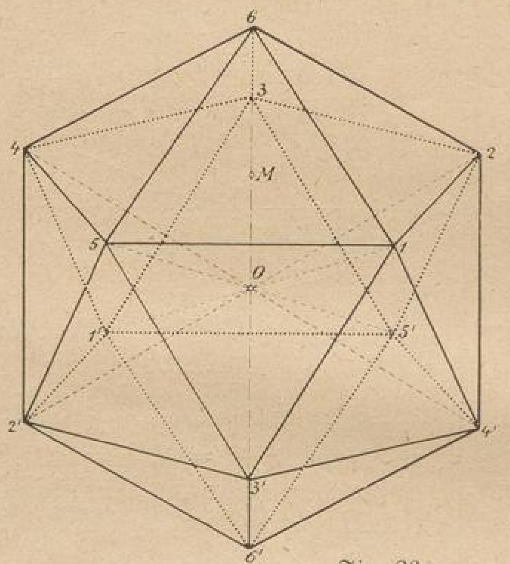


Fig. 26a.

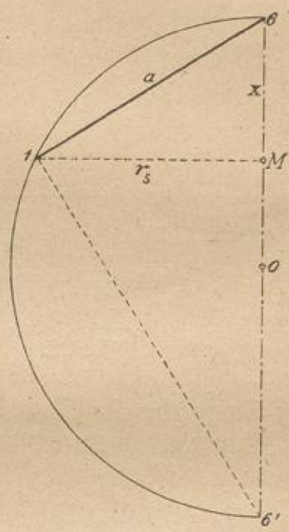


Fig. 26b.

ben begrenzt (Name!). Da der Granat diese Kristallform besitzt, heißt er auch Granatoeder.

Aufgabe 11. Das Schrägbild eines regelmäßigen Ikosaeders (Kantenlänge a), von dem die Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte (66′) auf der Grundebene senkrecht steht, zu zeichnen. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 90°$ (Fig. 26).

Nach einer kurzen Orientierung über den Bau des Körpers (L. I. § 104, 1) ergibt sich die folgende einfache Darstellung:

Bilde zunächst das zur Grundebene parallele regelmäßige Fünfeck 1 2 3 4 5 (Fig. 26a) mit dem Mittelpunkte M ab, ziehe $M6 = x$, wo x die Höhe der fünfseitigen Pyramide bezeichnet (Konstruktion in Fig. 26b), parallel der z-Achse und verlängere M 6 bis 6′, so daß $66' = 2r$, dem Durchmesser der Umkugel, wird. Nun halbiere 66′ und bestimme mit Hilfe des Mittelpunktes O die Gegenpunkte der Ecken des Fünfecks 1 2 3 4 5. $1'O = 1O$; $2'O = 2O$; ... (§ 3, S. IV). Löse die Aufgabe auch für $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

Aufgabe 11 a. Ein regelmäßiges I k o s a e d e r ruht mit einer Seitenfläche so auf der Grundebene, daß die Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte der Bildebene parallel ist. Das Schrägbild zu entwerfen für $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$ (Fig. 27).

Wie muß man das Bild (Fig. 27) betrachten, wenn es richtig wirken soll?

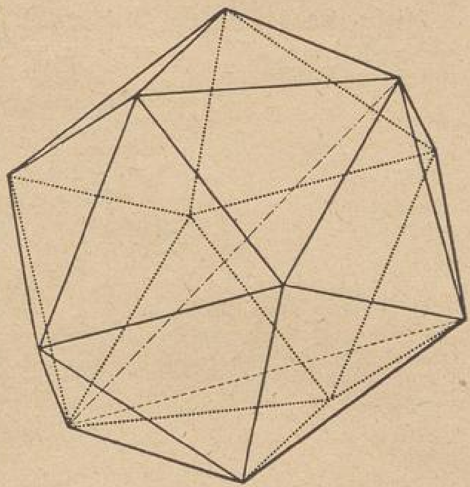


Fig. 27.

Aufgabe 12. Das Schrägbild eines regelmäßigen Dodekaeders (Kantenlänge a), das mit einer Seitenfläche beliebig auf der Grundebene ruht, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Die 20 Ecken des Körpers bilden zu je 5 die Ecken von 4 regelmäßigen Fünfecken, die im vorliegenden Falle der Grundebene parallel sind. Die Abbildung dieser Fünfecke liefert am schnellsten eine genaue Zeichnung. Zur Orientierung über den Körper s. L. I. § 105.

2) **Aufgabe 13.** Ein regelmäßig-sechsseitiges P r i s m a durch eine zur Bildebene senkrechte Ebene, deren Neigungswinkel mit der Grundebene 30° beträgt, zu s c h n e i d e n (Fig. 28). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Zeichnung! Bestimme die Schnittfigur in wahrer Größe!

Aufgabe 14. Löse die entsprechende Aufgabe für einen geraden Z y l i n d e r (vgl. Fig. 30). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 90°$.

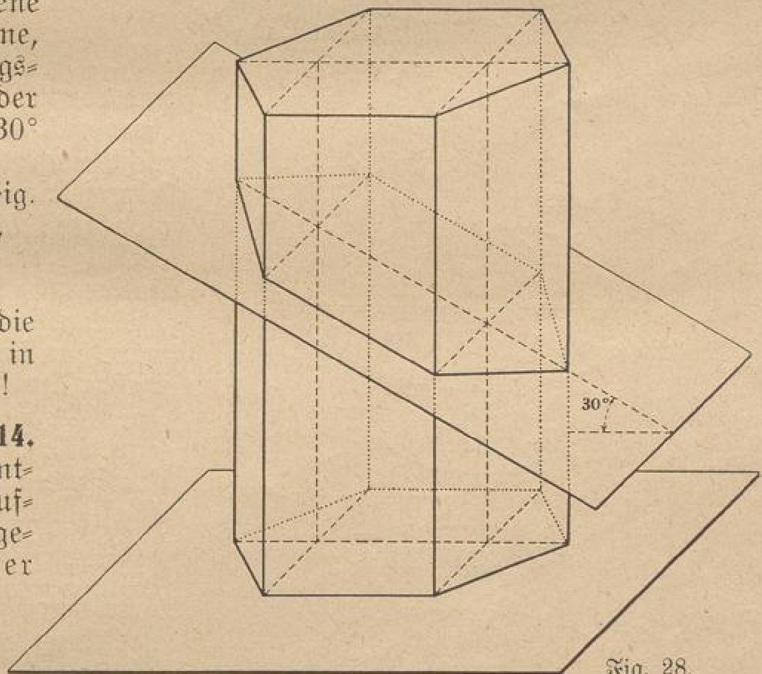


Fig. 28.

($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$)

Aufgabe 15. Eine regelmäßig-sechsseitige P y r a m i d e durch eine zur Bildebene senkrechte Ebene, deren Neigung zur Grundebene

$\varphi = 30°$ beträgt, zu schneiden und die Schnittfigur in wahrer Größe zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Aufgabe 16. Löse die entsprechende Aufgabe für einen geraden Kegel (Fig. 29). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

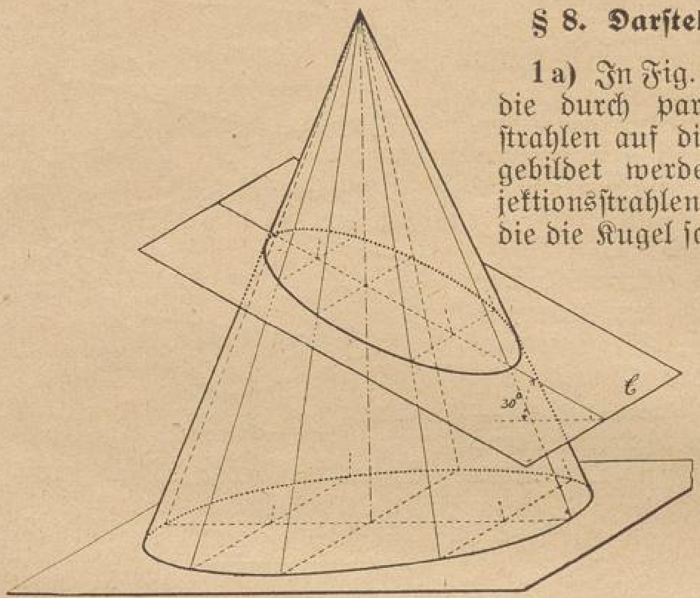


Fig. 29.

§ 8. Darstellung der Kugel.

1 a) In Fig. 30 sei O eine Kugel, die durch parallele Projektionsstrahlen auf die Bildebene B abgebildet werden soll. Die Projektionsstrahlen zerfallen in solche, die die Kugel schneiden, und solche, die sie berühren. Die berührenden Projektionsstrahlen bilden einen Strahlenzylinder (Berührungszylinder), der die Kugel in einem Großkreise u, dessen Ebene auf den Projektionsstrahlen senkrecht steht, berührt und die Bildebene in einer Kurve u′, einer Ellipse, die nichts anderes als die Parallelprojektion des Großkreises u darstellt, durchdringt. Für ein Auge, das aus sehr großer Entfernung längs den Projektionsstrahlen hinsieht, wäre der Großkreis u der **wahre Umriß** des Körpers. Im Gegensatz dazu heißt sein Bild u′ der **scheinbare Umriß** der Kugel. Dieser ist offenbar allein nicht imstande, in dem Beschauer den Eindruck einer Kugel hervorzurufen. Um dies zu erreichen, ist noch die Abbildung von wichtigen Schnitten erforderlich.

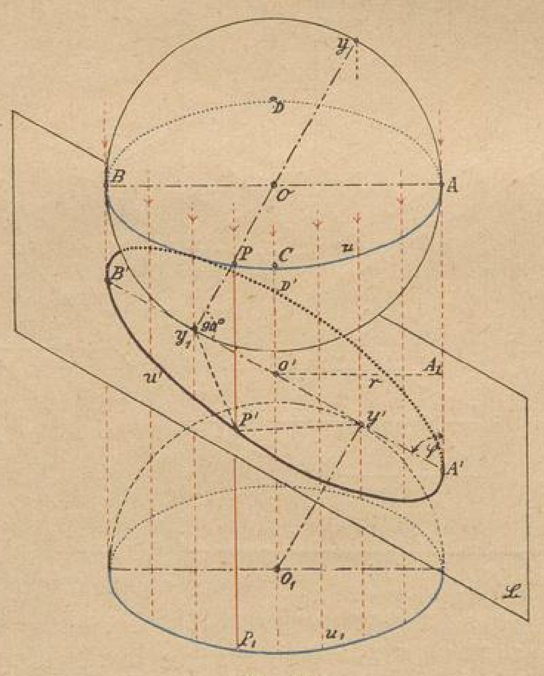


Fig. 30.

b) Um den Umrißkreis u (Fig. 30) abzubilden, beachten wir, daß der zur

Bildebene B parallele Durchmesser CD sich in wahrer Größe abbildet, also $C'D' = CD = 2r$. Dagegen erscheint der zu CD senkrechte Durchmesser AB im Bilde ($A'B'$) gestreckt und auch senkrecht zu $C'D'$. $A'B' = 2a$ wird die große und $C'D' = 2b$ die kleine Achse der Ellipse. Die halbe Länge der ersten ergibt sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $A'O'A_1$, von dem die Kathete $O'A_1 = r$ und der gegenüberliegende Winkel $O'A'A_1 = \varphi$, der Neigungswinkel der Bildstrahlen mit der Bildebene, der leicht bestimmt werden kann,[1]) bekannt sind. Denkt man sich die Kugel innerhalb des Tangentenzylinders verschoben, bis sie die Bildebene berührt, so wird diese auf $A'B'$ im Punkte Y_1 berührt. Der zur Bildebene senkrechte Durchmesser Y_1Y bildet sich auf $A'B'$ ab, und zwar als die Brennpunkte[2]) Y_1 und Y' der Umrißellipse. Das Umrißbild der Kugel ändert sich nicht, wenn diese innerhalb des Tangentenzylinders beliebig verschoben wird.

2) Aufgabe. Das Schrägbild einer Kugel zu zeichnen (Fig. 31). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

I. Als Nullpunkt unseres Koordinatensystems wählen wir den Mittelpunkt O der Kugel und bilden zunächst die in den drei Koordinatenebenen gelegenen Schnittkreise ab, von denen sich der Frontalkreis, das ist der in der Bildebene gelegene, in wahrer Größe abbildet. Die beiden anderen Schnittkreise erscheinen im Bild als Ellipsen, die zum Teil über den Frontalkreis hinausgreifen. Die große Achse der Umrißellipse liegt auf dem Bild YY_1 des zur Bildebene senkrechten Durchmessers, die kleine Achse ist gleich dem dazu senkrechten Durchmesser $CD = 2r$. Da $OC = r$ und $OY = r.q$, also $\sphericalangle CYO = \varphi$ ist, so findet man den Endpunkt A der halben großen Achse der Umrißellipse, indem man parallel zu CY

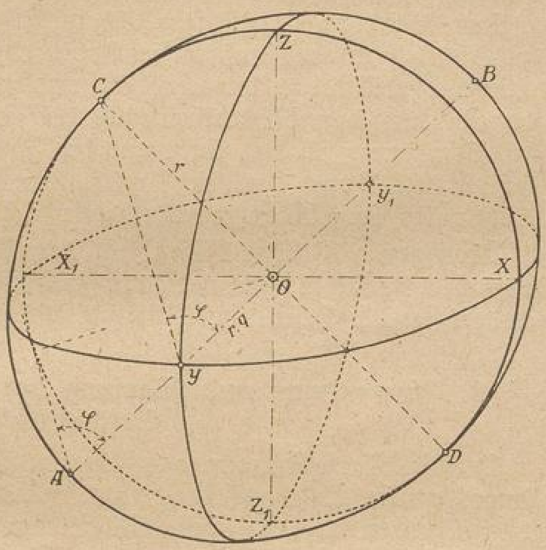


Fig. 31.

1) Ist z. B. $q = \frac{1}{2}$ gegeben, so ist $\operatorname{cotg} \varphi = \frac{A'A_1}{A_1O'} = \frac{1}{2}$, also, da $A_1O' = r$, $A'A_1 = \frac{1}{2}r$.

2) Der Nachweis, daß das Umrißbild u' der Kugel eine Ellipse mit den Brennpunkten Y' und Y_1 ist, ergibt sich leicht mit Hilfe der sog. Dandelinschen Kugeln O und O_1 (Fig. 30). Diese berühren die Bildebene in den Punkten Y_1 und Y' und den Tangentenzylinder in den Kreisen u und u_1, deren Ebenen zu dessen Achse senkrecht sind und deshalb überall den gleichen Abstand haben. Für einen beliebigen Punkt P' von u' ist daher $P'Y' + P'Y_1 = P'P_1 + P'P = PP_1$. Das Umrißbild u' hat daher die Eigenschaft, daß die Summe der Abstände eines jeden Punktes von den beiden Punkten Y' und Y_1, den Brennpunkten, fest ist, es ist also eine Ellipse (L. II. § 51, 2). $PP_1 = A'B'$, Beweis!

an den Frontalkreis die Tangente zieht, die die Verlängerung von OY in A trifft.

Um das erhaltene Bild noch anschaulicher zu gestalten, ist die Abbildung von Schnitten parallel zur Grundebene oder parallel zur Seitenebene erforderlich. Zu dem Zwecke teile man z. B. den in der z-Achse liegenden Durchmesser in 6 gleiche Teile, lege durch die Teilpunkte die zur Grundebene parallelen Schnitte und bilde sie samt den umgeschriebenen Quadraten ab. Die Bilder dieser Schnitte sind Ellipsen, die von der Umrißellipse sämtlich umschlossen werden. In der Fig. 31 sind sie der Deutlichkeit halber nicht gezeichnet.

II. Eine einfache und bei günstig gewählten Abbildungszahlen recht anschauliche Darstellung der Kugel ergibt sich auch, wenn man in gleicher Weise wie vorher eine hinreichend große Anzahl frontaler Schnitte abbildet, die sich wieder als Kreise darstellen. Die umhüllende Ellipse ist wieder der scheinbare Umriß der Kugel.

Das Bild der Kugel (Fig. 31) wirkt infolge der starken Verzerrung zunächst befremdend auf unser Auge. Doch ändert sich das sofort, wenn man die Bildebene lotrecht hält und in angemessener Entfernung in der Richtung der Sehstrahlen nach dem Bild hinsieht. Dann verschwindet die Verzerrung für das Auge und die Figur stellt mit täuschender Körperlichkeit eine Kugel dar, die Umrißellipse erscheint als Kreis, obgleich der Sehpunkt (Projektionszentrum) unendlich fern liegt.

Übungen. 1. Wie bildet sich der Umriß u der Kugel ab, wenn $\alpha = 90°$ wird? 2. In welchem Falle ist u' wieder ein Kreis? 3. Wie ändert sich die Gestalt des Umrißbildes, wenn $\sphericalangle\, \varphi$ immer kleiner wird?

§ 9. Anwendung und Wertung der schiefen Parallelprojektion. Geschichtliches.

1) Die Darstellungen der schiefen Parallelprojektion zeichnen sich durch große Anschaulichkeit aus. Neben den Breiten- und Höhenverhältnissen treten auch die Tiefenverhältnisse klar hervor. Sie eignet sich deshalb besonders zur Darstellung von Gegenständen, in deren Gestalt drei zueinander senkrechte Richtungen hervortreten. So bildet sie das einfachste Verfahren zum Zeichnen von Kristallformen, wobei man die Werte $q = \frac{1}{3}$ und $\alpha = 20°$ bevorzugt, zum Darstellen wissenschaftlicher und technischer Apparate (Physikbuch!), zum Skizzieren von Maschinenteilen und architektonischen Gegenständen, endlich zum Anfertigen der stereometrischen Figuren. Die Abbildung mit den Zahlen $q = 1$ und $\alpha = 45°$ (Kavalierperspektive) gestattet bei unverändertem Maßstab die unmittelbare Entnahme der Höhen-, Breiten- und Tiefenmaße. Sie wird deswegen häufig im Baufach zur Darstellung von Steinschnitten angewandt. Das unter dem Namen „Militärperspektive" bekannte Abbildungsverfahren wird benutzt zur Anfertigung von Festungs-, Stadt- und Lageplänen.

Den erwähnten Vorzügen steht, abgesehen von dem fehlerhaften Eindruck, den das Schrägbild besonders in gerader Ansicht auf das

Auge macht, ein Hauptmangel gegenüber. Die schiefe Parallelprojektion ist zur unmittelbaren Festlegung räumlicher Gebilde nicht einfach genug. Schon die Darstellung verhältnismäßig einfacher Körper erfordert das Hinzutreten der senkrechten Projektion. So ist z. B. in Aufg. 7, § 7 zur Darstellung der Pyramide in Wirklichkeit die senkrechte Projektion sowohl zur Grundebene (Grundriß) als auch zur Bildebene (Aufriß) gegeben. Weiter bietet die Darstellung von krummen Linien und Flächen Schwierigkeiten. Ein zur Grundfläche paralleler Kreis z. B. bildet sich bei schiefer Parallelprojektion als Ellipse ab, während er bei der senkrechten Projektion sich wieder als Kreis darstellt.

2) Die Anfänge der schiefen Parallelprojektion gehen, wie alte Stadt- und Befestigungspläne lehren, weit zurück. Schon die Darstellungen in den Gräbern der alten Ägypter zeigen die Gegenstände (z. B. eine Palastanlage) in einer Art Militärperspektive.[1])

Das bereits sehr früh benutzte Verfahren der schiefen Parallelprojektion wurde besonders durch J. H. Lambert (1728—1777) wissenschaftlich behandelt und bekanntgemacht. Im vorigen Jahrhundert ist das Verfahren der schiefen Parallelprojektion verallgemeinert und als besondere Darstellungsmethode („Axonometrie") begründet worden. Wählt man als Bildebene nicht, wie wir es bisher getan haben, eine lotrechte Ebene, sondern eine ganz beliebige schief gelegene Ebene, so erhält man die allgemeinste Form der schiefen Parallelprojektion.

Zweiter Abschnitt.

Gerade Parallelprojektion.

(Grund- und Aufrißverfahren).

---

§ 10. Allgemeines. Darstellung auf zwei Bildebenen.

1) Die gerade Parallelprojektion oder senkrechte Projektion[2]) ist als besonderer Fall der Parallelprojektion zu betrachten, bei der die Projektionsstrahlen die Bildebene unter einem rechten Winkel treffen. Deswegen gelten auch hier die in § 3 abgeleiteten Hauptsätze der Parallelprojektion. Die senkrechte Projektion hat den besonderen Vorzug, daß sie gestattet, Körper nach den drei Hauptrichtungen in gleichem Maßstabe abzubilden. Darauf beruht ihre große Bedeutung für Handwerk, Technik und Kunst.

---

[1]) Vgl. F. Schilling, Über Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie, 1904, S. 147.

[2]) Wenn im zweiten Abschnitt von Projektion oder Projizieren schlechthin gesprochen wird, so ist stets die senkrechte (orthogonale = rechtwinklige) Projektion gemeint.

2a) Projizieren wir einen einfachen Körper, z. B. einen Quader (Fig. 32), auf eine zu seiner Grundfläche parallele Ebene B_1, so erhalten wir als seine Projektion das Rechteck Q_1, durch das die Ausmessungen des Körpers nur nach der Breite und Tiefe bestimmt sind. Um auch die Höhe in der einfachsten Weise festzulegen, projizieren wir den Körper noch auf eine zweite Ebene B_2 parallel der Breiten- und Höhenrichtung, so daß die Höhe sich in wahrer Größe darstellt (Fig. 32). Durch Hinzutreten der zweiten Projektion Q_2 sind Gestalt und Ausmessungen des Körpers bestimmt. Wie wir im folgenden sehen werden, genügt im allgemeinen zur vollständigen Darstellung (Festlegung) eines Körpers die Projektion auf zwei Ebenen.

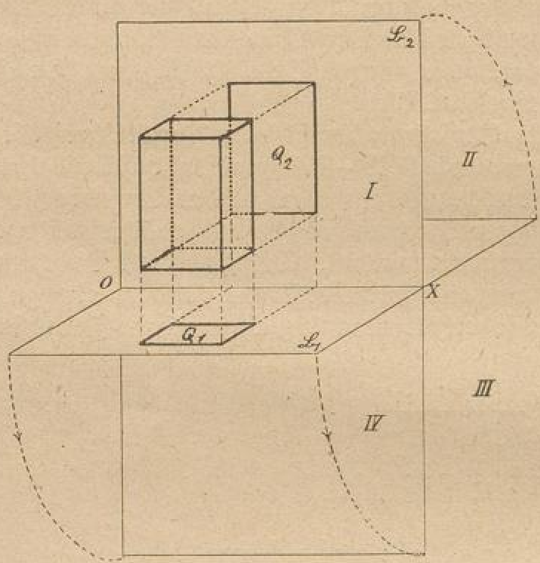


Fig. 32.

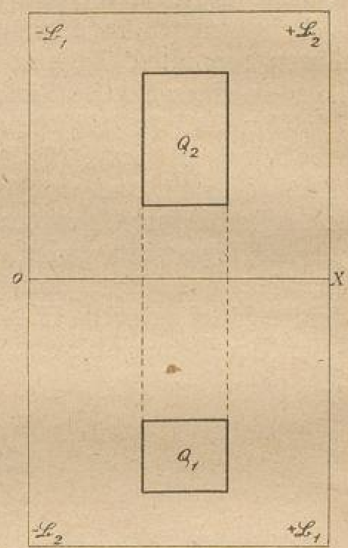


Fig. 33.

Die **erste Bildebene** B_1 (Fig. 32) oder **erste Tafel** wählt man wagerecht, die **zweite Bildebene** B_2 oder **zweite Tafel** lotrecht zu B_1. Die Ebene B_1 heißt auch **Grund-** oder **Grundrißebene;** die Ebene B_2, die unserer Bildebene bei der schiefen Parallelprojektion entspricht, **Aufrißebene.** Dementsprechend heißen die Projektionen eines Gebildes auf diese Ebenen **Grundriß** oder **erste Projektion** (Q_1) und **Aufriß** oder **zweite Projektion** (Q_2). Die Schnittgerade OX der beiden Bildebenen wird als **Bild-** oder **x-Achse** bezeichnet.

b) Denken wir uns (Fig. 32) die Bildebenen B_1 und B_2 unbegrenzt erweitert, so teilen sie den Raum in vier Teilräume (Raumviertel oder Quadranten) I, II, III und IV. Als Aufrißebene betrachten wir stets die lotrecht vor uns gehaltene Zeichenebene. Dann bezeichnen wir den vorderen oberen Teilraum als I. Raumviertel, den hinter B_2 gelegenen oberen als II. Raumviertel usw. Der Einfachheit halber nehmen wir die darzustellenden Gebilde im allgemeinen im I. Teilraum an.

c) Um mit einer Zeichenebene auszukommen, *denkt* man die erste *Bildebene* (Fig. 33) um die Achse in der durch die *Pfeile* angegebenen *Richtung* um 90° *gedreht*. Dadurch fällt der vordere Teil der Grundrißebene mit dem unteren Teile der Aufrißebene zusammen, während der hinter $\mathfrak{B}_2$ gelegene Teil der Grundrißebene mit dem oberen Teil von $\mathfrak{B}_1$ zur Deckung kommt. Von dem in Fig. 32 samt seinen senkrechten Projektionen im Schrägbilde gezeichneten Quader erhalten wir nach Vereinigung beider Bildebenen die in Fig. 33 gegebene Darstellung.

Es ist *dauernd zu beachten*, daß die *Vereinigung* der beiden Bildebenen lediglich den Zweck hat, die Darstellung auf *einer einzigen Zeichenebene* zu ermöglichen. Für die *Ausführung* hat man sich daher die beiden Ebenen stets *in ihrer rechtwinkligen Verbindung* zu denken.

Bei Darstellung von Gebilden im ersten Raumviertel (Fig. 32) braucht man nur die vordere Hälfte der Grundrißebene und die obere der Aufrißebene in Betracht zu ziehen. Nach Vereinigung der Bildebene trennt die Achse („trennende Achse") Grundriß und Aufriß; das über der Achse gelegene Feld ist Aufrißebene, das darunter liegende Grundrißebene.

§ 11. Darstellung des Punktes.

1) Sind in Fig. 34 $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ die beiden zueinander senkrechten Bildebenen und ist P ein beliebiger Punkt im I. Raumviertel, so sind die Fußpunkte P_1 und P_2 der von P auf die Bildebenen gefällten Lote die Projektionen von P. P_1 ist sein Grundriß oder seine erste Projektion, P_2 sein Aufriß oder seine zweite Projektion. Den Abstand $PP_1 = z$ des Punktes P von $\mathfrak{B}_1$ nennen wir seinen **ersten Tafelabstand** oder Höhenabstand, entsprechend $PP_2 = y$ seinen **zweiten Tafelabstand** oder Tiefenabstand. Die durch die Tafelabstände PP_1 und PP_2 bestimmte Ebene steht auf beiden Bildebenen senkrecht (L. I. § 72, 3), ist mithin auch senkrecht zu ihrer Schnittgeraden, der Bildachse OX. Ist P_x der Schnittpunkt der Ebene mit der Achse, so sind demnach P_1P_x und P_2P_x senkrecht zur Achse OX (L. I. § 67, 1), d. h. *die Lote von Grund- und Aufriß eines Punktes auf die Bildachse haben denselben Fußpunkt.*

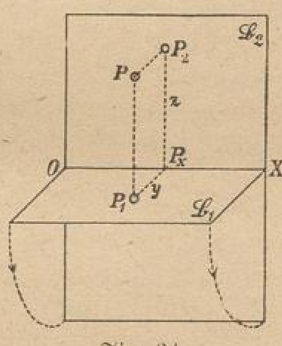


Fig. 34.

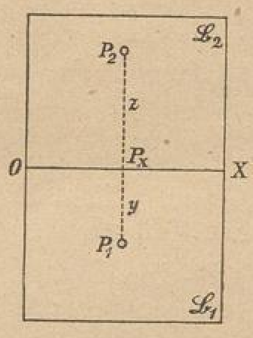


Fig. 35.

Das Viereck $PP_1P_xP_2$ (Fig. 34) ist ein Rechteck. In diesem ist $P_2P_x = PP_1 = z$ und $P_1P_x = PP_2 = y$.

Der erste Tafelabstand eines Punktes ist also gleich dem Abstand seines Aufrisses von der Bildachse und der zweite Tafelabstand gleich dem Abstand seines Grundrisses von der Bildachse.

2) Wird die Grundebene in der früher angegebenen und auch aus der Fig. 34 ersichtlichen Weise in die Aufrißebene heruntergeklappt (Fig. 35), so fallen nach 1) die Lote P_1P_x und P_2P_x in eine Gerade. Wir erhalten damit den einfachen, aber sehr wichtigen Satz:

Grund- und Aufriß eines Punktes liegen stets auf einer Senkrechten zur Achse.

Umgekehrt können nur dann je ein Punkt der ersten und zweiten Bildebene die Bilder eines und desselben Raumpunktes sein, wenn ihre Lote auf die Bildachse denselben Fußpunkt haben.

3) Übungen. a) Warum ist ein Punkt des Raumes durch seine Projektion auf eine feste Ebene nicht bestimmt? Welche Angaben wären noch erforderlich, um seine Lage völlig zu bestimmen?

b) Wie liegen (Fig. 36 und 37) Grund- und Aufriß zur Bildachse, wenn der abzubildende Punkt 1. im I.; 2. im II.; 3. im III.; 4. im IV. Raumviertel liegt?

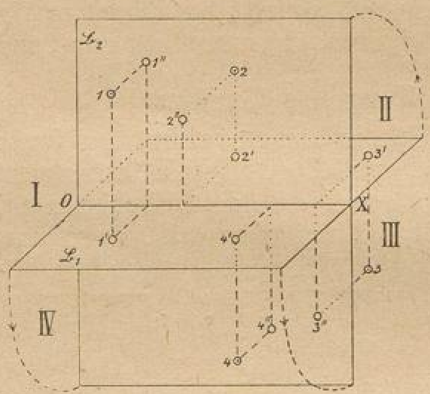


Fig. 36.

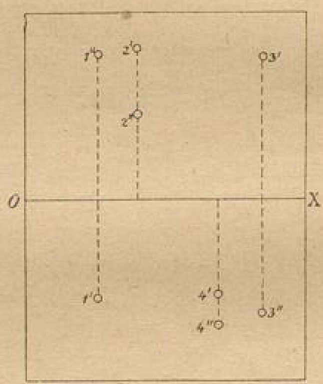


Fig. 37.

c) Wo liegt P, wenn 1. sein Grundriß P_1; 2. sein Aufriß P_2 auf der Bildachse liegt?

d) Wo liegt P, wenn sein Grund- und Aufriß den gleichen Abstand von der Achse haben? (Halbierungsebene; zwei Möglichkeiten!)

e) Wo liegt P, wenn sein Grund- und Aufriß 1. über der Achse; 2. unter der Achse zusammenfallen? (Vgl. d.)

§ 12. Darstellung der Geraden.

1 a) Projizieren wir (Fig. 38) die Gerade g, die B_1 im Punkte G und B_2 im Punkte A durchstößt, auf die beiden Bildebenen, so erhalten wir als ihre erste Projektion (Grundriß) die Gerade g_1, als zweite Projektion (Aufriß) g_2. Die Projektionen einer Geraden sind im allgemeinen wieder Gerade. Denn sie ergeben sich als Schnittgerade der projizierenden Ebenen, die die Gesamtheit aller projizierenden Lote umfassen, mit den Bildebenen. Aus ihren Projektionen g_1 und

g_2 ergibt sich umgekehrt die ursprüngliche Gerade g als Schnitt der durch g_1 und g_2 zu den zugehörigen Bildebenen gelegten Normalebenen.

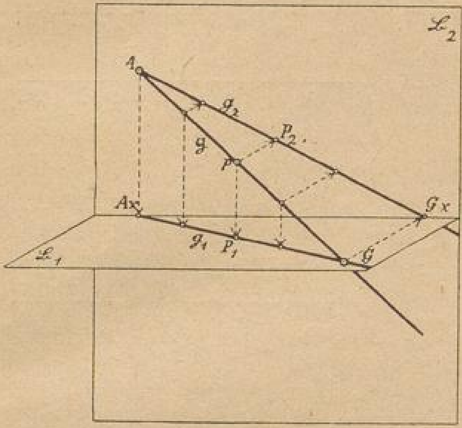


Fig. 38.

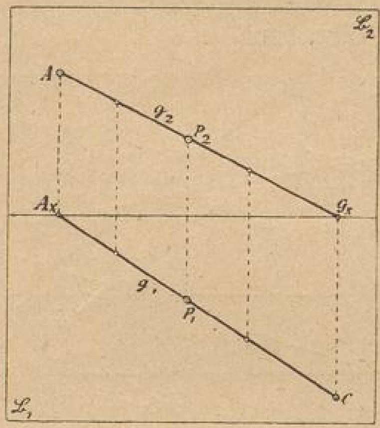


Fig. 39.

Nach Vereinigung der Grundebene mit der Bildebene gewinnen wir für die Gerade g (Fig. 38) die in Fig. 39 gegebene Darstellung. Die Bilder desselben Punktes P liegen auf einer Senkrechten zur Achse ($P_1P_2 \perp OX$).

b) Der Punkt G, in dem g die Grundrißebene durchstößt, heißt die **erste Spur** oder **Grundrißspur** der Geraden, entsprechend der Punkt A ihre **zweite Spur** oder **Aufrißspur.** Jeder dieser Spurpunkte fällt mit seiner gleichnamigen Projektion zusammen, z. B. G mit seiner ersten Projektion G_1. Die zweite Projektion G_x von G liegt auf der Achse, ebenso die erste A_x von A. Die Grundrißspur G der Geraden g liegt daher (Fig. 38 und 39) senkrecht unter (oder über) dem Schnittpunkte G_x ihrer zweiten Projektion g_2 mit der Achse; ihre Aufrißspur dagegen senkrecht über (oder unter) dem Schnittpunkte A_x ihrer ersten Projektion g_1 mit der Achse. Löse danach die

Aufgabe 1. Die Spuren einer durch ihre Projektionen g_1 und g_2 gegebenen Geraden zu bestimmen (Fig. 38).

Umgekehrt sind durch die Spuren G und A einer Geraden g auch ihre Projektionen g_1 und g_2 bestimmt.

Aufgabe 2. Gegeben sind die Spuren G und A einer Geraden g. Ihre Projektionen g_1 und g_2 zu finden.

Man lote (Fig. 39) die Spuren auf die Achse und verbinde den Fußpunkt A_x des Lotes von A mit G und den Fußpunkt G_x des Lotes von G mit A.

2) Gerade in besonderer Lage zu den Bildebenen.

Bei den folgenden in besonderer Lage befindlichen Geraden sind die Spuren zu bestimmen oder ihre Lage anzugeben. Zur Erleichterung der Anschauung und des Verständnisses ist stets zuerst ein Schrägbild anzufertigen.

a) g ist schief zu beiden Bildebenen und durchstößt $\mathfrak{B}_1$ hinter der Achse, so daß nur die zweite Spur sichtbar ist (Fig. 40 und 41). In welchem Raumviertel liegt die von den Spuren begrenzte Strecke AG der Geraden?

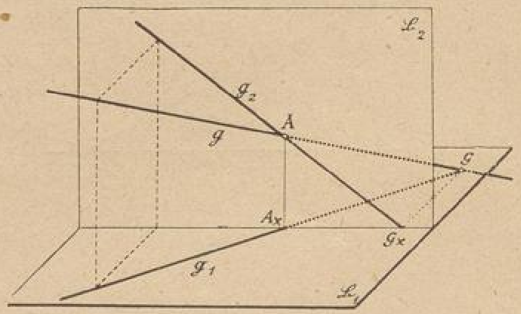


Fig. 40.

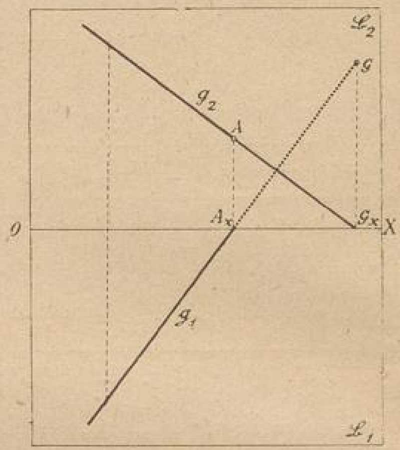


Fig. 41.

b) g ist parallel zu $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$) und schief zu $\mathfrak{B}_2$ ($\mathfrak{B}_1$). Vgl. Fig. 42 und 43. Die zweite Projektion g_2 ist der Achse parallel. Wo liegt G_x (A_x)?

c) g ist parallel zu $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Zeichnung! Wo liegen die Spuren G und A von g?

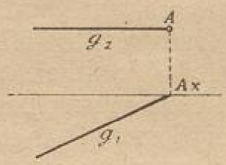


Fig. 42.

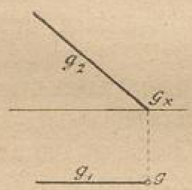


Fig. 43.

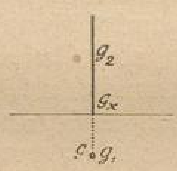


Fig. 44.

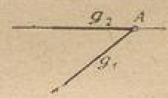


Fig. 45.

d) g ist senkrecht zu $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$). S. Fig. 44. g_1 schrumpft in diesem Falle in einen Punkt zusammen, der mit der ersten Spur G von g zusammenfällt. Wo liegt die zweite Spur A?

e) g liegt in $\mathfrak{B}_1$ ($\mathfrak{B}_2$). S. Fig. 45.

3a) Gerade und Punkt.

Ein Punkt P (Fig. 38 und 39) **liegt dann und nur dann auf einer Geraden, wenn seine Projektionen P_1 und P_2 auf den entsprechenden Projektionen der Geraden liegen, also P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2.**

Umgekehrt geht eine Gerade dann und nur dann durch einen Punkt P, wenn ihre Projektionen durch die entsprechenden Projektionen des Punktes gehen.

b) Für die Beurteilung der **Lage zweier Geraden** ergibt sich aus a) der wichtige Satz:

S c h n e i d e n s i c h z w e i G e r a d e (g und l, Fig. 46), s o l i e g e n d i e S c h n i t t p u n k t e S_1 u n d S_2 i h r e r g l e i c h n a m i g e n P r o j e k t i o n e n a u f e i n e m L o t (S_1S_2) z u r A c h s e u n d u m g e k e h r t.

Rückt der Schnittpunkt P der Geraden g und l ins Unendliche, so rücken damit auch seine Projektionen ins Unendliche. Was folgt daraus für die gleichnamigen Projektionen paralleler Geraden?[1])

Aufgabe. Zu einer durch ihre Projektionen g_1 und g_2 gegebenen Geraden durch einen Punkt P (P_1P_2) die Parallele zu zeichnen. Lösung!

Liegen (Fig. 47) die Schnittpunkte der Projektionen zweier Geraden g und l nicht senkrecht untereinander, so haben die Geraden im allgemeinen keinen Punkt gemeinsam. Die Projektionen stellen also **zwei windschiefe Gerade** dar.

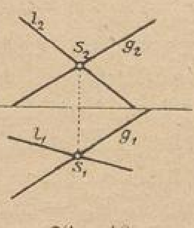


Fig. 46.

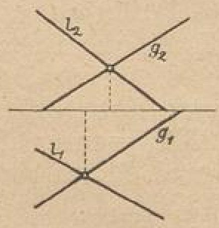


Fig. 47.

In welchem Ausnahmefalle können die Schnittpunkte der Projektionen zweier windschiefer] Geraden senkrecht untereinander liegen?

§ 13. Bestimmung der Tafelneigungen einer Geraden und der wahren Länge einer Strecke.

1) Aufgabe. Die Neigungswinkel einer Geraden g mit den Bildebenen zu bestimmen.

Da GA_x (s. Schrägbild Fig. 48) die Projektion von g auf $\mathfrak{B}_1$ ist, ist $\sphericalangle AGA_x$ der Neigungswinkel γ_1 von g mit der ersten Tafel oder Bildebene. Um γ_1 zu finden, denken wir uns das Dreieck GA_xA um GA_x in die erste Bildebene umgelegt, so daß es in die Lage des Dreiecks GA_xA_0 kommt. Wir erhalten dann zur Bestimmung von γ_1 die folgende Konstruktion: Man errichte (Fig. 49) auf GA_x in A_x das Lot $A_xA_0 = A_xA$ und verbinde A_0 mit G. Alsdann ist $\sphericalangle A_0GA = \gamma_1$. Entsprechend finden wir den Neigungswinkel γ_2 mit der zweiten Bildebene.

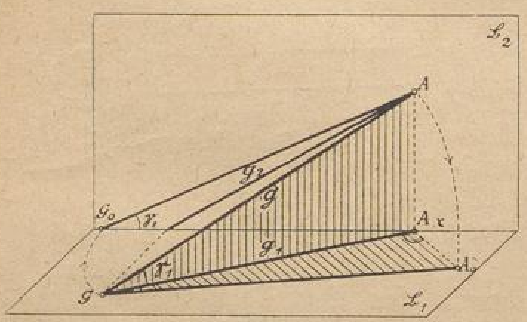


Fig. 48.

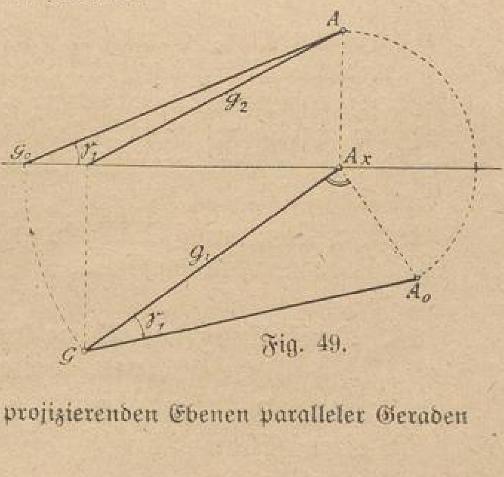


Fig. 49.

[1]) Beachte auch, daß die entsprechenden projizierenden Ebenen paralleler Geraden parallel sind.

Bemerkung. Anstatt Dreieck GA_xA um g_1 als Drehungsachse in die erste Bildebene umzulegen, können wir es uns auch um AA_x gedreht denken, bis es in die zweite Bildebene fällt (Fig. 48 und 49). Die Konstruktion wird dann noch einfacher. Inwiefern?

$GA_0 = AG_0$ ist die wahre Länge der von den Spurpunkten G und A begrenzten Strecke der Geraden g.

2) Aufgabe. Die wahre Länge der durch ihre Projektionen L_1M_1 und L_2M_2 gegebenen Strecke LM zu bestimmen.

Aus dem Schrägbilde Fig. 50 erkennen wir, daß die Strecke LM mit ihrer ersten Projektion L_1M_1 und den Endloten $LL_1 = l$ und $MM_1 = m$ das Trapez LMM_1L_1 bildet. Denken wir uns dieses Trapez um L_1M_1 in die Grundrißebene umgelegt, so erhalten wir das Trapez $L_0M_0M_1L_1$, in dem $L_0M_0 = LM$ und $L_0L_1 = l$ und $M_0M_1 = m$ ist. Um das umgelegte Trapez in der Zeichenebene (Fig. 51) zu gewinnen, errichten wir auf L_1M_1 in L_1 das Lot $L_1L_0 = L_xL_2 = l$ und in M_1 das Lot $M_1M_0 = M_xM_2 = m$. Sodann ist L_0M_0 gleich der wahren Länge der Strecke LM.

Eine andere mehr Raum ersparende Konstruktion ergibt sich aus dem folgenden leicht zu beweisenden Satz (Fig. 50 und 51): Die wahre Länge einer Strecke ist die Hypotenuse (s_0) eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die eine Projektion (s_1) und dessen andere Kathete die Differenz (l—m) der Abstände der Endpunkte der andern Projektion (s_2) von der Achse ist.

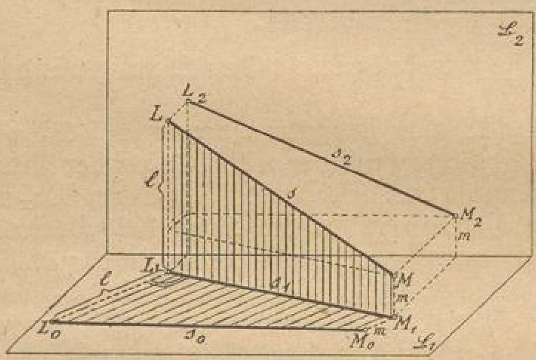


Fig. 50.

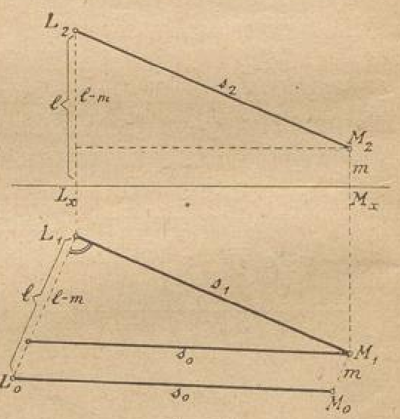


Fig. 51.

Welche Lage muß LM haben, damit eine Projektion die wahre Größe der Strecke darstellt?

§ 14. Darstellung der Ebene durch ein ebenes Vieleck (Darstellung von ebenen Vielecken).

1) Da die Lage einer Ebene durch drei ihrer Punkte bestimmt ist, so ist eine Ebene durch die Projektionen dreier Punkte, die nicht einer Geraden angehören, oder, was dasselbe ist, durch die Projektion eines in ihr liegenden Dreiecks, vollständig festgelegt. Infolgedessen dürfen bei einem ebenen Vieleck, z. B. dem Fünfeck in Fig. 52, nur von drei Ecken (1, 2, 3) die beiden Projektionen willkürlich gewählt werden. Von den übrigen Ecken (4 und 5) dagegen darf nur je eine Projektion (z. B. 4′ und 5′) beliebig angenommen werden.

Aufgabe 1. Von einem beliebig im Raum gelegenen ebenen Fünfeck sind der Grundriß (1′2′3′4′5′) und die Aufrisse (1″, 2″, 3″) dreier Ecken gegeben. Die Aufrisse der übrigen Ecken zu bestimmen (Fig. 52).

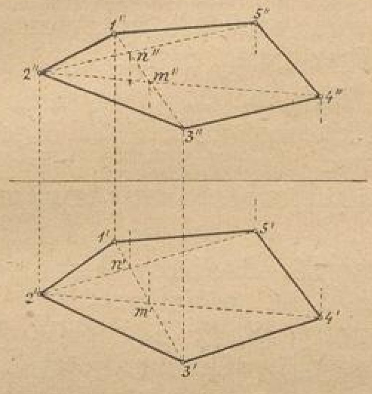


Fig. 52.

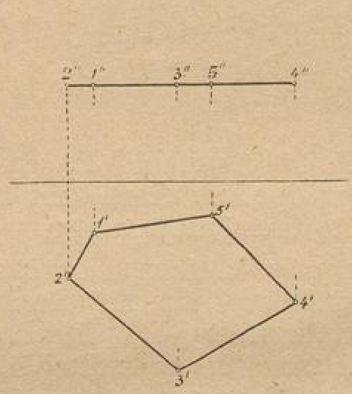


Fig. 53.

Die Aufrisse der Ecken 4 und 5 müssen so konstruiert werden, daß sie mit den drei beliebig angenommenen Ecken 1, 2, 3 in einer Ebene liegen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Diagonalen des Vieleckes sich schneiden müssen, also nicht windschief sein dürfen. Daher zeichnen wir zunächst die beiden Projektionen 1′3′ und 1″3″ der Diagonale 1 3 und ziehen durch den dritten festbestimmten Punkt 2 im Grundriß die Diagonalen 2′4′ und 2′5′, die die Diagonale 1′3′ in m′ und n′ schneiden. Die Aufrisse m″ und n″ dieser Schnittpunkte bestimmen wir durch Hinaufloten auf 1″3″ und erhalten, wenn wir 2″ mit m″ und n″ verbinden, die Aufrisse der Diagonalen 2 4 und 2 5, deren Endpunkte 4″ und 5″ senkrecht über den zugehörigen Grundrissen 4′ und 5′ liegen.

Was für eine zweite Projektion ergibt ein ebenes Vieleck (Fig. 53), das der Grundrißebene parallel ist? Wieviel Ecken brauchen in diesem Falle nur im Aufriß gegeben zu sein, um seine Projektionen zu zeichnen?

2) Gerade und Punkte in einer Ebene.

a) **Aufgabe 2.** Von der Geraden g, die in der Ebene des Dreiecks 1 2 3 liegt, ist die erste Projektion g_1 gegeben. Die zweite Projektion g_2 zu bestimmen (Fig. 54).

Die Gerade g kann nur dann in der Ebene des Dreiecks liegen, wenn die Schnittpunkte von g_2 mit den Seiten des Dreiecks im

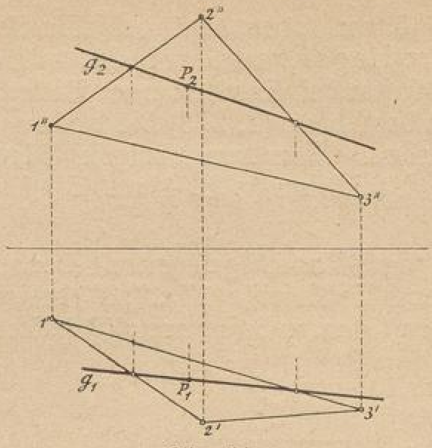


Fig. 54.

Aufriß senkrecht über den zugehörigen Schnittpunkten von g_1 mit den entsprechenden Seiten des Grundrißdreiecks liegen. Lösung!

b) Zur **Festlegung eines Punktes P in der Ebene,** die z. B. durch ein Dreieck bestimmt ist, benutzen wir eine beliebige durch P in der Ebene gezogene Gerade, die so das Bindeglied zwischen Punkt und Ebene bildet. Diese Hilfsgerade muß die in a) angegebene Eigenschaft besitzen.

Aufgabe 3. Von dem in der Ebene des Dreiecks 1 2 3 gelegenen Punkte P ist der Grundriß P_1 gegeben. Den Aufriß P_2 zu bestimmen.

Lösung s. Fig. 54. Statt einer beliebigen Geraden g kann man einfacher eine Eckenlinie benutzen.

3) **Aufgabe 4.** Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit der Ebene des Dreiecks 1 2 3 zu finden.

Zur Bestimmung des Schnittpunktes S (s. Schrägbild Fig. 55) legen wir durch die erste Projektion g_1 der Geraden g, die den Um-

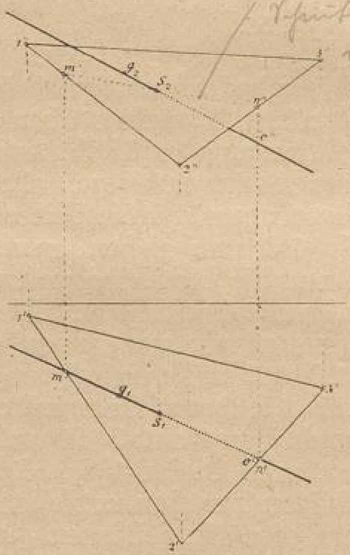


Fig. 55.

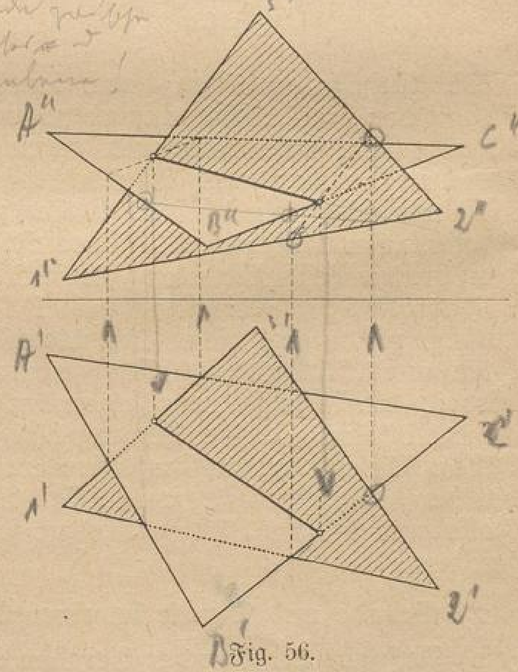


Fig. 56.

fang des Grundrisses in m′ und n′ trifft, die zur Grundebene senkrechte Hilfsebene. Diese schneidet das Dreieck in der Schnittlinie mn. Der Schnittpunkt von mn und der Geraden g ist der gesuchte Punkt S.

Wir erhalten daher die zweite Projektion der Schnittlinie mn mit dem Dreieck dadurch, daß wir die Punkte m′ und n′ von 1′2′ und 2′3′ hinaufloten. Der Schnittpunkt S_2 von g_2 mit m″n″ ist der Aufriß des gesuchten Durchstoßpunktes. Seine erste Projektion S_1 ergibt sich durch Herunterloten auf g_1.

Sichtbarkeit. Die Dreiecksfläche denken wir uns undurchsichtig. Um nun festzustellen, welches Stück der Geraden g durch das Dreieck z. B. im Grundriß, also für ein senkrecht über der Grundrißebene befindliches Auge, verdeckt erscheint, beachten wir, daß n′ (o′) die erste Projektion sowohl des auf der Dreiecksseite gelegenen Punktes n, als auch des auf der Geraden g gelegenen Punktes o ist. Da o″ unter n″ liegt, geht die Seite 23 über g hinweg. Mithin ist die Strecke S_1n′ von oben nicht sichtbar.

Aufgabe 5. Die Schnittlinie zweier sich schneidender Dreiecke (Vierecke), deren Projektionen gegeben sind, zu bestimmen (Fig. 56). Lösung nach Aufg. 4.

§ 15. Darstellung von Körpern in einfacher Stellung. Abwicklung.

Aufgabe 1. Einen auf der Grundebene ruhenden Würfel (Kantenlänge a = 5 cm), von dem zwei Seitenflächen der Aufrißebene parallel sind, in senkrechter Projektion zu zeichnen (Fig. 57).

Grundriß und Aufriß sind je ein Quadrat mit der Seite a.

Aufgabe 2. Der in Fig. 57 gezeichnete Würfel soll um die Kante 26 um den Winkel α = 30° gedreht und in der neuen Lage dargestellt werden (s. Fig. 58).

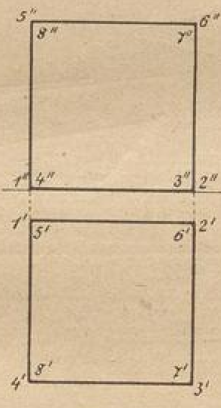


Fig. 57.

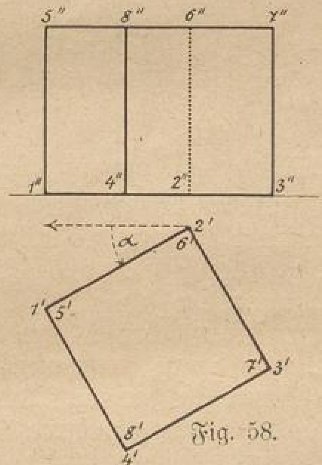


Fig. 58.

Aufgabe 3. Eine regelmäßig-achtseitige Säule, die auf einem quadratischen Sockel steht, darzustellen (Maßstab 1 : 10). Grundkante des Sockels a = 50 cm, der Säule b = 15 cm, Höhe entsprechend h = 15 cm und l = 80 cm.

Aufgabe 4. Eine regelmäßig-fünfseitige Pyramide, die mit der Grundfläche auf der Grundebene steht und deren Grundkante a und Höhe h gegeben sind, darzustellen. Ferner soll der im Abstande x von der Spitze zur Grundfläche parallele Schnitt und die Abwicklung des Körpers gezeichnet werden.

Der Grundriß des Körpers (Fig. 59) ist ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seite a. Die Verbindungsstrecken seiner Ecken mit dem Mittelpunkte S_1, der ersten Projektion der Spitze S, sind die Grundrisse der Seitenkanten. Zur Gewinnung des Aufrisses fälle man von S_1 auf die Achse das Lot und verlängere es um h bis S_2, der zweiten Projektion der Spitze, und verbinde S_2 mit den zweiten Projektionen der Ecken der Grundfläche. Denkt man sich die Ober-

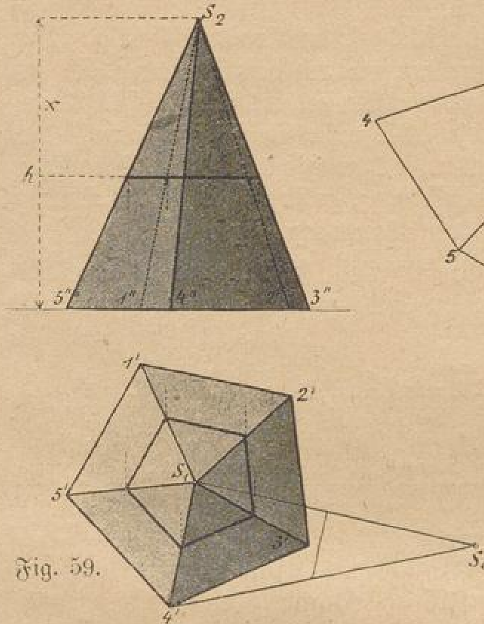


Fig. 59.

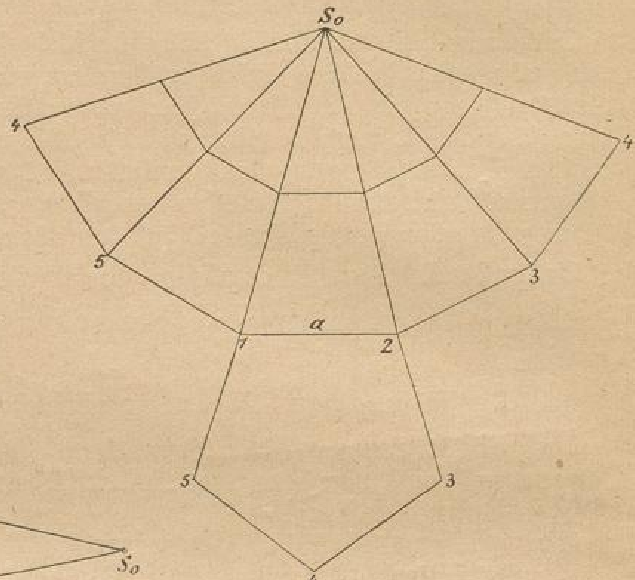


Fig. 60.

fläche des Körpers abgelöst und längs einer Seitenkante und der Grundkanten bis auf 1 2 aufgeschnitten, so erhält man durch Ausbreiten in eine Ebene das Netz des Körpers (Fig. 60), das im vorliegenden Falle aus fünf gleichschenkligen Dreiecken mit einem anhängenden Fünfeck besteht. Die Konstruktion des Netzes erfordert die Ermittlung der Länge der Seitenkante. Diese ergibt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ($4' S_1 S_0$), dessen eine Kathete gleich dem großen Radius des Fünfecks ($4' S_1$) und dessen andere Kathete die gegebene Höhe ist. Das auf der Grundebene senkrecht stehende Dreieck wird zur bequemen Konstruktion um $4' S_1$ in die Grundebene umgelegt (Fig. 59). Mit Hilfe des Netzes ist ein Modell des Körpers anzufertigen.

Aufgabe 5. Die Normalbilder eines auf der Grundebene stehenden a) geraden Zylinders mit Achsenschnitt und Querschnitt, b) geraden Kegels mit Achsenschnitt und Querschnitt, c) einer auf der Grundebene ruhenden Kugel zu zeichnen.

a) Der Grundriß (Fig. 61) ist ein mit der Grundfläche des Zylinders zusammenfallender Kreis. Der Aufriß ist ein zur Achse senkrechtes Rechteck, dessen eine Seite gleich dem Durchmesser des Grundkreises und dessen andere gleich der Höhe des Körpers ist. Welche Projektionen hat der Achsenschnitt 1 2 3 4 und der zur Grundfläche parallele Schnitt Q im Grund- und Aufriß? Eine Mantellinie, z. B.

1 4, erscheint in der ersten Projektion als Punkt, in der zweiten als Lot zur Achse.

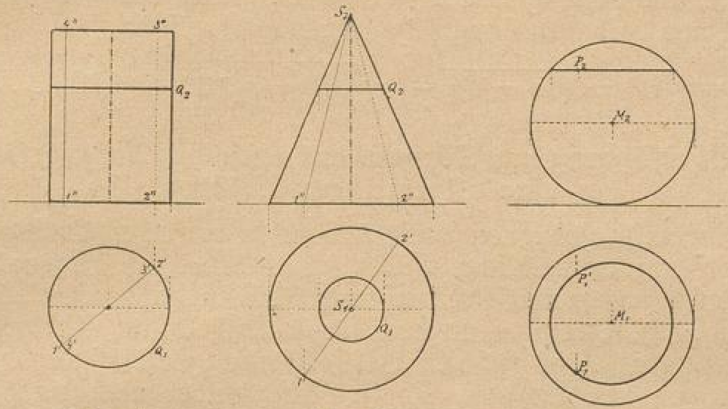


Fig. 61. Fig. 62. Fig. 63.

b) Welche Projektionen ergibt der Kegel? (Fig. 62). Welche der Achsenschnitt 1 2 S und der Parallelschnitt Q? Jeder Radius des Grundkreises, z. B. $1'S_1$, ist zugleich Projektion einer zugehörigen Seitenlinie (1 S).

c) Die Projektionsstrahlen (Fig. 63), die die Kugelfläche berühren, bilden eine die Kugel berührende Zylinderfläche. Die beiden Projektionen sind größte Kreise mit dem Radius der Kugel, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf einem Lot zur Achse liegen; sie sind gleichzeitig die Projektionen der zu den Bildebenen parallelen größten Kreise. Wie stellt sich ein zur Grundebene paralleler Schnittkreis dar? Wie findet man zum Aufriß P_2 des auf dem Schnittkreis gelegenen Punktes P den Grundriß P_1?

Aufgabe 6. Den Mantel des in Fig. 61 dargestellten Zylinders abzuwickeln.

Anleitung. Um die Länge eines Kurvenstücks als gerade Strecke annähernd darzustellen (zu rektifizieren), gibt man dem Stechzirkel eine so kleine Öffnung, daß das zwischen den Spitzen liegende Kurvenstück als geradlinig angenommen werden kann, trägt diese Strecke so oft auf einer Geraden ab, wie sie in dem vorliegenden Kurvenstück enthalten ist, und fügt das übrigbleibende Stück hinzu.

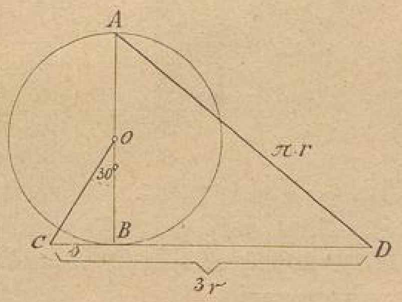


Fig. 64.

Von besonderer Wichtigkeit ist die **Rektifikation**[1]) **der Kreislinie.** Will man den halben Umfang des Kreises in Fig. 64 sehr angenähert haben, so

[1]) Zusammensetzung des lat. rectus (gerade) und facere (machen).

zeichne man den Durchmesser AB, trage im Mittelpunkte O einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel die in B gezeichnete Tangente in C trifft, und verlängere CB = s bis D, so daß CD = 3r wird. Alsdann ist der halbe Umfang sehr angenähert gleich

$$AD = \sqrt{4r^2 + (3r - s)^2} = r\sqrt{13\tfrac{1}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}141533\ldots r.$$[1]

§ 16. Überführung von Körpern aus einfacher Anfangsstellung in eine allgemeinere Stellung.

Die Normalprojektionen von Körpern in einfacher Stellung geben zumeist wenig anschauliche Bilder, weil dabei im allgemeinen die Projektionen mehrerer Kanten und Flächen zusammenfallen (vgl. z. B. Fig. 57). Jedoch kann der Körper leicht durch mehrfache Verschiebung parallel zu den Bildebenen (Tafeln) und mehrfache Drehungen um Achsen, die zu einer Bildebene senkrecht sind, sog. Tafellote, in eine allgemeinere Stellung übergeführt werden, in der wir sehr anschauliche Bilder von dem Körper erhalten.

Aufgabe 1. Ein Würfel soll aus einer einfachen Anfangsstellung durch Parallelverschiebung zu den Tafeln und durch Drehung um Tafellote in eine allgemeinere Stellung übergeführt und seine Projektion gezeichnet werden (Fig. 65).

I. Wir gehen von der in Fig. 65a gekennzeichneten einfachen

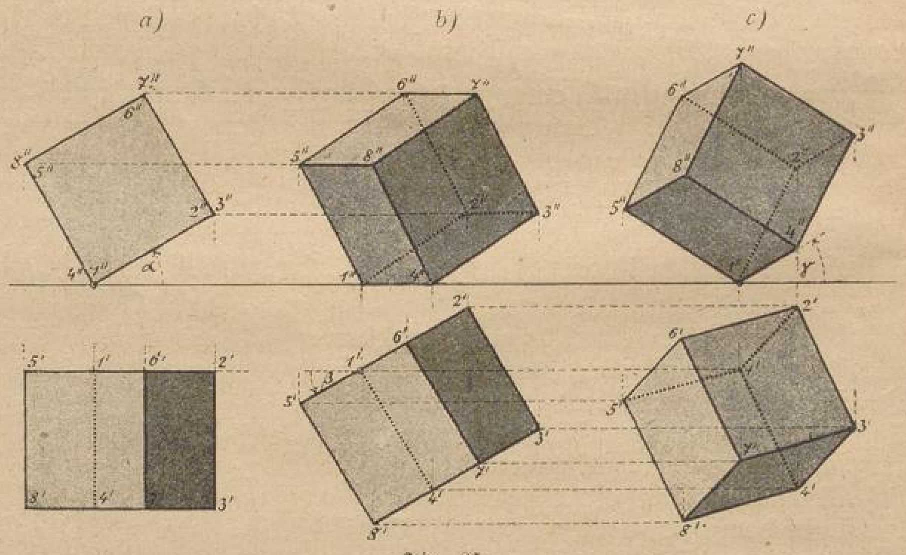


Fig. 65.

Stellung des Würfels aus, die sich aus der Frontstellung ergibt, wenn wir den Körper parallel zur zweiten Tafel verschieben und ihn

[1]) Statt 3,1415927 . . . r. Der Fehler ist also kleiner als $\frac{6}{100000} = \frac{3}{50000}$ des Durchmessers. $s = r \operatorname{tg} 30° = \frac{r\sqrt{3}}{3}$.

dann um die Kante 14, die ein Lot zur zweiten Tafel ist, als Achse um den Winkel α drehen. Der Aufriß verändert dabei nicht seine Gestalt, bleibt also ein Quadrat, das gegen die Achse um den Winkel α gedreht ist. Die Grundrißpunkte verschieben sich dabei parallel zur Achse; sie liegen senkrecht unter den zugehörigen Aufrißpunkten.

II. Nach vorausgegangener Parallelverschiebung zu der ersten Tafel drehen wir den Würfel um das durch die Ecke 1 gehende erste Tafellot um den Winkel β (Fig. 65 b). Der Grundriß erfährt dadurch keine Änderung in seiner Gestalt, er wird um den Punkt 1′ um Winkel β gedreht. Die Eckpunkte bewegen sich bei der vorgenommenen Drehung parallel zur Grundebene. Ihre Aufrisse liegen demnach auf den durch die Aufrißpunkte in der Stellung a) gezogenen Parallelen zur Achse. Sie ergeben sich durch Hinaufloten aus dem Grundriß.

III. Nach vorausgegangener Parallelverschiebung zur zweiten Tafel drehen wir endlich den Würfel um das durch Eckpunkt 1 gehende zweite Tafellot um den Winkel γ (Fig. 65 c). Der Aufriß erleidet dadurch nur eine Drehung um γ um den Punkt 1″; seine Gestalt bleibt erhalten. Da sich die Eckpunkte des Würfels bei der Drehung parallel zur zweiten Tafel bewegen, so bleiben ihre zweiten Abstände erhalten. Ihre Grundrisse verschieben sich mithin nur parallel zur Achse, liegen also auf Parallelen zur Achse. Die Grundrisse der Ecken finden wir schließlich aus ihren Aufrissen durch Herunterloten.

Aufgabe 2. a) Ein regelmäßig-sechsseitiges Prisma (einen geraden Zylinder), b) eine regelmäßig-$n$seitige Pyramide (Kegel) aus einer einfachen Anfangsstellung in eine allgemeinere Stellung überzuführen und darzustellen.

Anmerkung. Ein einfacheres Verfahren zur Darstellung eines Körpers in allgemeiner Lage lehrt § 22.

§ 17. Darstellung der Ebene durch Spuren. Gerade und Punkte in der Ebene. Tafelneigung einer Ebene.

1) Eine unbegrenzte Ebene $\mathfrak{E}$ (Fig. 66) kann nicht wie Punkt und Gerade durch Projektion auf die Bildebenen dargestellt werden. Denn man bekäme im allgemeinen als ihre Projektion wieder die Bildebene. Man pflegt deshalb eine solche Ebene, da sie durch zwei sich schneidende Gerade bestimmt ist, durch ihre **Spuren** e_1 und e_2 auf den Projektionsebenen, das sind ihre Schnittgeraden mit den Projektionsebenen, darzustellen (Fig. 67). Die Schnittgerade e_1

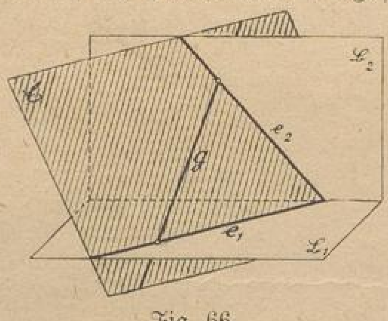


Fig. 66.

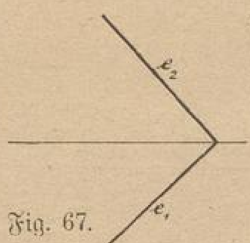


Fig. 67.

heißt die **erste**, e_2 die **zweite Spur**. Die beiden Spuren treffen sich in einem Punkte auf der Achse (Grund?).

Übungen. Stelle eine Ebene $\mathfrak{E}$ im Schrägbilde dar und zeichne daneben ihre Spuren in senkrechter Projektion, wenn $\mathfrak{E}$

a) zur ersten Bildebene senkrecht steht und schief zur zweiten ist;
b) zur zweiten Bildebene senkrecht steht und schief zur ersten ist;
c) zu einer Bildebene, etwa $\mathfrak{B}_2$, parallel ist;
d) zur Achse parallel ist;
e) zur Achse senkrecht ist.

Wie verlaufen die Spuren paralleler Ebenen? (Schrägbild!)

2) Gerade in der Ebene.

Liegt eine Gerade g (Fig. 66) in einer Ebene (e_1, e_2), so kann sie die Bildebenen nur in den Spuren der Ebene $\mathfrak{E}$ durchstoßen, und die Durchstoßpunkte sind zugleich die Spurpunkte der Geraden. Daraus ergibt sich:

Eine Gerade liegt dann und nur dann in einer Ebene, wenn ihre Spurpunkte in den gleichnamigen Spuren der Ebene liegen. Umgekehrt geht eine Ebene durch eine Gerade, wenn ihre Spuren durch die gleichnamigen Spurpunkte der Geraden hindurchgehen (Fig. 66).

Aufgabe 1. Von einer in der Ebene $\mathfrak{E} = (e_1 e_2)$ liegenden Geraden g ist die erste Projektion g_1 gegeben. Die zweite Projektion g_2 zu bestimmen.

Zur Lösung s. Fig. 72.

g_1 schneidet e_1 in G und die Achse in A_x. Der zweite Spurpunkt liegt senkrecht über A_x auf e_2. Zeichnung!

Aufgabe 2. Die Spuren der Ebene zu zeichnen, die durch zwei sich schneidende Gerade $g = (g_1, g_2)$ und $h = (h_1, h_2)$ bestimmt ist.

Die erste Spur e_1 (Fig. 68) der gesuchten Ebene muß durch die ersten Spurpunkte G_1 und H_1 von g und h gehen, ebenso e_2 durch G_2 und H_2. Die gefundenen Spuren e_1 und e_2 müssen sich auf der Achse treffen.

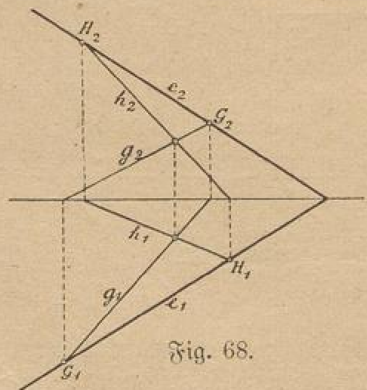


Fig. 68.

Aufgabe 2a. Löse Aufg. 2 für den Fall, daß die gegebenen Geraden parallel sind.

Anmerkung. Liegt ein Spurpunkt einer Geraden nicht auf der Zeichenfläche, so benutzt man eine Hilfsgerade, die die beiden gegebenen Geraden schneidet.

Aufgabe 3. Die Schnittlinie zweier durch ihre Spuren (e_1, e_2) und (f_1, f_2) gegebenen Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ zu bestimmen.

Aus dem Schrägbilde (Fig. 69) erkennt

man, daß die Schnittpunkte G_1 und G_2 der gleichnamigen Spurgeraden zugleich die Spurpunkte der gesuchten Schnittgeraden g sind. Lösung s. Fig. 70 (vgl. § 12, Aufg. 2).

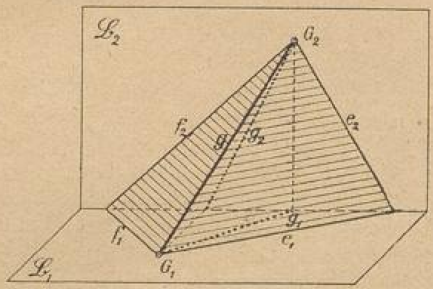


Fig. 69.

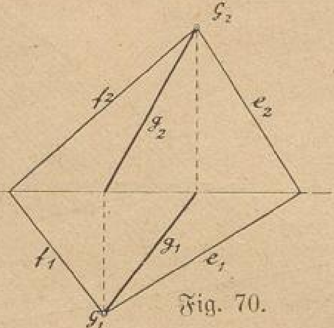


Fig. 70.

Stehen die beiden Ebenen E und F senkrecht zur ersten Bildebene, so ist auch die Schnittgerade g senkrecht (L. I. § 72, 3b) zu ihr (Fig. 71).

3) Punkte in der Ebene.

Als Bindeglied zwischen Punkt und Ebene benutzt man die Gerade. **Ein Punkt liegt dann und nur dann in einer Ebene, wenn er auf einer in ihr beliebig gezogenen Geraden liegt und umgekehrt.**

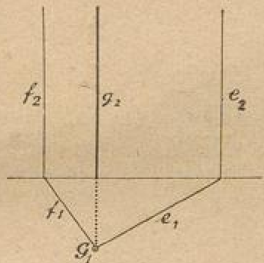


Fig. 71.

Aufgabe 4. Von einem auf der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gelegenen Punkte P ist die erste Projektion P_1 gegeben. Die zweite Projektion zu bestimmen (Fig. 72).

Durch P_1 zieht man die Gerade g_1, die man als erste Projektion einer durch P in E gezogenen Geraden betrachtet, bestimmt nach Aufg. 1 ihren Aufriß g_2 und erhält durch Hinaufloten den Aufriß P_2.

Wie kann man also feststellen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt oder nicht?

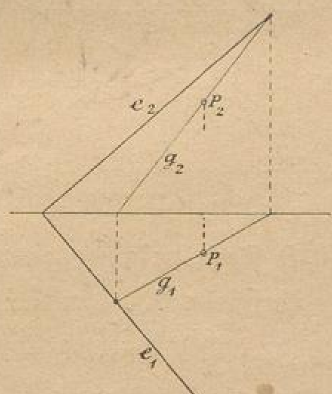


Fig. 72.

In der Regel benutzt man zur Vereinfachung der Konstruktion nicht eine beliebige Gerade der Ebene, sondern eine **Tafelparallele,** d. h. eine Gerade, die entweder der ersten Tafel B_1 **(erste Tafelparallele)** oder der zweiten Tafel B_2 **(zweite Tafelparallele)** parallel ist.

In Fig. 74 ist die Aufg. 4 mit Hilfe der ersten Tafelparallelen gelöst. Die durch P gehende erste Tafelparallele t (s. das Schrägbild Fig. 73) hat als erste Projektion t_1 eine Parallele zu e_1 (L. I. § 71, 1), als zweite t_2 eine Parallele zur Achse. Wo liegt ihre erste Spur? Löse die Aufgabe auch mit Hilfe der zweiten Tafelparallelen.

Welche Sätze gelten für die Projektionen der Tafelparallelen einer Ebene?

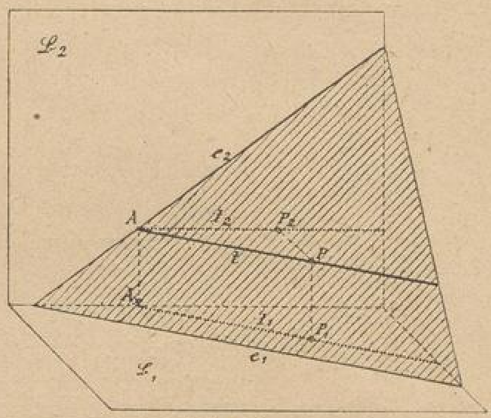


Fig. 73.

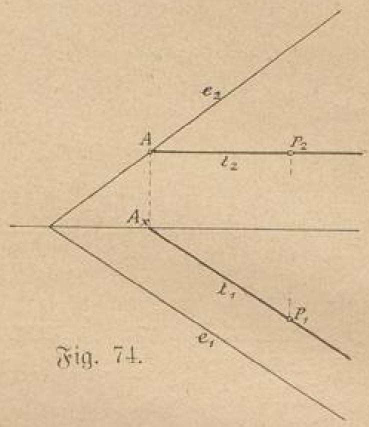


Fig. 74.

Aufgabe 5. Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch eine Gerade (g_1, g_2) und einen Punkt (P_1, P_2) hindurchgeht (Fig. 75).

Die Aufgabe wird auf Aufg. 2 zurückgeführt, indem man durch Punkt P eine Gerade legt, die die gegebene Gerade in einem Punkte $Q = (Q_1, Q_2)$ schneidet. Am bequemsten benutzt man eine Tafelparallele, z. B. die Parallele zur zweiten Bildebene t_1, t_2 (zweite Spurparallele).

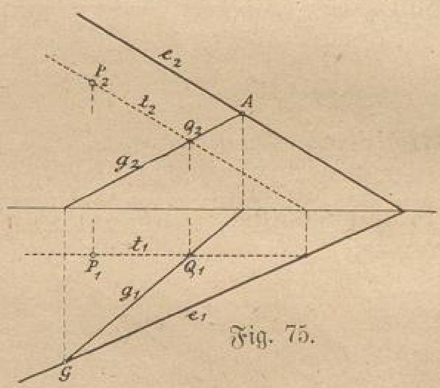


Fig. 75.

Aufgabe 6. Die Spuren einer beliebigen Ebene zu zeichnen, die durch einen gegebenen Punkt (P_1, P_2) geht.

Aufgabe 7. Die Spuren einer Ebene zu bestimmen, die durch einen gegebenen Punkt (P_1. P_2) geht und einer gegebenen Ebene (e_1, e_2) parallel ist.

4) Tafelneigung einer Ebene.

Aufgabe 8. Den Neigungswinkel einer Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ mit der ersten Tafel (die erste Tafelneigung) zu bestimmen (Fig. 76 und 77).

Um die erste Tafelneigung α_1 zu erhalten, schneide man die Ebene $\mathfrak{E}$ durch eine zur ersten Spur e_1 senkrechte Hilfsebene $\mathfrak{H}$. Aus dieser wird durch die Ebene $\mathfrak{E}$ und die beiden Bildebenen das rechtwinklige Dreieck BA_xA, das sog. **Neigungsdreieck,** herausgeschnitten. Dieses denke man sich um A_xA als Achse gedreht, bis es in die zweite Tafel fällt (B_0A_xA). Dann ist $\sphericalangle A_xB_0A = \alpha_1$ die gesuchte Tafelneigung.

Lösung. Man fälle (Fig. 77) von dem beliebigen Punkte A der Spur e_2 auf die Achse das Lot AA_x, ebenso von A_x auf die erste Spur e_1 das Lot A_xB und beschreibe um A_x mit A_xB als Radius

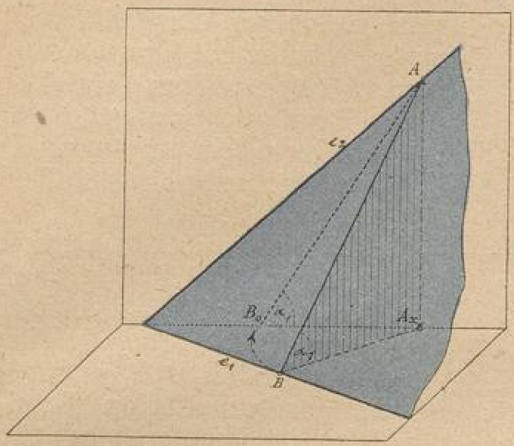


Fig. 76.

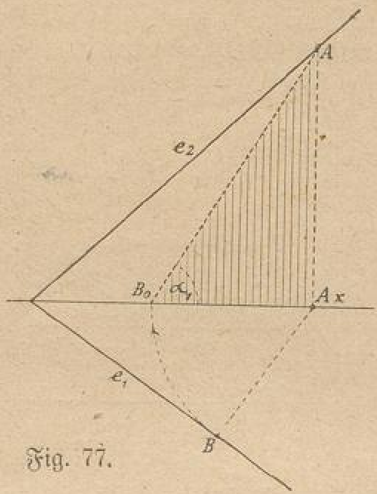


Fig. 77.

den Kreis, der die Achse in B_0 trifft. Dann ist $\sphericalangle AB_0A_x = \alpha_1$. Bestimme entsprechend die zweite Tafelneigung α_2.

Aufgabe 9 (Umkehrung von 8). Von einer Ebene $\mathfrak{E}$ ist die erste Spur e_1 und ihre erste Tafelneigung α_1 gegeben. Die zweite Spur der Ebene zu bestimmen.

§ 18. Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene.

1) Aufgabe 1. Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit einer Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ zu bestimmen (Fig. 78).

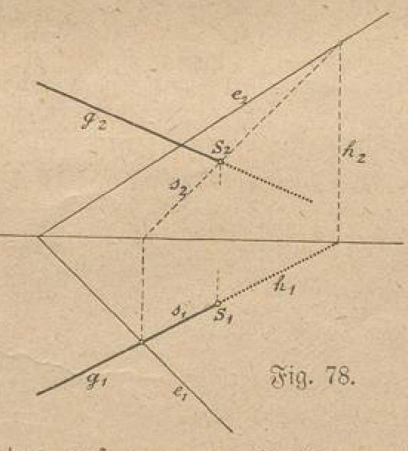


Fig. 78.

Die Lösung für die wichtige Aufgabe findet man am besten an der Hand eines Schrägbildes. Durch g lege man eine zur ersten Bildebene senkrechte Hilfsebene $\mathfrak{H}$. Ihre erste Spur h_1 fällt mit g_1 zusammen, ihre zweite h_2 steht senkrecht zur Achse. Da die Hilfsebene $\mathfrak{H}$ die Gerade g enthält, so liegt der Schnittpunkt S von g mit der gegebenen Ebene $\mathfrak{E}$ auch auf der Schnittgeraden s der Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Der Aufriß S_2 von S ergibt sich daher als Schnittpunkt von g_2 mit s_2. Den Grundriß S_1 des Durchdringungspunktes erhält man endlich durch Herunterloten auf $g_1 = s_1$. Zeichnung!

Aufgabe 2. Den Schnittpunkt S einer Geraden $g = (g_1, g_2)$ mit der Ebene eines Parallelogramms ABCD zu bestimmen.

Als Hilfsebene benutze man wieder die durch g gehende erste Lotebene (vgl. § 14 Aufg. 4).

2) Gerade in senkrechter Lage zu einer Ebene.

Projiziert man (Fig. 79) eine Gerade g, die auf einer Ebene E senkrecht steht, senkrecht auf eine Ebene B, so bildet die Projektion g_1 der Geraden mit der Spur e der Ebene E einen rechten Winkel.

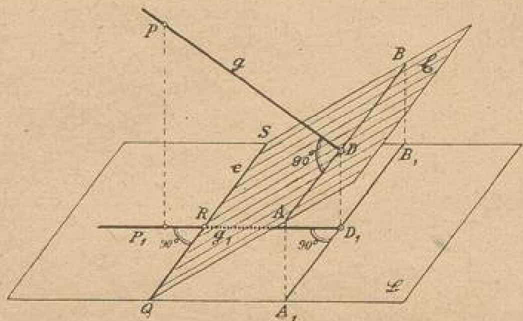


Fig. 79.

Denn zieht man durch den Durchdringungspunkt D der Geraden g die Parallele AB zur Bildebene, so ist, da $A_1D_1 \parallel AD$ und AD senkrecht zur Ebene DD_1P_1P ist, auch A_1D_1 senkrecht zu dieser Ebene (L. I. § 65, 2), folglich zunächst $\sphericalangle\ P_1D_1A_1 = 90°$.[1]) Als Gegenwinkel an Parallelen ist dann auch der von g_1 und der Spur e gebildete Winkel $P_1RQ = 90°$. Daraus folgt:

Die Projektionen einer Geraden, die zu einer Ebene senkrecht steht, schneiden die gleichnamigen Spuren der Ebene unter rechten Winkeln.

Aufgabe 3. Von einem gegebenen Punkte $P = (P_1, P_2)$ auf eine Ebene $E = (e_1, e_2)$ das Lot zu fällen und den Abstand des Punktes von der Ebene zu bestimmen (Fig. 80). (Schrägbild!)

Von P_1 und P_2 hat man die Senkrechten zu den gleichnamigen Spuren der Ebene zu zeichnen, um die erste und zweite Projektion des gesuchten Lotes zu erhalten. Die Projektionen des Fußpunkts D des Lotes ergeben sich nach Aufg. 1.

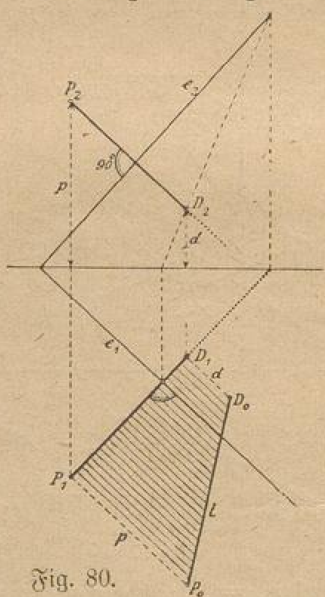


Fig. 80.

Die wahre Länge P_0D_0 des Abstandes $PD = l$ erhalten wir nach § 13, 2 aus dem zur ersten Bildebene senkrechten Trapez P_1D_1DP, das wir in diese Ebene um P_1D_1 als Achse umlegen.

Aufgabe 4. Den Abstand zweier windschiefer Geraden $g = (g_1, g_2)$ und $l = (l_1, l_2)$ zu bestimmen. Anleitung s. L. I. § 69 Aufg. 2.

§ 19. Einführung einer dritten Bildebene.

1) Eine ebene Figur, die in einer zur Bildachse senkrechten Ebene liegt, ist durch ihre beiden Projektionen nicht bestimmt. Ein in

[1]) Das Normalbild eines rechten Winkels, von dem ein Schenkel der Bildebene parallel ist, ist also wieder ein rechter!

solcher Lage befindlicher Kreis z. B. projiziert sich auf beide Bildebenen als eine seinem Durchmesser gleiche Strecke, die keinen sicheren Rückschluß auf das ursprüngliche Gebilde ermöglicht. Welche Projektionen hat ein gerader Zylinder, dessen Achse der Bildachse parallel ist? Um aber auch in solchen Fällen Gebilde, bei denen Flächen in normaler Lage zur Achse vorkommen, nach ihrer Gestalt festlegen zu können, nehmen wir eine dritte Bildebene, die **Seitenrißebene** B_3, zu Hilfe, die wir senkrecht zu B_1 und B_2, also senkrecht zur Bildachse annehmen. Die Projektion auf diese dritte Ebene heißt **dritte Projektion** oder **Seitenriß** (Profil), da sie eine seitliche Ansicht des Körpers wiedergibt. Vgl. Fig. 81, wo ein einfaches Haus mit Walmdach[1]) mit seinen drei Projektionen in schiefer Parallelprojektion gezeichnet ist. Um die drei Projektionen in derselben Zeichenebene darstellen zu können, denken wir uns nach Vereinigung der ersten mit der zweiten Bildebene die Seitenrißebene um OZ gedreht, bis sie in die Aufrißebene fällt. Wir erhalten dann die in Fig. 82 gegebene Darstellung.

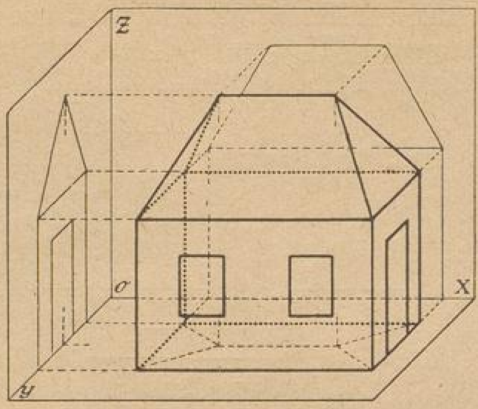


Fig. 81.

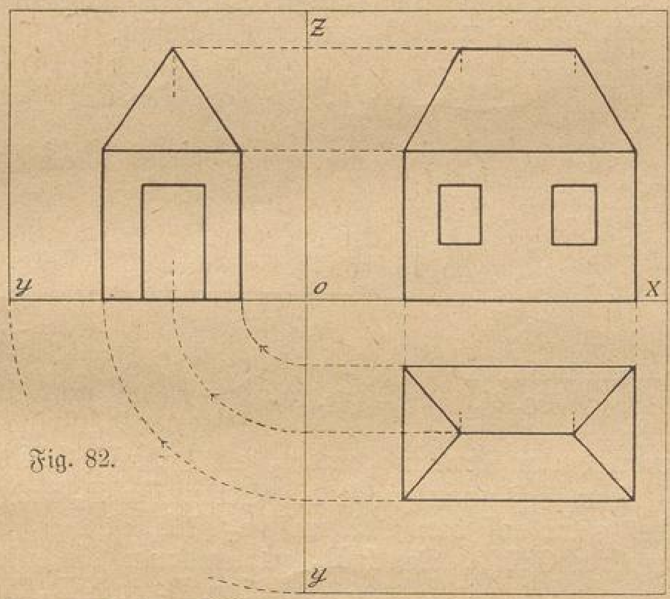


Fig. 82.

Durch das Hinzutreten von B_3 ergeben sich zwei neue Bildachsen (OY und OZ), die wir als y- oder Tiefenachse und z- oder Höhenachse unterscheiden (s. § 6, 1).

2) Aufgabe 1. Aus den beiden Projektionen P_1 und P_2 eines Punktes P die dritte P_3 zu bestimmen (Fig. 83 und 84).

[1]) Ein Walm- oder holländisches Dach entsteht aus einem einfachen zweiseitigen Dach dadurch, daß an Stelle der Giebel Dachflächen gesetzt werden, so daß die 4 Traufkanten auf gleicher Höhe liegen. Walm = schräg zurücktretender Dachgiebel.

Man fälle auf die Achse OZ das Lot P_2P_z und trage auf der Verlängerung $P_zP_3 = P_1P_x$ ab. Andere Lösung s. Fig.

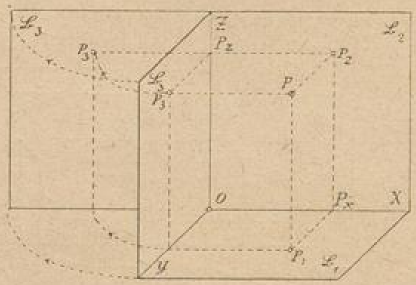


Fig. 83.

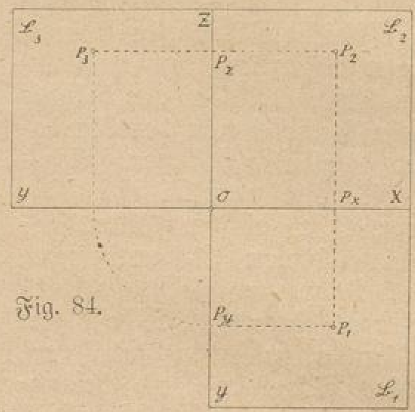


Fig. 84.

Aufgabe 2. Aus den beiden ersten Projektionen g_1 und g_2 einer Geraden die dritte g_3 zu bestimmen.

Man bestimme die dritten Projektionen der Spurpunkte der Geraden auf $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ und verbinde sie.

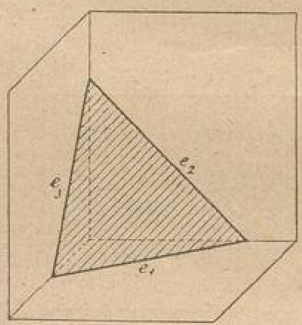


Fig. 85.

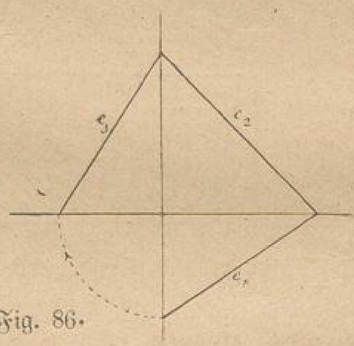


Fig. 86.

Aufgabe 3. Die dritte Spur e_3 einer Ebene (e_1, e_2) zu zeichnen.

Lösung s. Fig. 86, Darstellung in schiefer Parallelprojektion s. Fig. 85.

3) **Aufgabe 4.** Den Abstand eines Punktes P von einer Ebene $\mathfrak{E}$ zu bestimmen, deren Spuren e_1 und e_2 zur Bildachse OX parallel sind (Fig. 87).

Man bestimme zuerst die Seitenrisse P_3 und e_3. Das Lot P_3D_3, das man auf den Seitenriß e_3 fällt, ist der gesuchte Abstand in wahrer Größe. Durch D_3 gewinnt man die erste und zweite Projektion D_1 und D_2 des Lotfußpunktes.

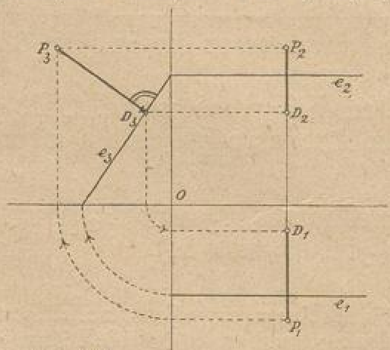


Fig. 87.

4) Die Lösung vieler Aufgaben erfährt durch die Einführung einer in jedem einzelnen Falle besonders zu wählenden beliebigen seitlichen Ebene, die zu einer Bildebene senkrecht ist, eine wesentliche Vereinfachung (vgl. auch § 21, Aufg. 4). Die Benutzung einer eigentlichen Seitenrißebene wäre dabei zwecklos.

Aufgabe. Von zwei Quadern I und

II, deren Kantenlängen gegeben sind, liegt der eine (I) mit einer Seitenfläche, der andere (II) nur mit der Kante $\overline{1\,2}$ in der Grundebene und stützt sich mit einer Fläche auf die Kante $3\,4$ des ersten. Man soll die Projektionen des zweiten Quaders zeichnen (Fig. 88).

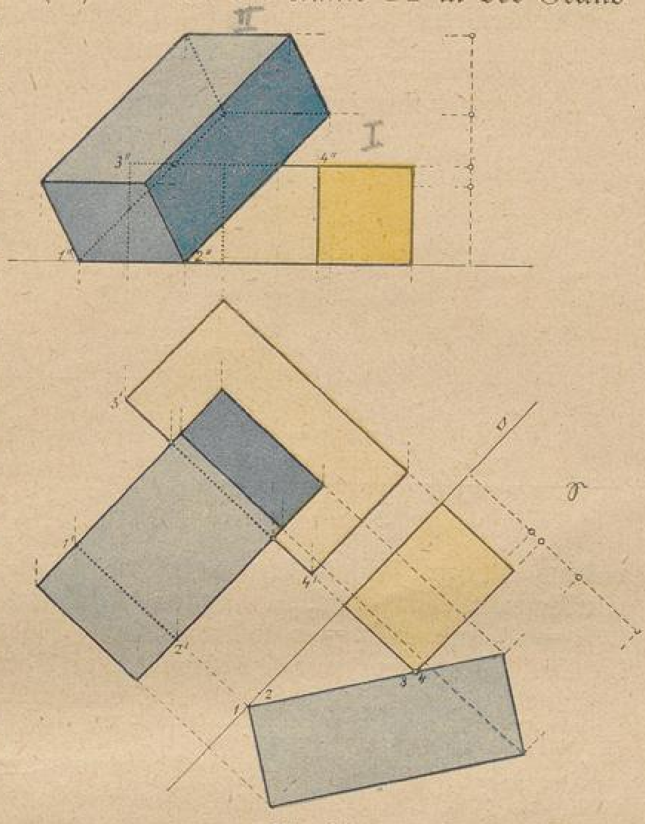


Fig. 88.

Wir wählen eine zu den Kanten $\overline{1\,2}$ und $\overline{3\,4}$ senkrechte dritte Bildebene S, die die Grundrißebene in der Spur s schneidet, und legen S, um die Zeichnung in derselben Zeichenebene ausführen zu können, um ihre Spur s in die Grundebene um. Da die Kantenlängen beider Körper gegeben sind, so können wir mit Hilfe des Grundrisses von I und aus der Lage der Kante $\overline{1\,2}$ von II die Projektion der beiden Quader auf S leicht zeichnen. Wie kann daraus der Grundriß und Aufriß von II gefunden werden?

§ 20. Umlegung ebener Figuren und Bestimmung ihrer wahren Gestalt. Affinität.

1 a) Um die wahre Gestalt einer durch ihre Projektionen gegebenen ebenen Figur zu erhalten, denken wir uns die Ebene, in der die Figur liegt, um eine Spur (z. B. e_1) als Achse in die zugehörige Bildebene (B_1) umgelegt und bestimmen dann in der sich ergebenden Lage die ebene Figur.

Die Lösung dieser Aufgabe beruht, da eine ebene Figur durch die Lage ihrer Eckpunkte bestimmt ist, auf der Lösung der folgenden

Grundaufgabe: Einen in der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gegebenen Punkt $P = (P_1, P_2)$ in die Grundebene umzulegen, d. h. man soll die Lage P_0 bestimmen, die P erhält, wenn die Ebene E um e_1 als Achse in die erste Bildebene umgeklappt wird.

Denken wir uns an der Hand des Schrägbildes (Fig. 89) die Ebene

$\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ um e_1 gedreht, dann beschreibt der in $\mathfrak{E}$ gelegene Punkt P einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht zu e_1 ist. Mithin fällt P nach vollendeter Umlegung auf die Verlängerung des von P_1 auf e_1 gefällten Lotes P_1B. Die Entfernung $P_0B = PB$, der **Drehungs-**

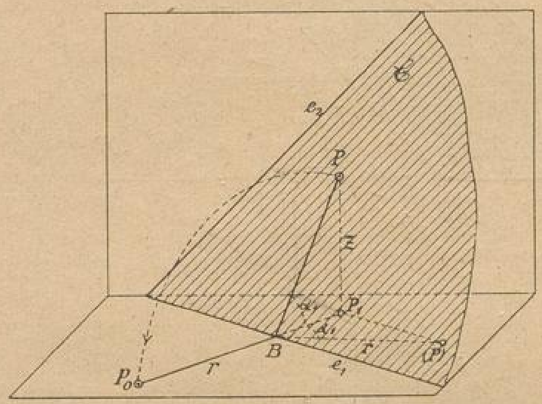


Fig. 89.

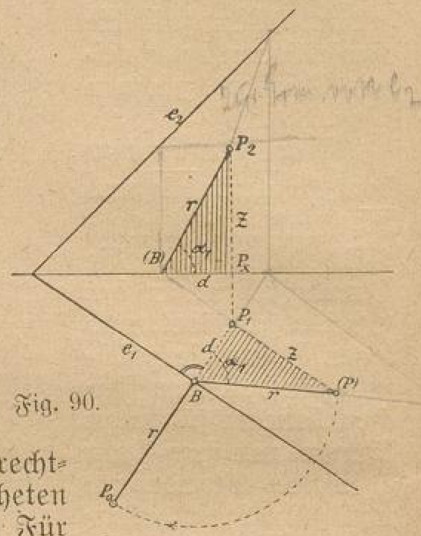


Fig. 90.

radius r, ergibt sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks PP_1B, dessen Katheten $P_1B = d$ und $PP_1 = z$ bekannt sind. Für die Ermittlung von r wird das Dreieck um BP_1 in die erste Bildebene umgeklappt, so daß man das schraffierte Dreieck $P_1(P)B$ erhält. $\sphericalangle P_1B(P) = \alpha_1$ ist die erste Tafelneigung der Ebene $\mathfrak{E}$.

Für die Konstruktion des Drehungsradius r merken wir uns den Satz: Der Drehungsradius eines in die erste Bildebene umgelegten Punktes P ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich dem Abstande der ersten Projektion des Punktes P von der Umdrehungsachse und dessen andere Kathete gleich seinem ersten Tafelabstand ist.

Zur Lösung (Fig. 90) fälle man von P_1 auf e_1 das Lot P_1B und beschreibe mit dem Drehungsradius r um B den Kreis, der das über B verlängerte Lot P_1B in P_0 trifft.[1]) Der Drehungsradius r kann auch aus dem Dreieck $P_2(B)P_x$, wo $(B)P_x = BP_1$ ist, bestimmt werden, was bei vielen Anwendungen bequemer ist.

Für die Lösung der Aufg. ist die Angabe der zweiten Spur e_2 nicht erforderlich. Wie kann diese bestimmt werden, wenn e_1, P_1 und P_2 gegeben ist? (Spurparallele!)

Aufgabe 1. Die wahre Größe des Winkels zweier sich schneidender Geraden g und h, deren Projektionen (g_1, g_2) und (h_2, h_2) gegeben sind, zu ermitteln.

---

[1]) Daß die Punkte P_1BP_0 scheinbar nicht auf einer Geraden liegen, beruht auf einer lehrreichen optischen Täuschung.

Zeichne die erste Spur der durch g und h bestimmten Ebene und lege um sie den Scheitel des Winkels in die erste Bildebene um.

Aufgabe 2. Von einem in Grund- und Aufriß gegebenen Walmdach die wahren Größen der Dachflächen und ihre Neigungswinkel mit der Grundebene zu bestimmen (Fig. 91).

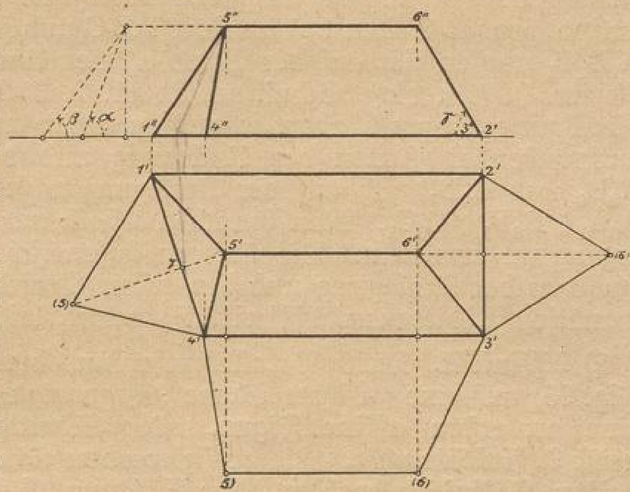
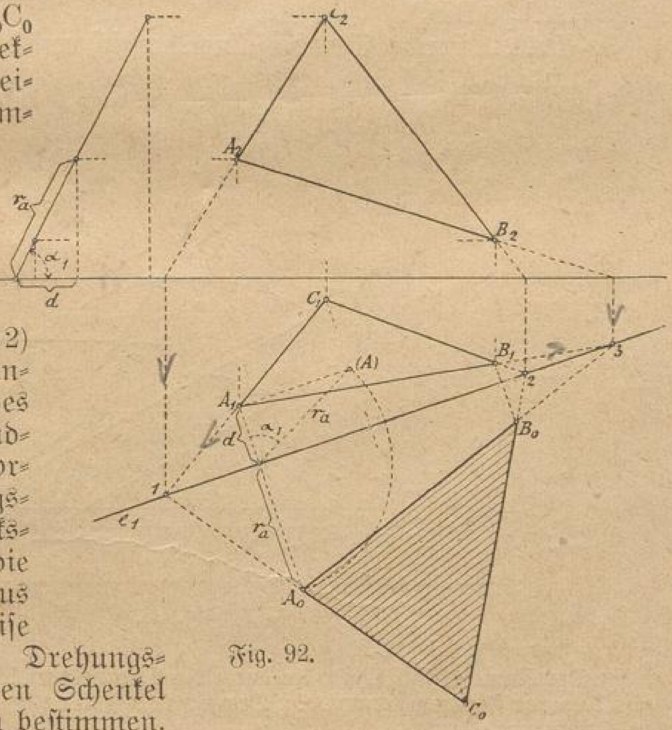


Fig. 91.

Das Trapez 1′2′3′4′ bildet die erste Projektion der vier Traufkanten. Die Firstlinie $\overline{56}$ verläuft parallel und symmetrisch zu den Traufkanten $\overline{12}$ und $\overline{43}$. Die wahre Größe des Dachdreiecks 145 erhält man durch Umlegung um die Traufkante $\overline{14}$ in die Grundebene, wobei nur die Umlegung des Punktes 5 zu ermitteln ist. Der Winkel $5\,7\,5' = \alpha$ ist der Neigungswinkel der Dachfläche. Wie findet man die gesuchten Größen für die übrigen Dachflächen?

b) Aufgabe 3. Die wahre Gestalt $A_0B_0C_0$ eines durch seine Projektionen gegebenen Dreiecks ABC durch Umlegung in die Grundebene zu bestimmen (Fig. 92).



Man ermittle zunächst die Grundrißspur e_1 der Dreiecksebene (§ 17, Aufg. 2) und lege dann die einzelnen Eckpunkte des Dreiecks nach der Grundaufgabe um. Es ist vorteilhaft, den Neigungswinkel α_1 der Dreiecksebene gegen $\mathfrak{B}_1$ an die Bildachse in der aus Fig. 92 ersichtlichen Weise anzutragen und die Drehungsradien auf dem freien Schenkel von α_1 gleichzeitig zu bestimmen.

Fig. 92.

Zwischen der Umlegung $A_0B_0C_0$ des Dreiecks ABC und seiner ersten Projektion $A_1B_1C_1$ besteht eine einfache geometrische Beziehung (Verwandtschaft), die eine genauere und wesentlich bequemere Lösung aller ähnlichen Aufgaben ermöglicht. Die Verlängerungen entsprechender Seiten des Dreiecks ABC und seiner ersten Projektion $A_1B_1C_1$ müssen sich auf der Spur e_1, der Umlegungsachse schneiden (Grund?). Da diese Schnittpunkte (1, 2, 3) bei der Umlegung um die Spur e_1 liegen bleiben, so müssen daher auch die Verlängerungen entsprechender Seiten der Umlegung und des Grundrisses (z. B. A_0B_0 und A_1B_1) sich auf der Umlegungsachse schneiden. Ferner ist $A_0A_1 \parallel B_0B_1 \parallel C_0C_1$. Man braucht deshalb nur einen Punkt der Umlegung zu ermitteln. Die übrigen lassen sich dann auf Grund der zwischen der Umlegung und der ersten Projektion bestehenden Verwandtschaft, die man Affinität[1]) nennt, leicht finden.

2) Affinität. Durch Parallelprojektion einer ebenen Figur (ABC, Fig. 93) auf eine zu ihrer Ebene (𝔈) geneigte Ebene (𝔅) ergibt sich eine zur ersten **affine Figur.** Die Schnittgerade beider Ebenen heißt **Affinitätsachse.** Die projizierenden Strahlen (AA_1, BB_1, CC_1) heißen **Affinitätsstrahlen,** ihre Richtung (AA_1) **Affinitätsrichtung.** Zwischen zwei affinen Figuren, z. B. ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 93), bestehen folgende Beziehungen:

1. Jedem Punkte der einen Figur entspricht ein Punkt der andern (A_1 und A).
2. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel ($AA_1 \parallel BB_1$).
3. Entsprechende Gerade schneiden sich auf der Affinitätsachse (CA und C_1A_1).

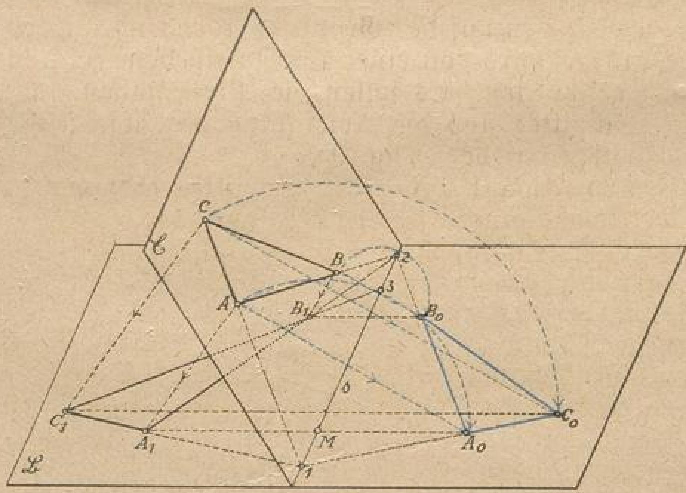


Fig. 93.

[1]) Der Name Affinität für die durch die Parallelprojektion herstellbare Verwandtschaft ebener Figuren stammt von Leonhard Euler (geb. 1707 in Basel, gest. 1783 in Petersburg).

Diese Eigenschaften bleiben auch erhalten, wenn die Ebene E um die Spur s in die Ebene B umgelegt wird, so daß △ ABC die Lage $A_0B_0C_0$ annimmt (Beweis!). △ $A_0B_0C_0$ kann auch als Parallelprojektion von ABC aufgefaßt werden (Beweis!). Damit haben wir den Satz:

Die Umlegung einer ebenen Figur und ihre erste Projektion sind affine Gebilde mit ihrer ersten Spur als Affinitätsachse.

Eine Affinität ist bestimmt durch die Achse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P'.

Aufgabe. Zu dem Dreieck ABC (Fig. 94) in seiner Ebene das affine Dreieck zu zeichnen, wenn die Affinitätsachse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P' gegeben sind.

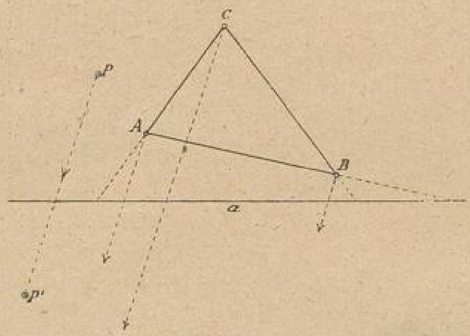


Fig. 94.

Bemerkung. Betrachten wir $A_1B_1C_1$ in Fig. 93 als Grundfigur eines Prismas, dessen Seitenkanten die Affinitätsstrahlen sind, so können wir ABC als schiefen Schnitt durch den Körper und $A_0B_0C_0$ als die Umlegung des Schnittes ansehen. Denken wir uns nun noch den Schnitt senkrecht auf die Bildebene B projiziert, so ist die Grundfigur nicht nur mit der senkrechten Projektion des Schnittes, sondern auch mit dessen Umlegung für die Spur der Schnittebene als Affinitätsachse affin.

§ 21. Darstellung ebener Körperschnitte. Abwicklung.

1) Aufgabe 1. Ein auf der Grundebene stehendes gerades vierseitiges Prisma wird von einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene $E = (e_1, e_2)$ geschnitten. Es sollen die Projektionen und die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwicklung des schief abgeschnittenen Prismas ermittelt werden (Fig. 95).

Die erste Projektion 1'2'3'4' des Schnittes fällt mit dem Grundriß des Körpers zusammen, während die zweite 1''2''3''4'' in die zweite Spur der Schnittebene fällt (Grund?). Die wahre Gestalt des Schnittes 1 2 3 4 finden wir durch Umlegung sämtlicher Eckpunkte in die Grundrißebene. Die Umlegung (1) von 1 liegt auf der von 1' zur Umlegungsachse e_1 gezogenen Senkrechten, und zwar im Abstande des zugehörigen Drehungsradius r von e_1. Dieser kann, da der von e_2 und der x-Achse gebildete Winkel α_1 gleich der ersten Tafelneigung der Schnittebene ist, unmittelbar aus dem Aufriß entnommen werden, $r = \overline{X1''}$.

Um (1) zu erhalten, beschreiben wir um X mit $\overline{X1''} = r$ als Radius den Kreis, der die Bildachse in (1'') trifft und loten diesen Punkt auf die von 1' zu e_1 gezogene Senkrechte herunter. Entsprechend können wir die Umlegungen der anderen Punkte gewinnen. Einfacher und schneller kommen wir jedoch zum Ziele durch Benutzung der zwischen den Figuren (1) (2) (3) (4) und 1′2′3′4′ bestehenden Affinität (s. Bem. § 20).

Um die Abwicklung des Mantels des schief abgeschnittenen Prismas zu erhalten, tragen wir auf einer Geraden die Seiten der Grundfigur nacheinander auf, errichten in den Endpunkten die Lote und tragen auf ihnen die Längen der zugehörigen Seitenkanten ab, die sich unmittelbar aus dem Aufriß ergeben, und verbinden die aufeinander folgenden Endpunkte.

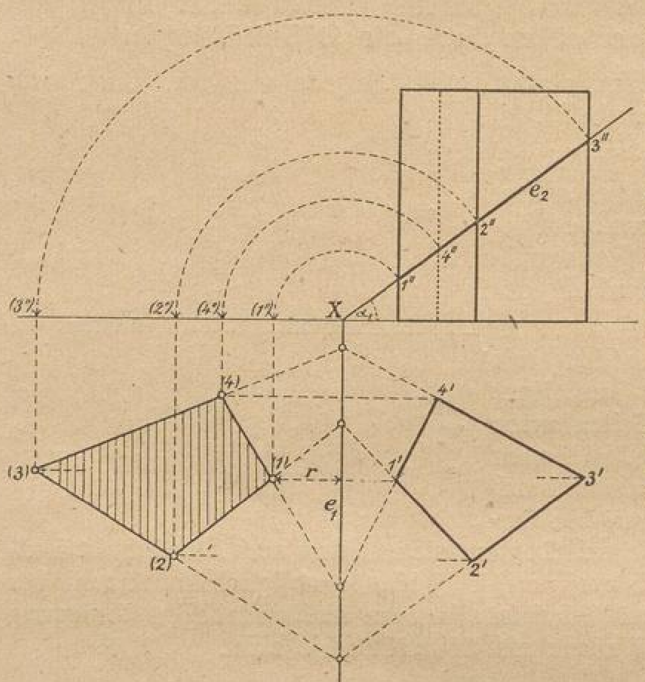


Fig. 95 a.

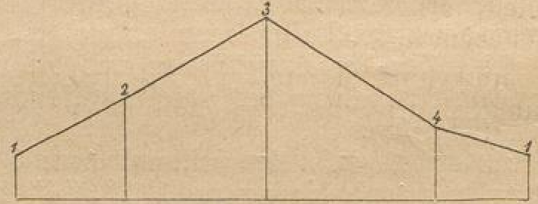


Fig. 95 b.

Aufgabe 2. Den Schnitt eines regelmäßig-sechsseitigen Prismas, das auf der Grundebene steht,

a) mit einer zur Aufrißebene senkrechten Ebene E,

b) mit einer beliebigen schiefen Ebene E zu bestimmen,

ferner die wahre Gestalt des Schnittes und die Abwicklung des Mantels samt der Schnittlinie zu zeichnen.

Bemerkung zu b). Die zweiten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur werden recht bequem mit Hilfe von ersten Spurparallelen (s. § 17, 3) bestimmt. Die Lösung kann durch Benutzung einer zu e_1 senkrechten Seitenebene sehr vereinfacht werden (vgl. Aufg. 4).

Aufgabe 3. Den Schnitt eines geraden Kreiszylinders, dessen Grundkreis in der ersten Bildebene liegt, mit einer zu B_2 senkrechten Ebene $E = (e_1, e_2)$ zu bestimmen und den Zylindermantel samt der Schnittlinie in die Ebene auszubreiten (Fig. 96).

Wir führen die Aufgabe auf die entsprechende für das Prisma (s. Aufg. 1) zurück, indem wir den Grundkreis in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, z. B. 12, teilen und die zugehörigen Mantellinien zeichnen. Die Schnittfigur ist eine Ellipse (§ 8 Anm. 2), deren erste Projektion in den Grundkreis und deren zweite in die Spur e_2 fällt. Die Gestalt der Ellipse in wahrer Größe ergibt sich wie beim Prisma durch Umlegung (Affinität!).

Denken wir uns den Zylinder längs einer Mantellinie (z. B. der durch 1 gehenden) aufgeschnitten und in die Zeichenebene ausgebreitet, so ergibt sich ein Rechteck, dessen Grundseite gleich dem Umfang des Grundkreises[1]) und dessen Höhe gleich der Zylinderhöhe ist. Um die Schnittkurve in der Abwicklung zu erhalten, teilen wir die Grundseite wieder in 12 gleiche Teile, tragen auf den zu den Teilpunkten gehörigen Mantellinien die zugehörigen Höhen der Ellipsenpunkte ab und verbinden die Endpunkte durch einen freien Kurvenzug.

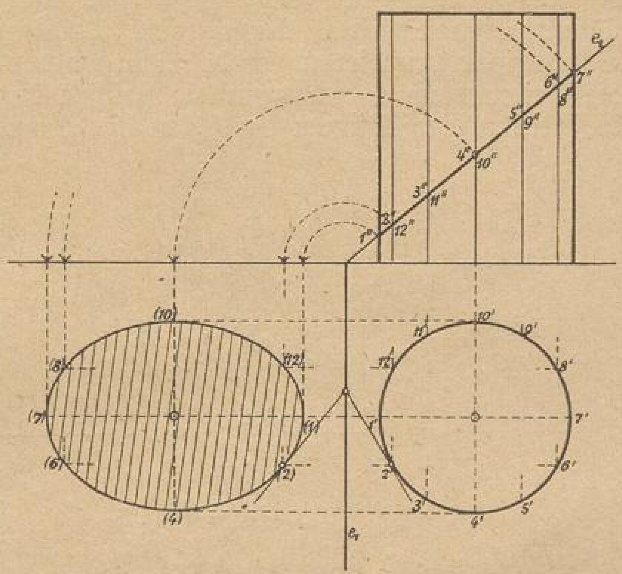


Fig. 96.

2) Aufgabe 4. Den Schnitt einer auf B_1 stehenden regelmäßig-sechsseitigen Pyramide mit einer Ebene $E = (e_1, e_2)$ und seine wahre Gestalt zu bestimmen, ferner den Mantel der Pyramide samt Schnittlinie in die Zeichenebene auszubreiten.

I. Lösung. Man bestimmt zunächst nach § 18 Aufg. 1 die zweiten Projektionen der Schnittpunkte, der Seitenkanten mit E und findet durch Herunterloten die zugehörigen ersten Projektionen. Dadurch erhalten wir die Projektionen der Schnittfigur. Ihre wahre Gestalt finden wir durch Umlegung, wobei mit Vorteil die affine Verwandtschaft zwischen Grundriß und Umlegung verwertet werden kann. Wie ergibt sich die Abwicklung des Mantels der Pyramide?

Die Umlegung ebener Figuren geht (ohne Benutzung affiner Beziehungen!) am einfachsten vonstatten, wenn ihre Ebene wie bei Aufg. 1 auf einer Bildebene senkrecht steht. Auf diesen einfachen Fall läßt sich der allgemeine mit beliebiger Ebene leicht zurückführen. Zugleich gestaltet sich dadurch die Bestimmung der Schnittfigur erheblich bequemer.

II. Lösung (Fig. 97). Wir nehmen eine zur ersten Spur e_1 senkrechte dritte Bildebene (Seitenebene) S zu Hilfe. Ihre erste

[1]) S. Rektifikation des Kreises § 15.

Spur s_1 ist dann zu e_1, ihre zweite s_2 zur Bildachse senkrecht. Projizieren wir die Pyramide auf die Seitenebene S, so müssen die Projektionen der Schnittfigur, da auch $S \perp E$ ist, auf ihrer Schnittgeraden mit E liegen. Die Drehungsradien der Ecken der Schnittfigur projizieren sich dabei in wahrer Größe. Legen wir nun die Seitenebene S um s_1 in die Zeichenebene um, so bewegen sich die dritten Projektionen der Ecken der Schnittfigur in Kreisbahnen,

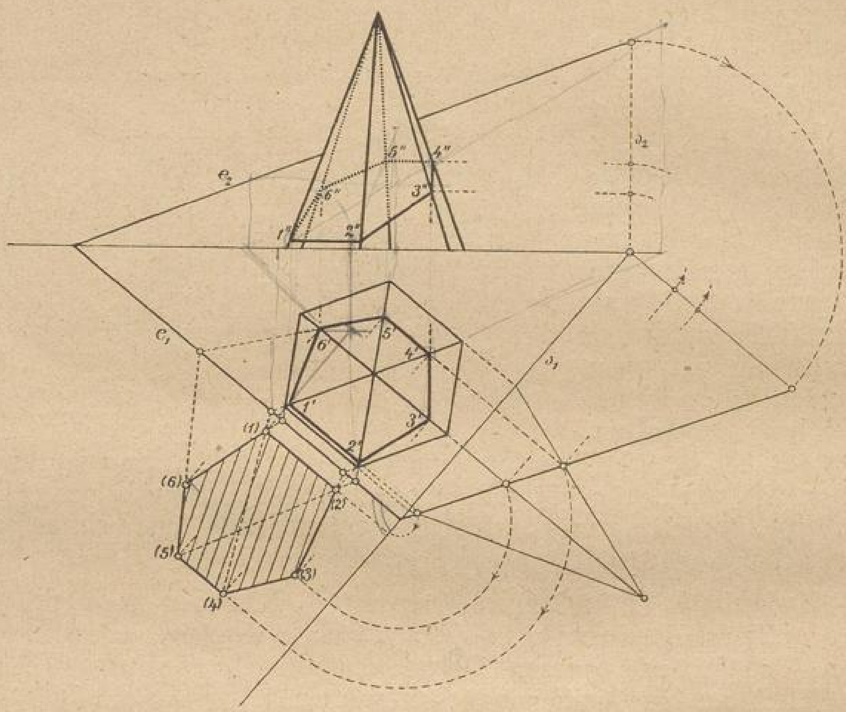


Fig. 97.

die zu s_1 senkrecht sind, liegen also nach der Umklappung mit ihren entsprechenden ersten Projektionen auf je einer Senkrechten zu s_1. Danach gestaltet sich die Lösung der Aufgabe kurz folgendermaßen:

Aus den dritten Projektionen der Eckpunkte der Schnittfigur gewinnt man genau wie aus dem Aufriß (S als Aufrißebene betrachten!) ihre ersten Projektionen, aus diesen durch Hinaufloten ihre zweiten Projektionen. Die Bestimmung der wahren Größe der Schnittfigur erfolgt entsprechend wie bei Aufg. 1.

3a) **Aufgabe 5.** Den Schnitt eines geraden Kreiskegels, dessen Grundkreis in B_1 liegt, mit einer zu B_2 senkrechten Ebene E zu bestimmen. Ferner soll die Schnittfigur in wahrer Größe und die Abwicklung des Mantels nebst Schnittkurve gezeichnet werden.

1. Geht E durch die Spitze S des Kegels, so ist der Schnitt ein Dreieck.

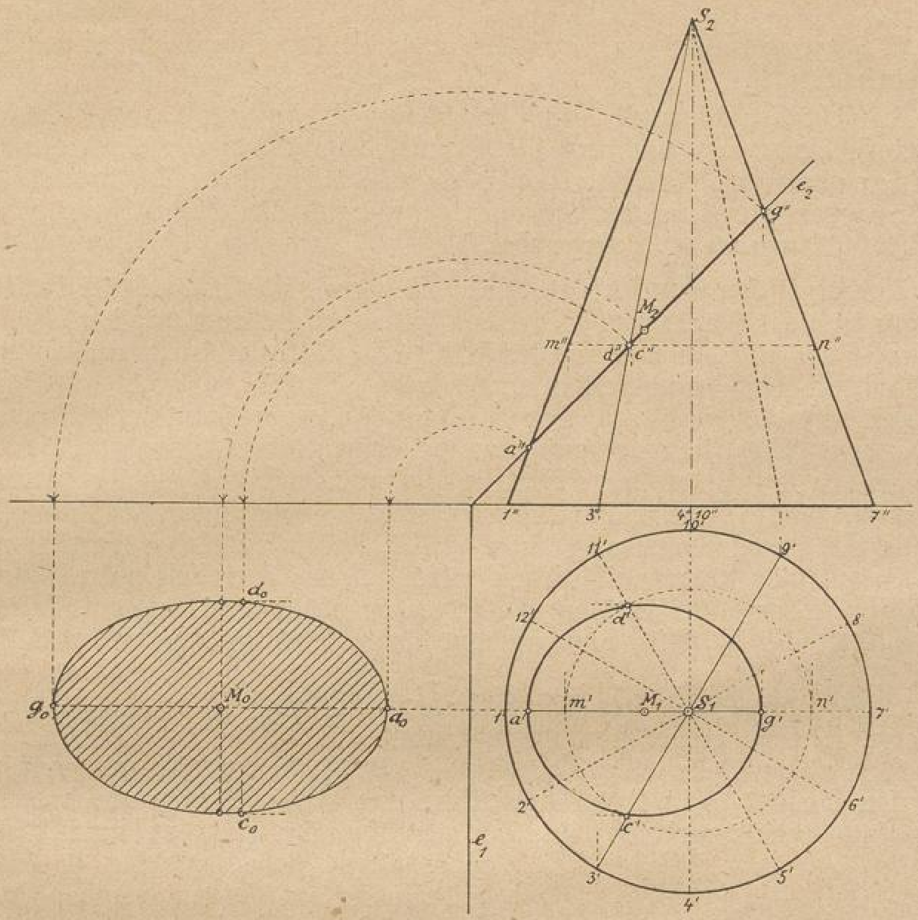


Fig. 98a.

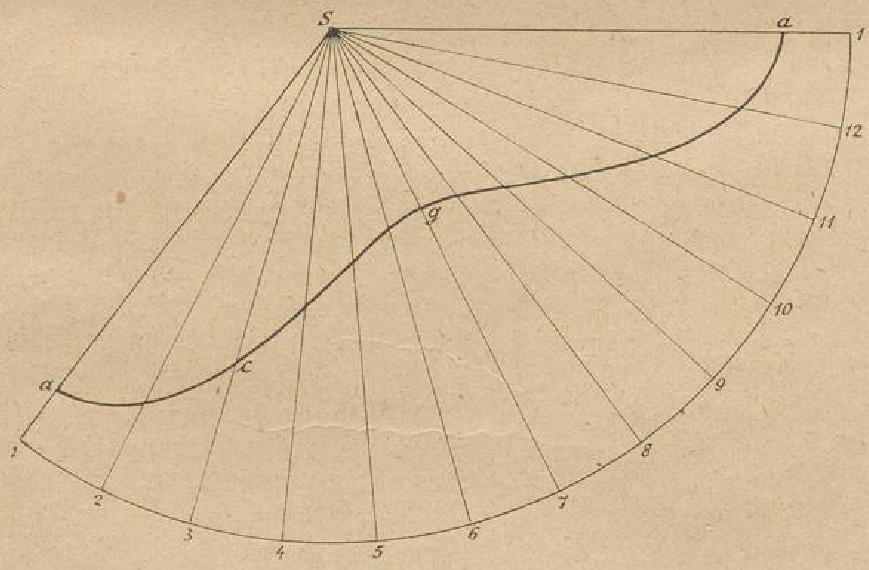


Fig. 98b.

2. Ist E parallel zur Grundebene, so ist der Schnitt ein **Kreis**[1]) (Darstellung!).

3. Geht E nicht durch S und ist schief zu B_1, so sind drei Fälle zu unterscheiden. Je nachdem die Schnittebene E keiner Seitenlinie, einer oder zwei Seitenlinien parallel ist (also alle schneidet, eine oder zwei nicht schneidet), ergibt sich als Schnittkurve eine **Ellipse, Parabel** oder **Hyperbel.**[1])

I. **Elliptischer Schnitt** (Fig. 98a). Die zweite Projektion der Schnittfigur ist die auf e_2 liegende Strecke $a''g''$. Zur Bestimmung der ersten Projektion und der wahren Größe der Schnittkurve durch Umlegung teilen wir den Grundkreis in eine beliebige Anzahl, z. B. 12, gleicher Teile und ziehen die zu den Teilpunkten gehörigen Mantellinien. Die erste Projektion des auf einer beliebigen Mantellinie, z. B. S3, liegenden Punktes c der Schnittkurve können wir in doppelter Weise finden. Entweder zeichnen wir die beiden Projektionen der Mantellinie S3, deren zweite $a''g''$ in c'' trifft, und loten diesen Punkt auf $S_1 3$ herunter, oder wir ziehen durch c'' die Parallele $m''n''$ zur Achse, die den Aufriß des durch c gehenden zur Grundebene parallelen Schnittkreises darstellt, und zeichnen diesen im Grundriß, wo er $S_1 3'$ in c' trifft.

Die wahre Größe der Ellipse finden wir durch Umlegung wie in Aufg. 1. Wie erhält man ihren Mittelpunkt M?

Der abgewickelte Kegelmantel (Fig. 98b) ist ein Kreisausschnitt, dessen Radius gleich der Mantellinie und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist. Um die Schnittkurve in der Abwicklung zu erhalten, ziehen wir die zu den Endpunkten der übertragenen Bogenstücke gehörigen Radien und ermitteln auf ihnen den Punkt der Schnittkurve, z. B. $Sc = S_2m''$.

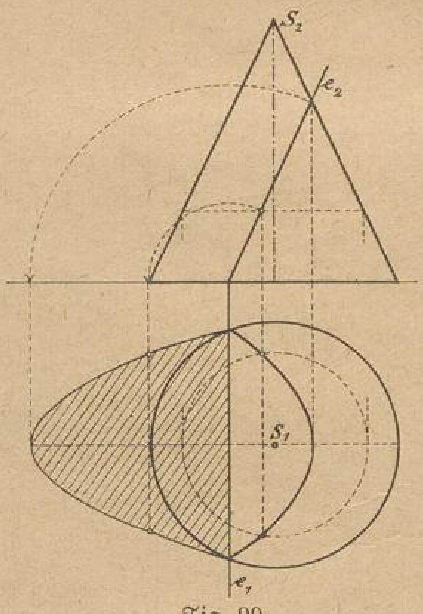


Fig. 99.

II. **Parabolischer Schnitt** (Fig. 99). Lösung wie im Fall I.

III. **Hyperbolischer Schnitt** (Fig. 100). Der Einfachheit halber nehmen wir hier die Schnittebene E parallel B_2 an. E schneidet auch die über die Spitze S erweiterte Kegelfläche, so daß wir eine aus zwei Ästen bestehende Schnittkurve erhalten. Lösung s. Fig.

b) Aufgabe 6. Den Schnitt einer zu B_2 senkrechten Ebene mit einer Kugel zu zeichnen und in wahrer Größe darzustellen.

[1]) Vgl. L. I. § 2; II. § 51—53.

Aufgabe 7. Die Erdkugel samt Gradnetz abzubilden, wenn ihre Achse zu B_1 senkrecht steht.

Die erste Projektion, das Bild der oberen Halbkugel, heißt die orthographische Polarprojektion, die zweite, das Bild der vorderen Halbkugel, die orthographische Äquatorialprojektion der Erdkugel. Wie bilden sich bei den beiden Projektionen die Breiten- und Längenkreise ab? Welche Teile erleiden die stärkste Verzerrung?

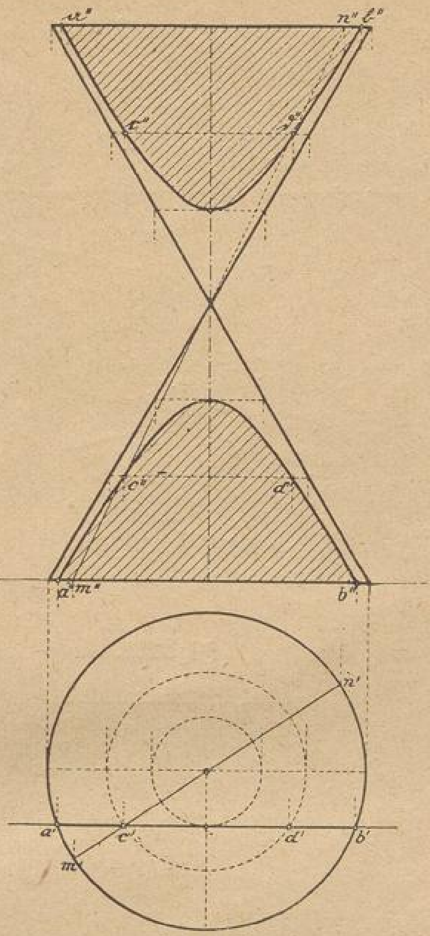


Fig. 100.

§ 22.
Zurückdrehung ebener Gebilde (Umkehrung der Aufgabe der Umlegung).

1) Unter „Zurückdrehen" (Zurückschlagen) eines ebenen Gebildes oder Punktes versteht man die Umkehrung der Aufgabe der Umlegung.

Grundaufgabe. Von einem in der Ebene $E = (e_1, e_2)$ gelegenen Punkte P ist seine Umlegung P_0 und die erste Spur gegeben. Es sind seine Projektionen zu bestimmen.

Die Lösung (s. Fig. 90) nimmt den umgekehrten Verlauf wie die der Grundaufgabe § 20.

Aufgabe 1. Von einem in der Ebene E gelegenen Quadrat, deren erste Spur e_1 und erste Tafelneigung α_1 gegeben sind, (Vieleck) ist die Umlegung in die Grundebene gegeben. Die Projektionen der Figur zu zeichnen.

Aufgabe 2. In einer zu B_2 senkrechten und zu B_1 schiefen Ebene $E = (e_1, e_2)$ liegt ein Kreis, von dem die Umlegung seines Mittelpunktes M und der Radius r gegeben sind. Seine Projektionen zu zeichnen.

Die erste Projektion ist eine Ellipse. Wie liegen ihre große und kleine Achse?

2) Aufgabe 3. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide liegt mit einer Seitenfläche 1 2 S, die gegeben ist, in der Grundebene. Die Projektionen des Körpers zu zeichnen (Fig. 101).

Das gegebene Seitendreieck 1 2 S fällt mit seinem Grundriß $1'2'S_1$ zusammen. Um die erste Projektion der Grundfläche zu ermitteln, zeichnen wir diese in wahrer Größe an die Grundseite $1'2'$, be-

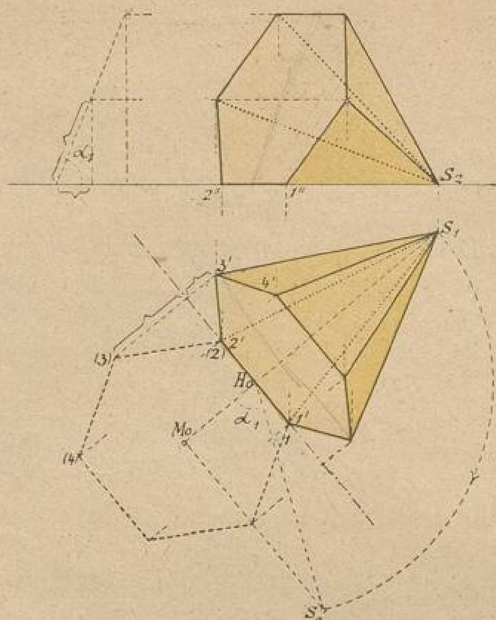


Fig. 101.

stimmen den Neigungswinkel α_1 der Seitenfläche mit der Grundfläche und drehen diese um $1'2'$ als Achse für den Winkel α_1 als ihre erste Tafelneigung zurück. Wie ergeben sich die Aufrisse der nicht in der Grundebene gelegenen Punkte des Körpers?

Aufgabe 4. Ein auf der Grundebene ruhendes *regelmäßiges Dodekaeder* darzustellen (Fig. 102).

An die Seiten des in der Grundebene liegenden Fünfecks $1'\,2'\,3'\,4'\,5'$ zeichnen wir die angrenzenden Seitenflächen, z. B. I, II, des Körpers in wahrer Größe und suchen ihre ersten Projektionen dadurch zu bestimmen, daß wir die Fünfecke hochklappen, bis je zwei zu einem Eckpunkt des Fünfecks gehörende Kanten, z. B. $2'b_0$ und $2'b_0$, in b zusammenfallen. Dabei bewegen sich die drei freien Eckpunkte der hochgeklappten Fünfecke (a_0, f_0, b_0 von I; b_0, g_0, c_0 von II) in Kreisbögen, deren Ebenen senkrecht zu den zugehörigen festliegenden Seiten und deren Projektionen daher senkrechte Strecken zu diesen sind. Bezeichnen wir mit a', f' und b' die ersten Projektionen der Punkte a, f und b, so sind demnach a_0a', f_0f', b_0b' senkrecht zur Seite $1'\,2'$ oder ihrer Verlängerung, ebenso b_0b', g_0g', c_0c' senkrecht zur Seite $2'\,3'$ oder ihrer Verlängerung. Die erste Projektion b' des Punktes b ist also der Schnittpunkt der von b_0 auf $1'\,2'$ und von b_0 auf $2'\,3'$ gefällten Lote. Die entsprechenden Punkte a, c', d', e', liegen auf dem um den Mittelpunkt m' des Fünfecks $1'\,2'\,3'\,4'\,5'$ mit dem

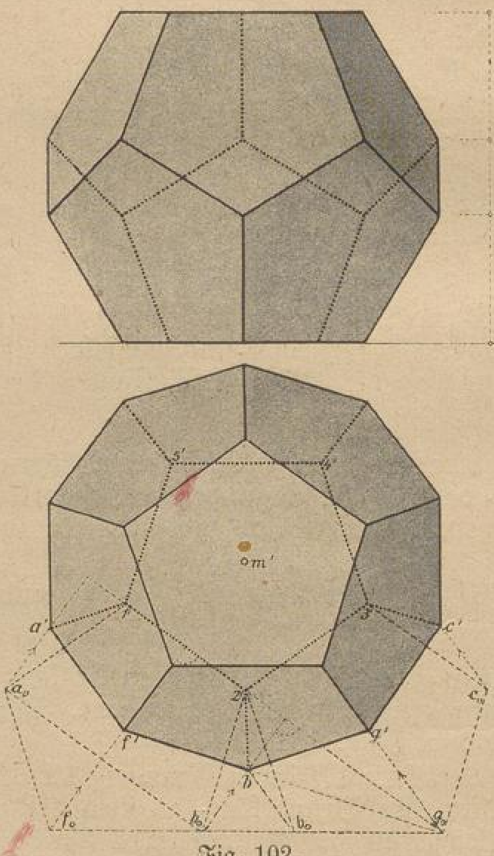


Fig. 102.

Radius m'b' beschriebenen Kreise, ferner auf den durch die Eckpunkte des Fünfecks gehenden Radien.

Zur Ermittlung der ersten Projektionen f', g', h', i', k' der äußersten Ecken f_0, g_0, h_0, i_0, k_0 genügt es ebenfalls, einen Bildpunkt, z. B. f', zu bestimmen (Grund?). Wir finden ihn leicht auf Grund der zwischen Umlegung und Projektion bestehenden Affinität. Die Seiten f_0b_0 und b_0g_0 bilden eine Gerade (Beweis!), von der beim Hochklappen des Fünfecks I der Punkt g_0 liegen bleibt. Weil b' schon gefunden ist, haben wir nur die Verlängerung von g_0b' mit dem von f_0 auf 1' 2' gefällten Lote zum Schnitt zu bringen.

Damit ist die erste Projektion der unteren Hälfte der Oberfläche des Dodekaeders gefunden. Die Projektion der oberen Hälfte der Oberfläche kann nun leicht hinzugefügt werden. Welche Ecken bestimmen die Seiten zweier regelmäßiger Zehnecke?

Für den Aufriß des Körpers hat man nur die ersten Tafelabstände der Ecken zu bestimmen, s. Fig. Genauigkeitsproben!

Setze das in Fig. 102 dargestellte regelmäßige Dodekaeder in schiefe Parallelprojektion für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30°$.

§ 23. Durchdringung zweier Körper, insbesondere ebenflächiger Körper.

1 a) Wenn zwei Körper einander durchschneiden („durchdringen"), so sind zwei Fälle möglich:

I. Der eine durchbohrt den andern (Fig. 109). Man spricht dann von einer Durchbohrung oder vollständigen Durchdringung. Die Schnittfigur der beiderseitigen Oberflächen der Körper, die Durchdringungsfigur, besteht aus zwei getrennten geschlossenen Figuren, bei zwei ebenflächigen Körpern oder Vielflachen aus zwei Raumvielecken.

II. Der eine Körper dringt in den andern ein oder er schneidet aus ihm ein seitliches Stück heraus (Fig. 106). In diesem Falle hat man es mit einer Eindringung oder einer unvollständigen Durchdringung zu tun. Die Durchdringungsfigur wird nur von einer geschlossenen Figur, bei Vielflachen von einem räumlichen Vieleck gebildet.

b) Die Seiten der **Durchdringungsfigur zweier Vielflache** sind die Schnittlinien, in denen sich die begrenzenden Flächen der Körper schneiden, ihre Ecken die Schnittpunkte, in denen die unverlängerten Kanten eines jeden der beiden Körper die Flächen des andern treffen. Dementsprechend kann die Durchdringungsfigur entweder durch Ermittlung der Seiten (Flächenverfahren) oder der Ecken (Kantenverfahren) gefunden werden. Das **Kantenverfahren** ist im allgemeinen das einfachere und wird deshalb in der Regel angewandt. Es besteht darin, daß man die beiderseitigen Schnittpunkte der unverlängerten Kanten eines Vielflachs mit den Flächen des andern bestimmt und die so erhaltenen Eckpunkte der Durchdringungsfigur in richtiger Reihenfolge verbindet. Dabei ist, da jede Seite der Durchschnittfigur der Schnitt zweier Ebenen ist, die wichtige Regel zu beachten, daß je zwei Eckpunkte dann und nur dann zu verbinden sind, wenn sie in einer und derselben Fläche sowohl des ersten als auch des zweiten Körpers liegen.

Die Bestimmung der Durchdringungsfigur von zwei Vielflachen kommt also bei der Anwendung des Kantenverfahrens auf die wiederholte Anwendung der schon früher behandelten Aufgabe (§ 14, Aufg. 4) hinaus, den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene, die durch ein in ihr liegendes Vieleck gegeben ist, zu finden.

Eine Seite der Durchschnittfigur ist nur dann sichtbar, wenn die beiden Körperflächen, deren Schnitt sie ist, sichtbar sind.

Die Durchdringungsaufgaben spielen eine wichtige Rolle in den praktischen Anwendungen der darstellenden Geometrie, namentlich im Hoch- und Maschinenbau.

2) Der Anschaulichkeit halber beginnen wir mit einigen einfachen Beispielen, von denen die beiden ersten Durchdringungen darstellen, wie sie bei zusammengesetzten Dächern vorkommen.

Aufgabe 1. Die Durchdringung zweier gerader dreiseitiger Prismen, die mit je einer Seitenfläche auf der Grundebene ruhen, zu bestimmen (Fig. 103).

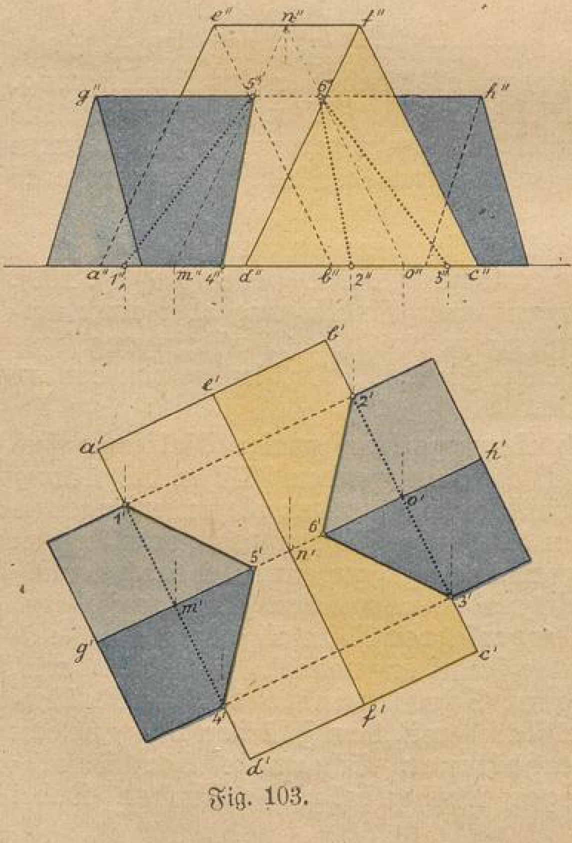


Fig. 103.

Die Punkte 1′ 2′ 3′ 4′ sind die Grundrisse der Einstoßpunkte der beiderseitigen in der Grundebene liegenden Kanten des einen Prismas in die Seitenflächen des anderen. Ihre Aufrisse liegen auf der Achse. Da die zur Grundebene nicht parallelen Kanten jedes der beiden Körper außerhalb der Projektionen der Flächen des anderen liegen, so brauchen nur noch die oberen Kanten (Firstkanten) untersucht zu werden. Wie der Aufriß zeigt, trifft die Firstkante ef des Prismas II keine Fläche des ersten. Dagegen trifft die Firstkante gh des Prismas I die Seitenflächen adfe und bcfe von II. Um die Einstoßpunkte zu finden, legen wir durch gh die Lotebene zu B_1, die den Aufriß der Seitenfläche adfe in m'' n'' und den der Seitenfläche bcfe in o'' n'' schneidet. Die Schnittpunkte 5'' und 6'' von g'' h'' mit m'' n'' und o'' n'' sind die gesuchten Einstoßpunkte im Aufriß. Ihre Grundrisse erhalten wir durch Herunterloten. Welches sind die beiden Vielecke der Durchdringungsfigur?

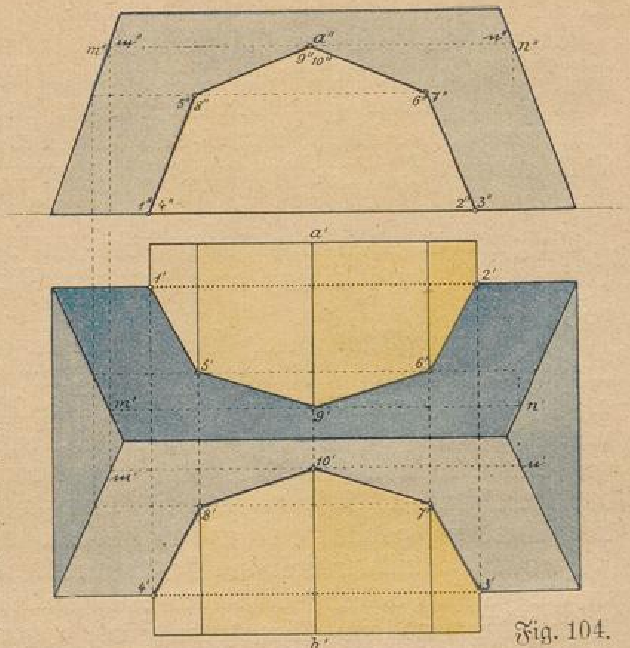


Fig. 104.

Aufgabe 2. Die Durchdringung eines *dreiseitigen schiefabgeschnittenen Prismas* (I), dessen obere Flächen die Form eines Walmdaches besitzen, mit einem *halben regelmäßig-achtseitigen Prisma* (II) zu finden. Fig. 104.

Die beiden Prismen ruhen je mit einer Seitenfläche auf der Grundebene. Die Seitenkanten des ersten sind parallel, die des zweiten senkrecht zur Aufrißebene. Die Aufrisse der Seitenkanten des zweiten Prismas schrumpfen daher im Aufriß in Punkte zusammen, z. B. ist a'' der Aufriß der Firstkante a' b'. Um ihre Einstoßpunkte in die Seitenflächen von I zu finden, legen wir durch ab am einfachsten eine B_1 parallele Hilfsebene (zweite Lotebene), die die vordere und hintere Seitenfläche von I im Aufriß in den zur Achse parallelen Strecken m'' n'' und m'' n'', die zusammenfallen, schneidet. Wie findet man daraus die Schnittlinien im Grundriß und daraus die Grundrisse der Einstoßpunkte 9 und 10?

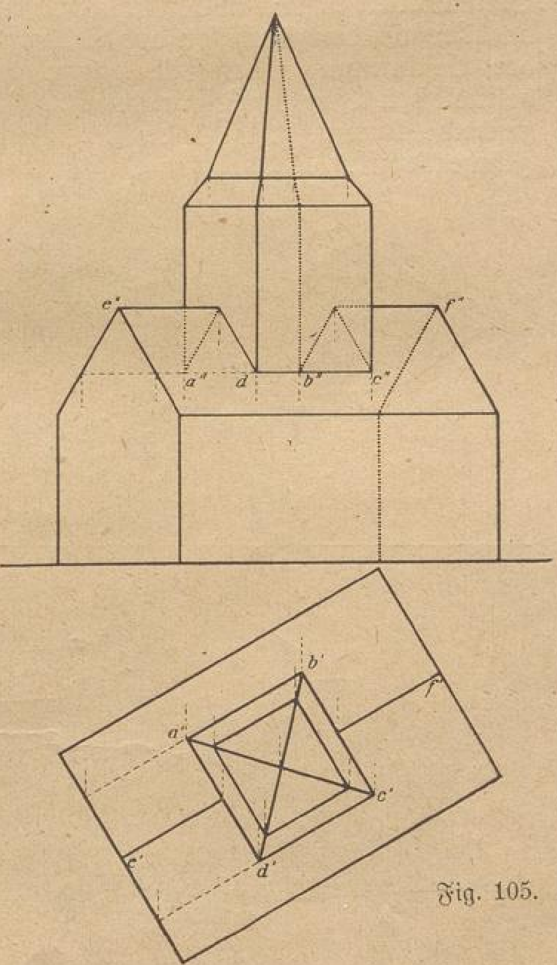


Fig. 105.

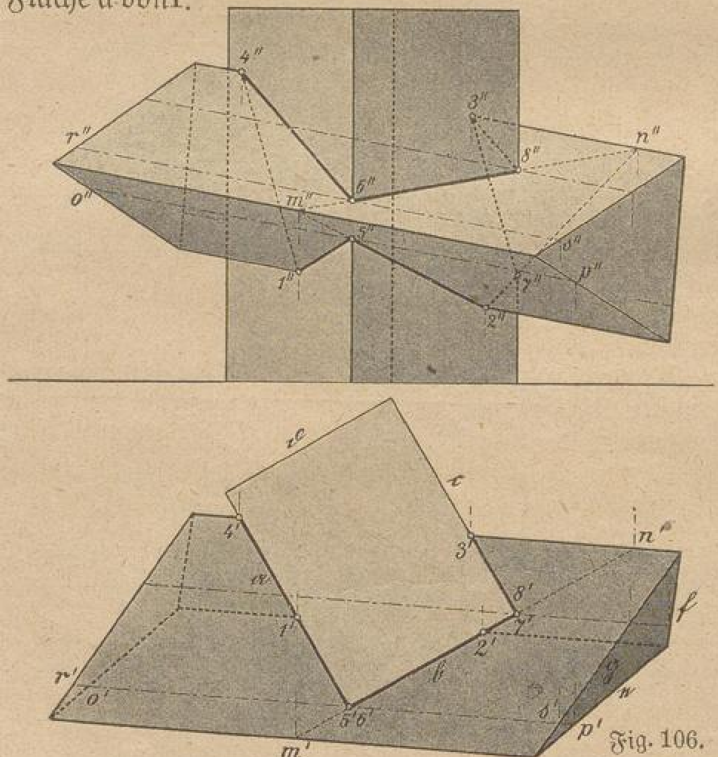
Aufgabe 3. Den Durchschnitt einer *prismatischen Dachfläche* mit einem *quadratischen Turme* zu finden (Fig. 105).

Wir benutzen als Hilfsebenen die ersten Lotebenen durch die Grundkanten ab und cd des Turmes und durch die Firstkante ef des Daches. Das Weitere s. Fig. Aus was für Körpern ist der Turmhelm entstanden?

Aufgabe 4. Den Durchschnitt eines auf der Grundebene stehenden *Quaders* (I) mit einem *dreiseitigen Prisma* (II) zu bestimmen (Fig. 106).

Um mit möglichst wenig Bezeichnungen auszukommen, hauptsächlich aber um nach Bestimmung der Ecken der Durchdringungsfigur rasch und sicher feststellen zu können, welche Ecken miteinander zu verbinden sind, bezeichnen wir jede Seitenfläche der beiden Körper mit einem kleinen deutschen Buchstaben, den wir an die Grundkante der betreffenden Fläche setzen. Die von zwei Flächen, z. B. a und b des Quaders, gebildete Kante bezeichnen wir dann mit (ab).

Zunächst ermitteln wir die Einstoßpunkte der Kanten des Prismas in die Flächen des Quaders und erhalten die Punkte 1, 2, 3, 4. Ihre Grundrisse sind die Schnittpunkte der Grundkanten von I mit den Seitenkanten von II in der Grundebene; ihre Aufrisse liegen senkrecht darüber auf den Aufrissen der Seitenkanten von II. Gleichzeitig mit der Bestimmung jeder Ecke tragen wir in einem neben der Figur befindlichen Verzeichnis ein, durch welche Kante und Fläche jede Ecke zustande kommt, z. B. 1 durch Schnitt der Kante (ef) von II mit Fläche a von I.



	I	II
1	a	ef
2	b	ef
3	c	fg
4	a	fg
5	ab	e
6	ab	g
7	bc	f
8	bc	g

Fig. 106.

Die Schnittpunkte der Kanten von I, von denen nur die Kanten (ab) und (bc) in Betracht kommen, mit den Flächen von II können auf verschiedene Weise gewonnen werden. Entweder legen wir durch die Grundkante der Fläche b die Lotebene zu B_1, die II in dem Dreieck mn2 schneidet. Die Schnittpunkte der Seiten dieses Dreiecks im Aufriß mit den Aufrissen der Seitenkanten von I sind die zweiten Projektionen ihrer Einstoßpunkte in II. Oder wir legen durch (ab) und (bc) als Hilfsebenen erste Lotebenen, die zu den Seitenkanten von II parallel sind und daher die Seitenflächen von II in je zwei Seitenlinien schneiden. Die durch die Kante (ab) von I gelegte erste Lotebene schneidet z. B. die Seitenflächen von I in den Seitenlinien op und rs, deren Schnittpunkte mit der Kante (ab) ihre Einstoßpunkte 5 und 6 in das Prisma ergeben.

Die Reihenfolge, in der die konstruierten Ecken der Durchdringungsfigur zu verbinden sind, ist bei der einfachen Lage der gegebenen Körper leicht zu übersehen. Sichere Auskunft gibt in allen Fällen die in dem Verzeichnis gegebene Übersicht über die Entstehung der einzelnen Ecken. Aus ihr geht hervor, daß nach der unter 1b) angegebenen Regel die Reihenfolge der zu verbindenden Punkte, wenn man von 1 ausgeht, 1 4 6 8 3 7 2 5 lautet. Da bei dem in der Regel angegebenen Verfahren kein Punkt übriggeblieben ist, folgt ohne weiteres, daß nur eine Schnittfigur vorhanden ist.

3) Bei Durchdringungen von **Prismen und Pyramiden,** die mit einer Grundfläche in der ersten Bildebene liegen, kann die Ermittlung der Schnittfigur dadurch bedeutend vereinfacht werden, daß man statt der Lotebenen eine Reihe von Hilfsebenen benutzt, deren Schnittlinien mit den Flächen der Körper möglichst einfache sind. Das sind

1. bei zwei Pyramiden Ebenen, die durch beide Spitzen gehen;
2. bei Pyramide und Prisma Ebenen, die durch die Spitze der Pyramide parallel zu Seitenkanten des Prismas gelegt sind;
3. bei zwei Prismen Ebenen, die parallel den beiden Seitenkanten sind.

Diese Hilfsebenen, die durch die Seitenkanten jedes Körpers gelegt werden, schneiden die Flächen des anderen in Erzeugenden[1]) (Seitenlinien), deren Schnittpunkte mit den zugehörigen Kanten Punkte der Durchdringungsfigur sind.

Zum leichteren Verständnis dieser praktisch sehr wichtigen Durchdringungsaufgaben lösen wir erst die folgenden beiden vorbereitenden Aufgaben.

Aufgabe 5. Den Schnitt einer Geraden g mit einer auf der Grundebene stehenden Pyramide zu bestimmen (Fig. 107a und b).

Der Anschaulichkeit halber gehen wir von dem Schrägbilde Fig. 107a aus. Die durch die Spitze S und die Gerade g gelegte Hilfsebene H

[1]) Das sind Linien, durch die wir uns die Mantelfläche erzeugt denken können!

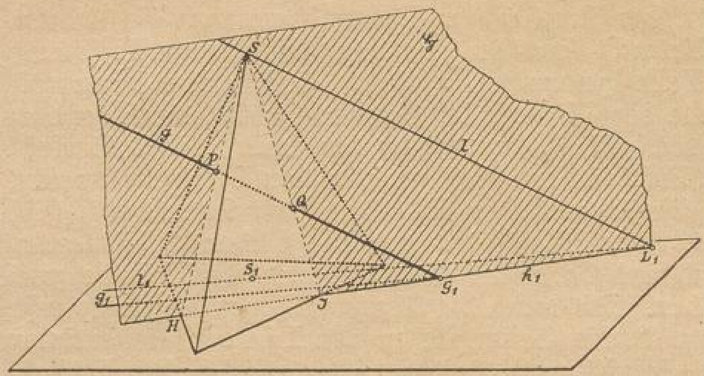


Fig. 107 a.

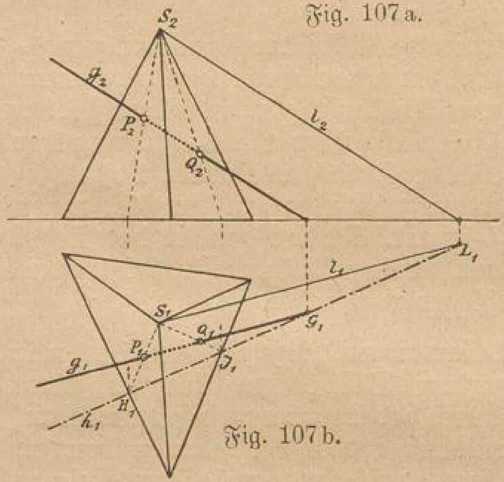


Fig. 107 b.

schneidet die Pyramide in den Seitenlinien SH und SI, deren Schnittpunkte mit g, P und Q die gesuchten Einstoßpunkte von g in den Körper sind. Die Punkte H und I sind die Schnittpunkte der ersten Spur h_1 von $\mathfrak{H}$ mit den Grundkanten der Pyramide, so daß unsere Aufgabe nur darauf hinausläuft, die erste Spur h_1 von $\mathfrak{H}$ zu finden. Zunächst muß h_1 durch den ersten Spurpunkt G_1 von g hindurchgehen. Ziehen wir durch S zu g die Parallele l, so liegt l in $\mathfrak{H}$ und daher auch der erste Spurpunkt L_1 von l auf h_1. Die durch L_1G_1 gezogene Gerade ist die gesuchte erste Spur von $\mathfrak{H}$.

Löse danach die Aufgabe in gerader Parallelprojektion (Fig. 107 b).

Aufgabe 6. Den Schnitt einer Geraden g mit einem Prisma zu bestimmen.

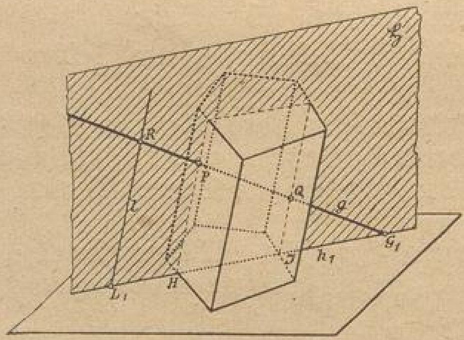


Fig. 108.

Wir legen (s. Schrägbild Fig. 108) durch g die Hilfsebene $\mathfrak{H}$ parallel den Seitenkanten des Prismas. Ihre erste Spur h_1, deren wir nur zur Zeichnung bedürfen, finden wir dadurch, daß wir durch einen beliebigen Punkt R von g die Parallele l zu den Seitenkanten des Prismas ziehen, deren erster Spurpunkt L_1 ist. Die durch L_1 und G_1 bestimmte Gerade ist h_1. Wie erhalten wir nun die Einstoßpunkte P und Q?

Lösung der Aufgabe in gerader Parallelprojektion!

Aufgabe 7. Die Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma zu finden (Fig. 109).

Die Körper stehen mit einer Grundfläche auf der ersten Bildebene. Lösung im Anschluß an die Aufg. 5 und 6.

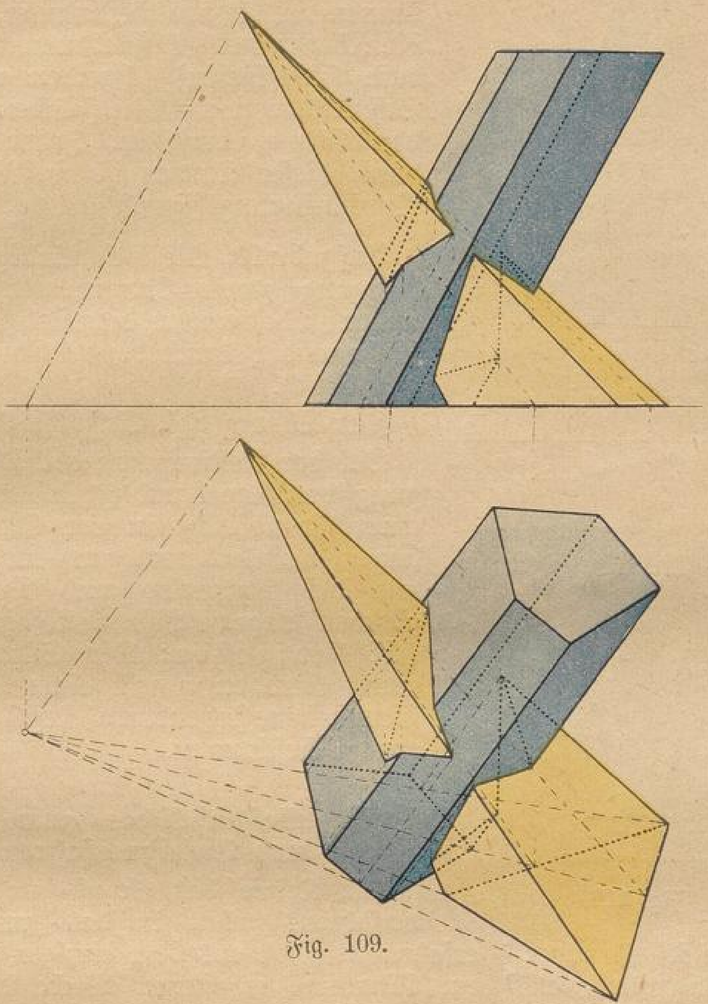


Fig. 109.

Aufgabe 8. Die Durchdringung zweier Prismen, die eine Grundfläche in der ersten Bildebene haben, zu bestimmen.

Die Hilfsebenen haben parallele Spuren! Lösung im Anschluß an Aufg. 6.

Aufgabe 9. Die Durchdringung zweier Pyramiden zu finden.

Wir lösen die Aufgabe für eine quadratische und eine regelmäßige achtseitige Pyramide, deren Achsen zusammenfallen und die sich so durchdringen, daß ihre Seitenflächen die Dachflächen eines gotischen Turmhelms bilden. Ihre Grundflächen sind parallel B_1. Lösung s. Fig. 110. Was ist in der Zeichnung noch hinzugefügt? Zu welchem Zwecke?

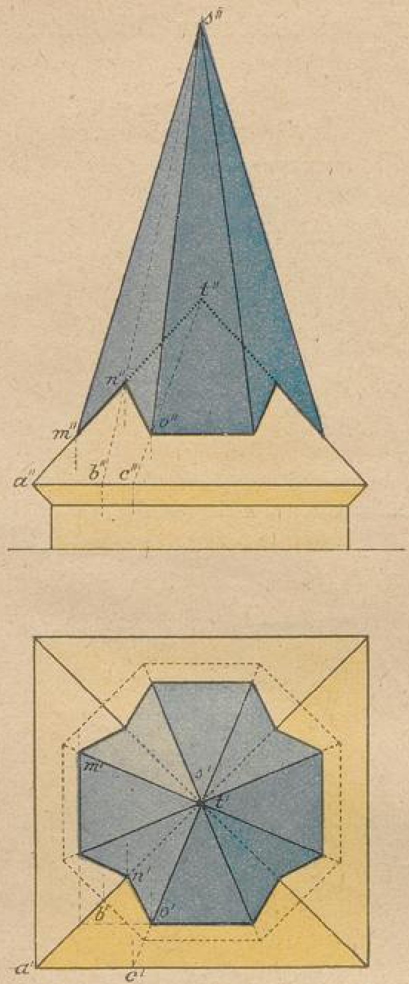


Fig. 110.

4) Die **Durchdringungsfigur zweier krummflächiger Körper** besteht aus einer oder mehreren Kurven. Einzelne Punkte können wir dadurch bestimmen, daß wir die Körper durch Hilfsebenen (oder andere Hilfsflächen) schneiden und ihre Schnittkurven mit den Flächen der beiden Körper ermitteln. Jeder Schnittpunkt dieser Kurven ist ein Punkt der Durchdringungsfigur.

Aufgabe 10. Die rechtwinklige Durchdringung zweier kongruenter Halbzylinder zu bestimmen, die mit der Schnittfläche auf der Grundebene ruhen (Kreuzgewölbe).

Zur Lösung vgl. Aufgabe 2.

Bei der Bestimmung der Durchdringung von Kegel und Zylinder, die mit einer Grundfläche in der Grundebene liegen, verfährt man ganz entsprechend wie bei Pyramide und Prisma in gleicher Lage. Löse erst die beiden Hilfsaufgaben: Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einem auf der Grundebene stehenden a) Kegel, b) Prisma zu bestimmen.

§ 24. Geschichtliches zum Grund- und Aufrißverfahren.

Die Keime des Grund- und Aufrißverfahrens gehen in das graue Altertum zurück. Genaueres erfahren wir erst aus dem einzigen uns über diesen Gegenstand aus dem Altertume erhaltenen Buche des römischen Baumeisters Vitruvius Pollio, „De architectura", das dem Kaiser Augustus gewidmet ist. In diesem z. T. nach griechischen Quellen bearbeiteten Werke spricht er von Grund- und Aufriß unter dem Namen „Ichnographie und Orthographie".[1])

Die einfachen Regeln dieser Kunst wurden in der Praxis von Geschlecht zu Geschlecht vererbt und gelangten in den Bauhütten des Mittelalters, besonders in Anwendung auf den Steinschnitt, zu hoher Blüte. Kein Geringerer als Albrecht Dürer hat in seinem klassischen Büchlein „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt" (Nürnberg, 1525 und 1538) die Regeln der mittelalterlichen Rißkunst zusammengestellt.

Auch später bildete noch das wichtigste Anwendungsgebiet der „Rißkunst"

[1]) Der erste Teil des Wortes stammt von ichnos (griech.) Spur, Fußtritt. Vgl. das deutsche Wort „Riß"!

der Steinschnitt[1].) Aufgaben über ihn behandelten Desargues, 1593—1662 (Coupe des pierres, 1640) und Frézier, 1682—1772 (La théorie et la practique de la coupe des pierres et des bois, Straßburg 1738/39). Dieser benutzt Grund- und Aufriß und behandelt besonders Durchdringungen und Abwicklungen.

Dennoch blieb die wissenschaftliche Begründung und Entwicklung des Verfahrens dem großen französischen Geometer G. Monge (Géométrie descriptive, Paris 1798) vorbehalten. Dadurch, daß er die Schnittgerade der beiden Bildtafeln als Achse benutzte und um sie die eine in die andere umlegte, setzte er Grund- und Aufriß in eine feste Beziehung. Punkte, Gerade und Ebenen, ferner gekrümmte Linien und Flächen stellte er durch ihre Projektionen oder Spuren dar und hat durch die Behandlung von Aufgaben die Hauptverfahren der darstellenden Geometrie begründet und vollständig entwickelt. Vgl. § 1.

Anmerkung. In dem oben erwähnten Büchlein von Dürer findet man z. B. die Kegelschnitte, Schraubenlinien, Körper wie Dodekaeder, Ikosaeder in Grund- und Aufriß nebst Abwicklung so dargestellt, wie man sie nicht anders in einem guten neueren Buch erwarten kann. Um das überaus lehrreiche Buch weiteren Kreisen zugänglich zu machen, hat der Maler Hans Thoma eine Neuherausgabe im Verlage der süddeutschen Monatshefte veranlaßt und sie mit einem Vorwort versehen unter dem Titel „Albrecht Dürers Unterweisung der Messung um einiges gekürzt und dem neueren Sprachgebrauch angepaßt“, herausgeg. von Alfred Peltzer.

Dritter Abschnitt.

Schattenbestimmung der Parallelprojektion.

§ 25. Allgemeines. Hauptsätze über Schatten von Strecken bei Parallelbeleuchtung.

1 a) Von einer Zeichnung fordern wir mit Recht, daß sie eine deutliche Vorstellung von dem abgebildeten Gegenstande bei dem Beschauer hervorrufe. Durch die bisherigen Darstellungen, die bloße Linearzeichnungen (Name!) sind, wird das nicht immer erreicht. Dagegen lassen sich Lage und Gestalt eines Körpers aus seiner Darstellung leichter erkennen und der gezeichnete Körper besser anschaulich auffassen, wenn wir ihn uns beleuchtet denken und die Schatten, die er auf die Bildebene oder auf einen anderen Körper wirft, in die Zeichnung mit aufnehmen.

[1]) Die Kunst des Steinschnitts ist uralt. 1. Kön. 6, 7 heißt es vom Tempelbau Salomos: „Und da das Haus gesetzet ward, waren die Steine zuvor ganz zugerichtet, daß man keinen Hammer, noch Beil, noch irgend ein eisern Werkzeug im Bauen hörte.“

b) Um die Schattenbestimmung möglichst einfach zu gestalten, nehmen wir die Lichtquelle als punktförmig an.

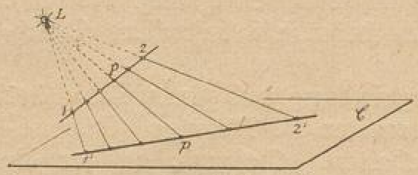


Fig. 111.

Ist Fig. 111 L eine solche Lichtquelle und P ein materieller **Punkt,** so wird durch ihn die Wirkung des Lichtstrahles LP in seiner Verlängerung aufgehoben, so daß hinter ihm ein geradliniger Schattenraum entsteht, den wir als den vom Punkte P geworfenen **Schattenstrahl** bezeichnen. Trifft dieser eine hinter P befindliche Auffangfläche, z. B. die Ebene E, im Punkte p, so ist an dieser Stelle kein Licht vorhanden. Der Punkt p heißt der **Schlagschatten** des Punktes P.

Man findet also den Schlagschatten eines Punktes P auf eine Fläche E, indem man den durch P gehenden Lichtstrahl mit E zum Schnitt bringt.

Eine **Gerade** 1 2 (Fig. 111), die wir uns materiell denken müssen (dünner Stab, Draht), wirft hinter sich einen ebenenförmigen Schatten, die **Schattenebene.** Der Schlagschatten, 1′2′, den die Gerade auf die Ebene E wirft, ist daher im allgemeinen eine Gerade. In welchem Falle ist er nur ein Punkt?

Bei einem undurchsichtigen **Körper** (Fig. 112) erscheint der der Lichtquelle zugewandte Teil (1234) der Oberfläche erleuchtet. Der dem Lichte abgewandte Teil befindet sich im Schatten, er liegt, wie man sagt, im **Selbst- oder Eigenschatten.** Die Grenze zwischen dem beleuchteten Teil und dem Eigenschatten heißt die **Schattengrenze** (1234). Diese kann man sich dadurch erhalten denken, daß man einen Lichtstrahl an dem Körper entlanggleiten läßt, so daß er die Oberfläche dauernd streift. Dabei beschreibt der Lichtstrahl eine Pyramidenfläche oder, wenn es sich um einen krummflächigen Körper handelt, eine Kegelfläche. Innerhalb des von diesen Flächen begrenzten Raumes liegen sämtliche Strahlen, die den Körper beleuchten. Eine hinter dem Körper befindliche Ebene E wird von diesen Strahlen nicht getroffen. Das unbeleuchtete Stück (1′2′3′4′) der Ebene E ist der **Schlagschatten des Körpers.**

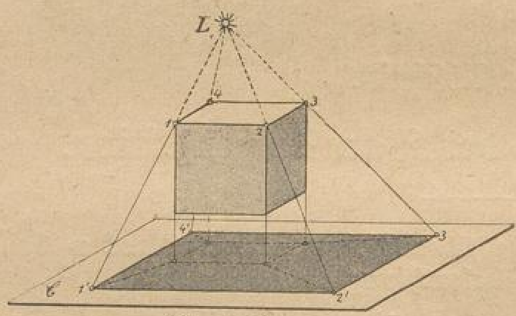


Fig. 112.

Der Umriß des Schlagschattens eines Körpers ergibt sich demnach als der Schlagschatten seiner Schattengrenze.

c) Denken wir uns die Lichtstrahlen parallel (Parallelbeleuchtung), so geht die den Körper streifende Strahlenpyramide (Strahlenkegel) in ein Strahlenprisma (Strahlenzylinder) über. Der Umriß des Schlagschattens eines Körpers auf eine Ebene E ist dann nichts anderes als die Parallelprojektion seiner Schattengrenze auf E.

2) Im folgenden werden wir uns nur mit **Parallelbeleuchtung** beschäftigen, indem wir als Lichtquelle die Sonne betrachten, deren Strahlen wir wegen ihrer gewaltigen Entfernung von der Erde als parallel ansehen können. Dabei sind die Schlagschatten einfache Parallelprojektionen,[1]) wobei die Projektionsstrahlen der Lichtrichtung parallel sind. Die Schattenbestimmung gründet sich auf die folgenden **Hauptsätze:**

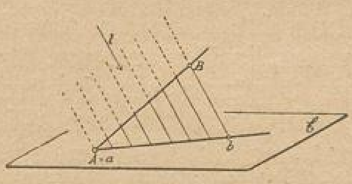


Fig. 113.

I. **Der Schlagschatten einer Geraden auf eine Ebene geht durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene** (Fig. 113).

II. **Der Schlagschatten einer Strecke auf eine zu ihr parallele Ebene ist zur Strecke parallel und hat die gleiche Länge** (Beweis!).

III. **Der Schlagschatten einer lotrechten Strecke auf eine wagerechte Ebene ist parallel der senkrechten Projektion der Lichtrichtung auf die Ebene.**

Bezeichnet l (Fig. 114) die Richtung der Lichtstrahlen, so erhalten wir den Schlagschatten A_1a der zu E lotrechten Strecke A_1A, indem wir durch A zu l die Parallele ziehen, die E in a trifft, und a mit A_1 verbinden. A_1a ist die senkrechte Projektion der Strecke Aa. Um die senkrechte Projektion P_1p der Richtungslinie l der Lichtstrahlen zu bestimmen, fällen wir von einem beliebigen Punkte P von l auf E das Lot PP_1, verlängern l bis zum Schnittpunkte p mit E und ziehen P_1p. Da $AA_1 \parallel PP_1$ und $Aa \parallel Pp$ ist, so sind die Ebenen der beiden Dreiecke AA_1a und PP_1p parallel (L. I. § 69, 2). Daher ist $A_1a \parallel P_1p$ (§ 70, 1).

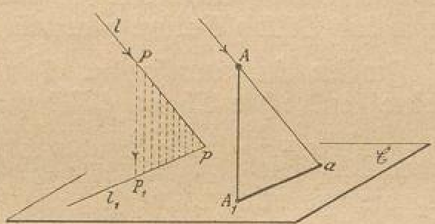


Fig. 114.

Daraus ergibt sich weiter, daß die Schlagschatten aller Lotstrecken der Auffangebene auf diese untereinander parallel sind. Das gilt auch allgemein für parallele Strecken von beliebiger Lage zur Auffangebene.

IV. **Parallele Strecken werfen auf eine Ebene parallele Schatten und bilden mit ihren Schattenlängen das gleiche Verhältnis** (Beweis!).

---

[1]) Die früher für die Parallelprojektion abgeleiteten Sätze (s. § 3) gelten in entsprechender Abänderung daher auch für unsere Schattenkonstruktionen.

I.

§ 26. Schattenbestimmung der schiefen Parallelprojektion.

1) Die Richtung der Lichtstrahlen nimmt man im allgemeinen so an, daß die Strahlen von links oben und vorn nach rechts unten und hinten verlaufen. Welche Richtung haben dagegen die projizierenden Sehstrahlen? Da zur Grundebene senkrechte Strecken parallele Schatten von gleichen Verhältnissen haben, so könnten wir, ähnlich wie bei der schiefen Parallelprojektion die Richtung der Sehstrahlen, die Richtung der Lichtstrahlen festlegen durch den Winkel, den die Schatten lotrechter Strecken mit der Achse bilden, und durch das Verhältnis der Schattenlänge einer Lotrechten zu dieser.

Wir ziehen es jedoch vor, die Lichtrichtung einfach dadurch festzulegen, daß wir im Schrägbilde (Fig. 114) einen Lichtstrahl l und seinen Grundriß l_1 zeichnen. Denn durch die Schrägprojektion der Lichtrichtungslinie ist die Richtung der Lichtstrahlen noch nicht völlig bestimmt. (Warum nicht?) Das wird sofort erreicht, sobald man das Schrägbild l_1 des Grundrisses der Lichtrichtung hinzufügt, das man innerhalb der durch die angenommene Lichtrichtung bedingten Grenzen beliebig annehmen kann.

2) Erste Grundaufgabe: Den Schlagschatten eines Punktes P auf die Grundebene G zu bestimmen (Fig. 114).

Bedeutet l das Schrägbild der Richtungslinie der Lichtstrahlen und l_1 das seiner senkrechten Projektion auf die Grundrißebene, so finden wir den Schlagschatten p von P auf G unmittelbar nach Hauptsatz III.

Zweite Grundaufgabe. Den Schlagschatten eines Punktes P auf eine senkrechte Ebene (Bildebene) zu bestimmen (Fig. 115).

Es sei P_1 die Grundrißprojektion des schattenwerfenden Punktes P und PP_1 seine Höhenlinie. Ziehen wir durch P zu l und durch P_1 zu l_1 die Parallelen, die sich im Punkte p_1 schneiden, so wäre p_1 der Schlagschatten auf G. Doch dieser Schatten kommt nicht zustande. Nur das Stück P_1k des Schattens der Höhenlinie liegt auf der Grundebene G. Im Punkte k hat die Schattenlinie einen sog. „Knickpunkt", sie läuft jetzt in der Bildebene weiter. Der auf die Bildebene entfallende Teil ist die Spur der durch die Höhenlinie PP_1 gehenden Lichtebene, ist daher senkrecht auf der Achse (Hauptsatz II). Um den Schlagschatten p_2 auf B zu erhalten, haben wir also im „Knickpunkte" k die Senkrechte zur Achse zu ziehen, die die durch P zu l gezogene Parallele in p_2 trifft.

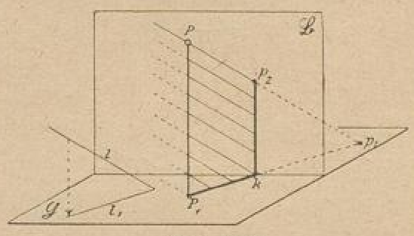


Fig. 115.

Bemerkung. Beispiele zur Bestätigung des Gesagten bietet uns die Natur in Fülle. Man beachte nur den Verlauf der Schatten von Baum=

stämmen oder senkrechten Stangen, die in der Nähe von senkrechten Mauerwänden stehen, so daß ihre Schatten zum Teil auch auf diese fallen. Versuche mit dem Bleistift!

3) Aufgabe 1. Den Schlagschatten eines Würfels auf die Grundebene zu zeichnen, sowie seinen Eigenschatten zu bestimmen (Fig. 116).

Der Würfel ruhe mit zwei Seitenflächen parallel zu B so auf der Grundebene, daß diese den ganzen Schatten aufnehmen kann. Die Lichtstrahlen sollen parallel der Diagonale 53 einfallen. Dadurch ist auch die Schattenrichtung der zu G senkrechten Strecken festgelegt. Der Schatten der Ecke 5 ist 3 und daher der Schatten der Kante 15, der in Wirklichkeit nicht zustande kommt, 1 3. Die Schatten der anderen Seitenkanten sind parallel 1 3.

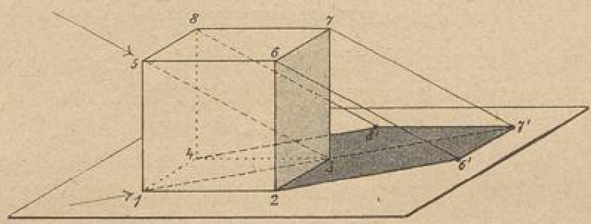


Fig. 116.

Welche Flächen des Würfels befinden sich im Eigenschatten? Schattengrenze?

Die Darstellung des Würfels gewinnt durch Hinzufügung des Schattens, wie die Figur deutlich zeigt, bedeutend an Anschaulichkeit, weil der Körper dadurch scharf aus der Grundebene hervorgehoben wird.

Die im Selbstschatten liegenden Flächen sollten eigentlich dunkel sein, da sie von der Lichtquelle selbst kein Licht empfangen. Das trifft tatsächlich nicht zu. Denn die in der Nähe liegenden beleuchteten Körper werfen einen Teil des empfangenen Lichtes zurück auf die im Selbstschatten liegenden Flächen (Reflexlicht) und bewirken dort einen gewissen Grad von Helligkeit. Wir bringen das in den Darstellungen dadurch zum Ausdruck, daß wir die betreffenden Flächen weniger dunkel als den Schlagschatten anlegen.

Aufgabe 2. Den Schlagschatten und Eigenschatten einer fünfseitigen Pyramide zu bestimmen, die so auf der Grundebene steht, daß der Schatten zum Teil auf die Bildebene fällt (Fig. 117).

Man bestimme zunächst den Schlagschatten der Spitze S auf die Bild- und Grundebene und ziehe von dem erhaltenen „ideellen" Schattenpunkt s_1 auf G die Streifgeraden an die Grundfläche s_1A und s_1C.

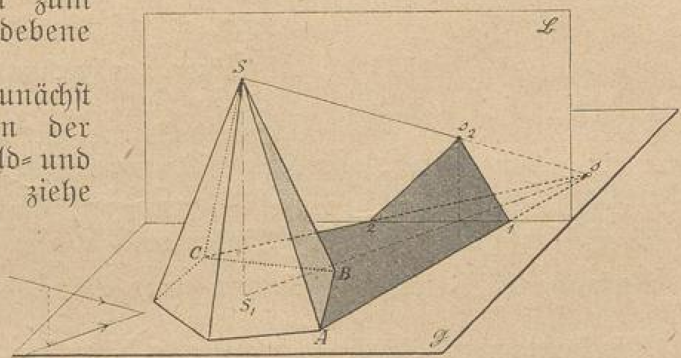


Fig. 117.

ABCs_1 stellt dann den Schlagschatten auf die Grundebene dar, der aber nur bis zur Achse auf G zur Wirkung kommt. Den auf B entfallenden Teil des Schattens erhält man, wenn man den Schatten s_2 der Spitze S auf B mit den „Knickpunkten" 1 und 2 der Schatten der Seitenkanten SA und SC verbindet. Schattengrenze?

II.

§ 27. Schattenbestimmung der geraden Parallelprojektion.

1) Bei den Darstellungen in gerader Parallelprojektion pflegt man eine ganz bestimmte Lichtstrahlenrichtung zu wählen, die erfahrungsgemäß eine sehr günstig wirkende Beleuchtung gibt. Und zwar nimmt man die Richtung der Lichtstrahlen so an, daß sie von links oben und vorn nach rechts unten parallel der Richtung der Diagonale eines Würfels verlaufen, von dem drei Kanten mit den Bildachsen zusammenfallen (s. Fig. 116). **Die Projektionen l_1 und l_2** (Fig. 118) **der Lichtstrahlenrichtung l bilden dann mit der x-Achse je einen Winkel von 45°.**

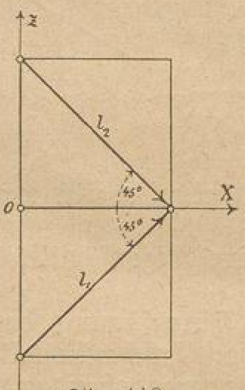


Fig. 118.

Grundaufgabe. Den Schlagschatten zu bestimmen, den ein durch seine Projektionen gegebener Punkt P auf die Bildebene wirft (Fig. 119).

Der Schlagschatten ist der erste oder zweite Spurpunkt des durch den Punkt P gehenden Lichtstrahles, dessen Projektionen mit der x-Achse je einen Winkel von 45° einschließen. Der erste Spurpunkt p_1 kommt als Schattenpunkt nicht in Betracht, da der Schattenstrahl zuerst die zweite Projektionsebene (die wir als undurchsichtig annehmen) trifft.

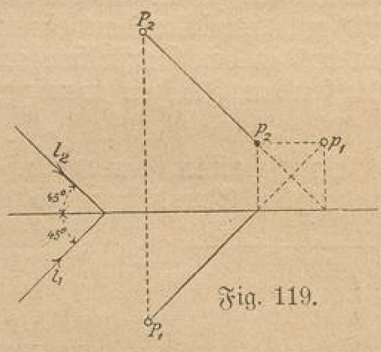


Fig. 119.

Wann fällt der Schlagschatten eines Punktes a) auf die Achse, b) auf die erste, c) auf die zweite Bildebene?

Übungsaufgaben: Bestimme den Schlagschatten eines Punktes P a) auf eine beliebige Ebene $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$, b) auf eine ebene Figur, c) auf eine Pyramide (Kegelfläche), d) auf ein Prisma (eine Zylinderfläche). Vgl. § 23, Aufg. 5 u. 6.

2) Schlagschatten gerader Linien und ebener Figuren.

Aufgabe 1. Den Schlagschatten einer Strecke AB zu bestimmen (Fig. 120).

Wir bestimmen die Schlagschatten a_1b_1 und a_2b_2 der Strecke AB auf die erste und zweite Bildebene. Die Schattenstrecken schneiden sich im Punkte k auf der x-Achse. Von ihnen kommen als wirkliche Schatten nur die in B_1 gelegene Strecke b_1k und die in B_2 gelegene ka_2 zur Geltung. Die gebrochene Linie b_1ka_2 ist der gesuchte Schlagschatten mit dem „Knickpunkte" k.

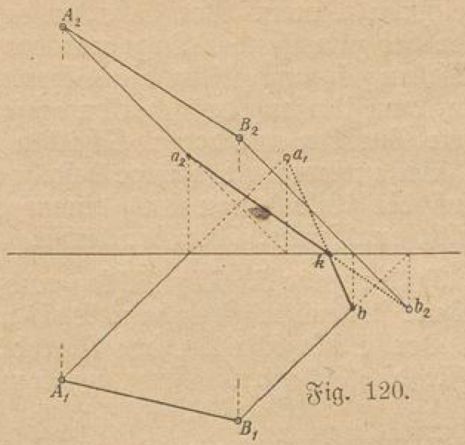


Fig. 120.

Die Schatten müssen sich auf der Achse schneiden, da sie die Spuren der Lichtebene durch AB sind. Bestimme den Punkt der Strecke AB, dessen Schattenbild der Knickpunkt ist!

Aufgabe 2. Den Schlagschatten a) eines durch seine Projektionen gegebenen Rechtecks ABCD, das parallel B_1 ist, b) eines durchbrochenen Rechtecks (vgl. Türrahmen), das B_2 parallel ist, zu zeichnen.

Lösung zu b) s. Fig. 121.

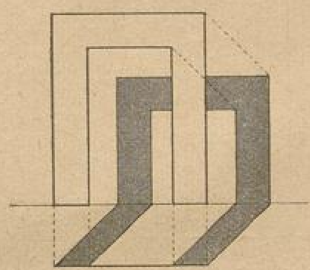


Fig. 121.

Aufgabe 3. Den Schlagschatten eines durch seine Projektionen gegebenen Dreiecks ABC zu bestimmen (Fig. 122).

Wir ermitteln die Schlagschatten der Dreiecksseiten nach Aufg. 1 und gewinnen dadurch die Begrenzungslinien des gesuchten Schlagschattens des Dreiecks ABC. $\triangle\, a_1 b_1 c_1$ ist der Schlagschatten auf B_1, $\triangle\, a_2 b_2 c_2$ der auf B_2. Von dem ersten kommt nur der vor der Achse, von dem letzten nur der über der Achse gelegene Teil als Schatten zur Geltung.

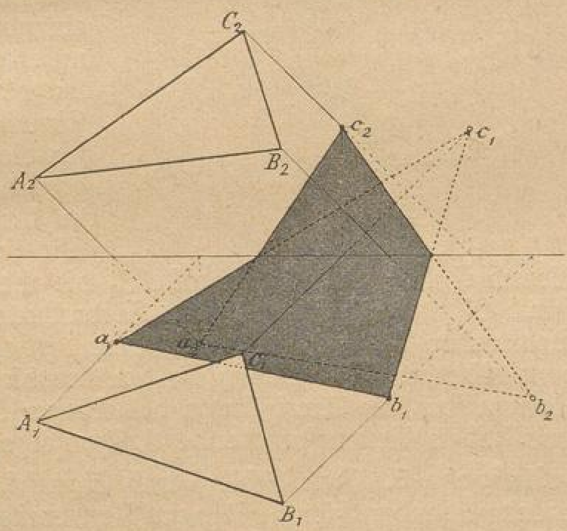


Fig. 122.

Den **Schlagschatten einer Kurve** finden wir, indem wir die Schatten einer hinreichend großen Zahl ihrer Punkte bestimmen und diese durch einen stetigen Kurvenzug verbinden.

Aufgabe 4. Den Schlagschatten einer B_1 parallelen Kreisfläche mit dem Mittelpunkte M zu zeichnen.

Der Schatten auf B_1 ist ein dem gegebenen Kreis kongruenter Kreis, den wir nach Ermittlung des Schlagschattens von M sofort zeichnen können. Der Schatten auf B_2 dagegen ist eine Ellipse, von der bei zutreffender Lage nur der über der Achse gelegene Teil zur Wirkung kommt. Um die Schattenellipse zu erhalten, nehmen wir auf dem Umfang des schattenwerfenden Kreises eine beliebige Anzahl von Punkten an, deren Schatten auf B_2 wir bestimmen.

Bei entsprechender Lage besteht also der Schlagschatten des Kreises auf die Bildebenen aus einem Kreisabschnitt unter und einem Ellipsenabschnitt über der Achse.

3) **Aufgabe 5.** Den Schlag- und Selbstschatten eines auf der Grundebene stehenden geraden Prismas zu bestimmen (Fig. 123).

Der Schlagschatten der Grundfläche fällt mit dieser zusammen. Für die Schattenbestimmung kommen daher nur die Seitenkanten und die Deckfläche in Betracht, wobei jedoch der in voller Beleuchtung liegende Eckpunkt 6 samt den von ihm ausgehenden Kanten nicht verwendet zu werden braucht. Die Grenze zwischen dem beleuchteten und dem im Eigenschatten liegenden Teile der Oberfläche, die sog. Schattengrenze, bilden die Kanten, längs derer eine zur Lichtstrahlenrichtung parallel bewegte Gerade den Körper bloß streift, ohne in ihn einzudringen (Schrägbild!). Bei unserem Prisma besteht die Schattengrenze aus dem geschlossenen Linienzuge 1 2 7 8 9 10 5 1. Wichtig für die Ermittlung der Schattengrenze ist hier die Bestimmung der zu ihr gehörenden Seitenkanten. Wir finden sie, indem wir an den Grundriß des Prismas parallel l_1 die Streifstrahlen ziehen, die hier durch 2′ und 5′ gehen. Die Seitenkanten 2 7 und 5 10 samt den Deckkanten 7 8, 8 9, 9 10 gehören deshalb zur Schattengrenze auf dem Körper. Die Schlagschatten der die Schattengrenze bildenden Kanten sind die Umrißlinien des Körperschattens auf den Bildebenen und haben die entsprechende Reihenfolge.

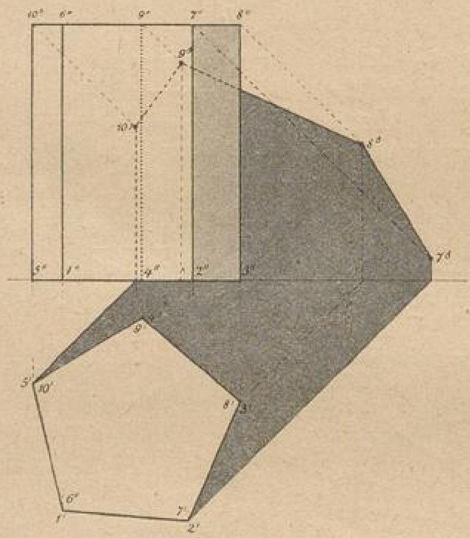


Fig. 123.

Aufgabe 6. Den Schlag- und Eigenschatten einer auf der Grundebene stehenden fünfseitigen Pyramide zu bestimmen (vgl. § 26, Aufg. 2).

Aufgabe 7. Den Schlag- und Eigenschatten eines geraden Kreiskegels, dessen Grundfläche in B_1 liegt, zu zeichnen (Fig. 124).

Wir ermitteln zunächst die Schlagschatten s_1 und s_2 der Kegelspitze S auf B_1 und B_2. Die von s_1 an den Grundkreis gezogenen Tangenten s_1A_1 und s_1B_1 bilden die seitlichen Grenzen des Schattens auf B_1, von dem nur der vor der Achse liegende Teil zur Geltung kommt.

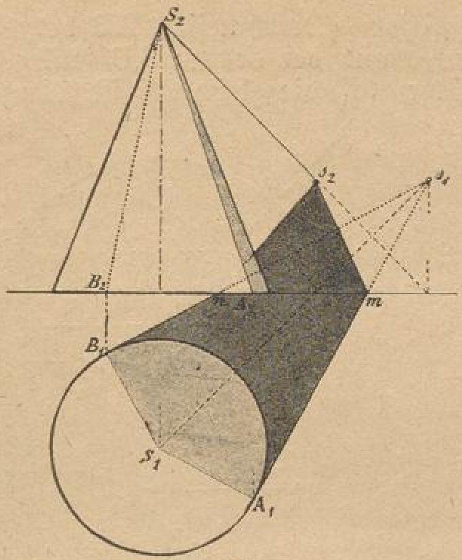


Fig. 124.

Der auf B_2 entfallende Teil des Schlagschattens besteht aus dem Dreieck s_2mn. Die Grenzlinien A_1m und B_1n sind die Grundrißspuren der von den streifenden Lichtstrahlen gebildeten Lichtebene, die den Kegel in den Mantellinien AS und BS berühren. AS und BS bilden die Schattengrenze auf dem Kegelmantel.

Aufgabe 8. Den Schlag- und Eigenschatten eines auf der Grundrißebene stehenden Kreiszylinders zu zeichnen.

Aufgabe 9. Den Schlag- und Eigenschatten einer auf der Grundebene ruhenden Kugel zu bestimmen (Fig. 125).

Um die Aufgabe einfach und anschaulich zu lösen, nehmen wir eine zu B_1 senkrechte, den Lichtstrahlen parallele dritte Bildebene zu Hilfe. Auf diese Hilfsebene projizieren wir die gegebene Kugel K und legen sie dann um ihre erste Spur e_1 in die erste Bildebene um. Der durch den Mittelpunkt K gehende Lichtstrahl l trifft B_1 in dem Spurpunkte k_1 (Konstruktion!), der zugleich als Schlagschatten von K zu betrachten ist. Der Winkel $Kk_1K_1 = \alpha$ ist dann der Neigungswinkel, unter dem die Lichtstrahlen B_1 treffen. Seine wahre Größe ergibt sich unmittelbar aus der dritten Projektion des rechtwinkligen Dreiecks Kk_1K_1.

Sämtliche die Kugel berührenden Lichtstrahlen bilden eine Zylinderfläche, die die Kugel in einem Hauptkreise berührt. Die Ebene dieses Kreises, der die Schattengrenze auf dem Körper darstellt, ist senkrecht zu den Lichtstrahlen und projiziert sich daher auf die Hilfsebene als Durchmesser A_3B_3, der zu der dritten Projektion l_3 des durch K gehenden Lichtstrahls l senkrecht ist. Aus der dritten Projektion A_3B_3 des Grenzkreises gewinnen wir genau wie sonst aus dem Aufriß die Ellipse $A_1C_1B_1D_1$ mit den Hauptachsen A_1B_1 und C_1D_1 als seine erste Projektion. Die beiden zueinander senkrechten Kreisdurchmesser AB und CD erscheinen auch im Grundriß in senkrechter Lage (Grund? §18, 2. S.). Die zweite Projektion der Schattengrenze erhalten wir durch Hinaufloten beliebig vieler Punkte des Grundrisses, wobei zu beachten ist, daß der zweite Bildabstand eines Punktes (z. B. von A) unmittelbar aus der Hilfsebene entnommen werden kann ($A_2A_x = A_3A_e$).

Die Schlagschatten des Grenzkreises sind in beiden Bildebenen Ellipsen, von denen in B_1 nur der vor und in B_2 der über der Achse gelegene Abschnitt zur Geltung kommt. Der Mittelpunkt der Grundrißellipse ist der schon zuvor bestimmte Punkt k_1. Der Schlagschatten

$(a_1 b_1)$ des Durchmessers AB des Grenzkreises bildet für sie die Hauptachse und der des zu AB senkrechten Durchmessers CD die Nebenachse $c_1 d_1$, die gleich CD ist (Grund?). Wie können die Achsen sofort

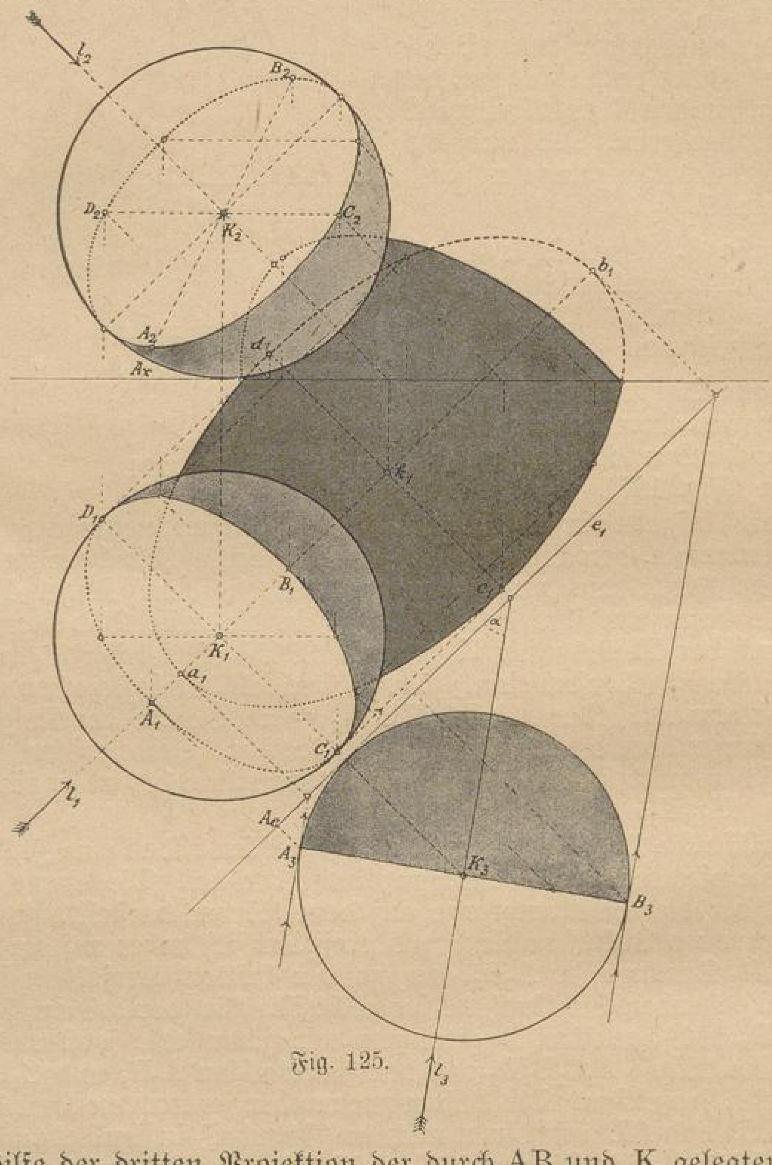


Fig. 125.

mit Hilfe der dritten Projektion der durch AB und K gelegten Lichtstrahlen bestimmt werden? Den Schlagschatten auf $\mathfrak{B}_2$ ermitteln wir endlich dadurch, daß wir die Schlagschatten einer Anzahl von Punkten des Grenzkreises auf $\mathfrak{B}_2$ bestimmen. Von der Schattenellipse auf $\mathfrak{B}_2$ ist in der Figur nur der zur Geltung kommende Abschnitt gezeichnet.