UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Grundlehren der darstellenden Geometrie mit Einschluss der Perspektive

Lötzbeyer, Philipp

Dresden, 1918

Erster Abschnitt. Die schiefe Parallelprojektion. (Abbildung auf eine Tafel.)

urn:nbn:de:hbz:466:1-83258

Visual Library

Erster Abschnitt.

Schiefe Parallelprojektion.

(Parallelprojektion auf eine Tafel.)

§ 4. Bestimmung der Richtung der Projektionsstrahlen. Die erste Grundaufgabe.

1a) Für alle Darstellungen in schiefer Parallelprojektion benutzen wir als **Bildebene** B (Fig. 9) die lotrecht gehaltene Zeichenebene (Wandtafel!). Wir setzen ein für allemal fest, daß die Projektionsstrahlen von vorn und oben kommen und zwar im allgemeinen von rechts oben nach links unten verlaufen.

Die lotrecht stehende Bildebene B schneiden wir durch eine horizontale Ebene G, die im allgemeinen zur Aufnahme der darzustellenden Gebilde dient und daher **Grundebene** heißt. Ihre Schnittgerade OX mit der Bildebene heißt **Projektions-** oder **Bildachse.**

b) Von besonderer Bedeutung für unser Abbildungsverfahren sind die zur Bildebene senkrechten Geraden, die wir im folgenden zur

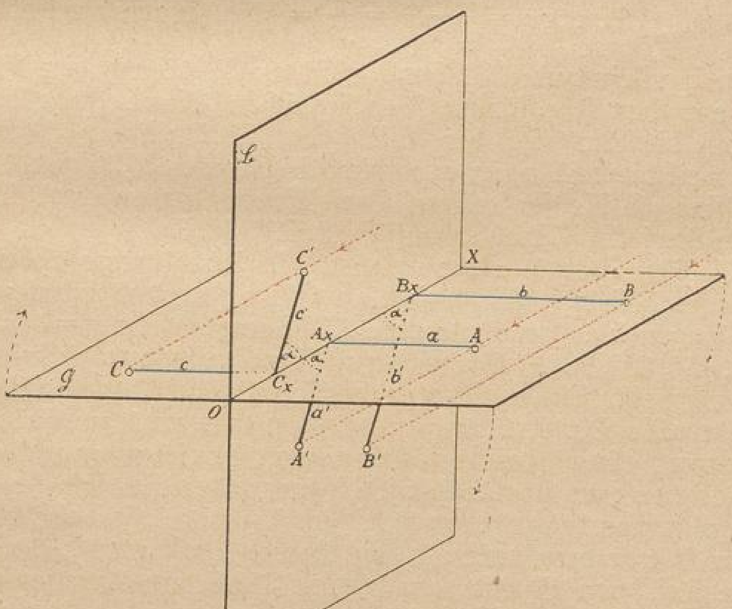


Fig. 9.

Abkürzung **Tiefenlinien** nennen. Es seien $AA_x = a$, $BB_x = b$ und $CC_x = c$ (Fig. 9) drei in der Grundebene gelegene Tiefenlinien, deren Fußpunkte auf der Bildachse entsprechend die Punkte A_x, B_x

und C_x sind. Projizieren wir nach Wahl irgend einer Projektionsrichtung die Strecken a, b und c auf die Bildebene, so sind nach § 3, S. III ihre Bilder a′, b′ und c′ parallel, schneiden also die Bildachse unter dem gleichen Winkel α, ferner haben sie das gleiche Projektionsverhältnis q ($a' : a = b' : b = c' : c = q$).

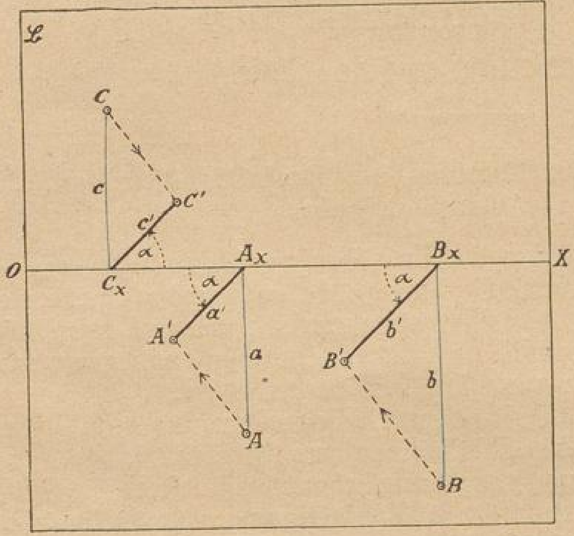


Fig. 10.

Die Angabe des Projektionsverhältnisses q und des Winkels α gibt uns das einfachste Mittel an die Hand, Schrägbilder ohne Benutzung der projizierenden Strahlen zu entwerfen, da durch q und α die Richtung der Projektionsstrahlen vollständig festgelegt ist. Durch q ist zunächst nur der Neigungswinkel φ bestimmt, unter dem die Projektionsstrahlen (z. B. AA′) die Bildebene treffen. Denn es ist z. B. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{A'A_x}{AA_x} = \frac{a'}{a} = q$[1]). (Warum reicht die Angabe von q allein zur Abbildung nicht aus?) Durch den Winkel α, in dem aus den Fig. 9 und 10 ersichtlichen Sinne gemessen, wird dann noch die Richtung der Bilder der Tiefenlinien eindeutig bestimmt, weil die verlängert gedachten Bildstrecken a′, b′ und c′ nichts anderes sind als die senkrechten Projektionen der durch A, B und C gehenden Projektionsstrahlen auf 𝔅 (L. I. § 72, 3a).

Die Größen q und α nennt man die **Abbildungszahlen.** Man kann für sie beliebige Werte wählen. Der Zweckmäßigkeit und Einfachheit wegen bevorzugt man die Abbildungszahlen $q = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ und $\alpha = 30°, 45°, 60°, 90°$.[2]) Oft wird q als **Verkürzungsverhältnis** bezeichnet, da es meist kleiner als oder höchstens gleich 1 gewählt wird.

c) Für alle Darstellungen denken wir uns im folgenden, da wir nur eine Zeichenebene zur Verfügung haben, die Grundebene um die Achse OX samt den in ihr liegenden Figuren heruntergeklappt (s. Fig. 9 und 10), so daß der vordere Teil von 𝔊 mit dem unteren von 𝔅 und der hinter der Bildebene gelegene Teil von 𝔊 mit dem oberen Teile von 𝔅 zusammenfällt.

---

[1]) Für $\frac{a'}{a} = q = 1$ z. B. ist $\varphi = 45°$; für $\frac{a'}{a} = \frac{1}{2}$ ist $\varphi \approx 63{,}43°$.

[2]) Die Wahl dieser Winkel ist deswegen praktisch und bequem, weil sich dabei stets die gebräuchlichen rechtwinkligen Zeichendreiecke mit 30° und 60°, 45° und 45° verwenden lassen.

2 a) Erste Grundaufgabe. Die schiefe Parallelprojektion eines in der Grundebene gelegenen Punktes A für die Abbildungszahlen q und α (z. B. $\frac{1}{2}$ und 45°) zu bestimmen.

Wir fällen (Fig. 11) von A auf die Bildachse das Lot AA_x und ziehen unter einem Winkel von 45° zur Bildachse $A_x A' = \frac{1}{2} A_x A$. A' ist dann das gesuchte Bild von A.

Man findet demnach das Schrägbild eines beliebigen in der Grundebene gelegenen Punktes A, indem man auf die Bildachse das Lot AA_x fällt und diese Strecke für die gegebenen Abbildungszahlen abbildet. Der Endpunkt A' der Bildstrecke $A_x A'$ ist das gesuchte Bild des Punktes A.

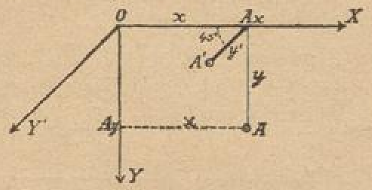


Fig. 11.

Die Abbildung mehrerer Punkte (Fig. 10), z. B. A, B und C, für dieselben Abbildungszahlen kann dadurch sehr vereinfacht werden, daß die Verbindungsstrecken von A, B und C mit ihren Bildern A', B' und C' AA', BB', CC' einander parallel sind (Grund?). Es braucht infolgedessen bei der Zeichnung nur für ein Achsenlot (AA_x) die Verkürzung bestimmt zu werden.

b) Statt unmittelbar durch seine Lage kann ein Punkt A auch durch seine senkrechten Abstände von einem rechtwinkligen Achsensystem (Koordinatensystem) gegeben sein (Fig. 11). Die Bildachse wählen wir als x-Achse und die in einem beliebigen Punkte O auf ihr in der Grundebene errichtete Senkrechte als y-Achse. $OA_x = x$ ist die Abszisse und $OA_y = A_x A = y$ die Ordinate des Punktes A, x und y sind seine Koordinaten.

Aufgabe. Bilde für $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$ die Punkte ab, deren Koordinaten sind
$x = \pm 3$; $y = \pm 2{,}4$ (Längeneinheit 1 cm).

Wie bildet sich die y-Achse ab?

§ 5. Die Abbildung ebener, in der Grundebene gelegener oder ihr paralleler Figuren.

1) Aufgabe 1. Das Schrägbild eines in der Grundebene gelegenen Rechtecks ABCD, dessen Seite AB auf der Bildachse liegt, zu zeichnen (Fig. 12). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Die Seiten AB und CD bilden sich in natürlicher Größe ab, und zwar fällt AB mit seinem Bilde zusammen. Dagegen erscheinen die zur Bildebene senkrechten Strek-

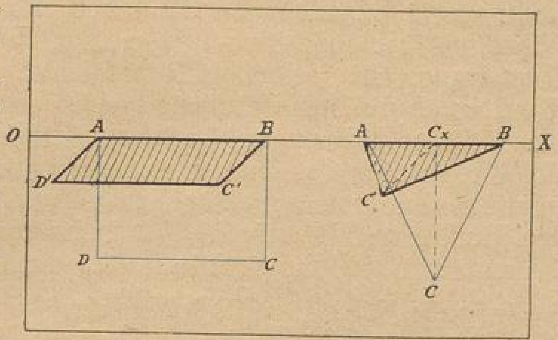


Fig. 12.

ken AD und BC im Bilde auf die Hälfte verkürzt und ihre Projektionen A′C′ und B′D′ bilden mit der Bildachse einen Winkel von 45°. Zeichnung!

Aufgabe 2. Das Schrägbild eines in der Grundebene gelegenen gleichschenkligen Dreiecks ABC, dessen Seite AB auf der Bildachse liegt, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Lösung s. Fig. 12.

Aufgabe 3. Das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden regelmäßigen Sechsecks zu zeichnen, von dem ein Seitenpaar der Bildachse parallel ist (Fig. 13). $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

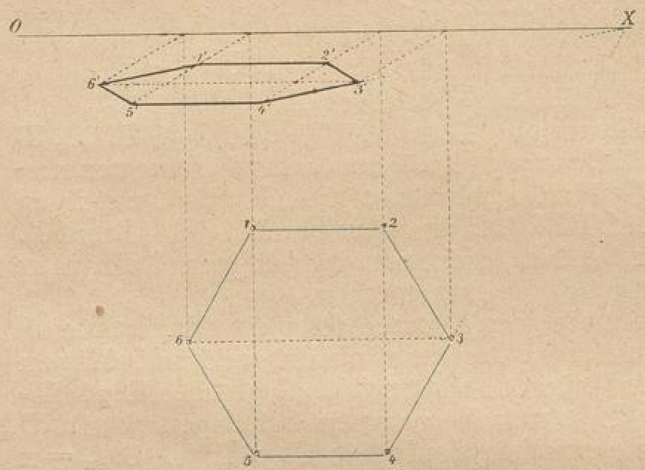


Fig. 13.

Wie bilden sich die frontalen Strecken $\overline{12}$, $\overline{54}$, $\overline{63}$ ab? Eine sehr scharfe Genauigkeitsprobe für die Zeichnung besteht darin, daß die Verlängerungen der Seiten der Urfigur und der ihrer zugehörigen Bilder (z. B. $\overline{43}$ und $\overline{4'3'}$) sich auf der Achse schneiden müssen. (Grund?) Vgl. § 20. 1b u. 2.)

Aufgabe 4. Das Schrägbild eines beliebig in der Grundebene gelegenen Fünfecks $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ zu zeichnen. Genauigkeitsprobe! (Vgl. Aufgabe 3.)

Aufgabe 5. Ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkte durch ihre Koordinaten gegeben sind, abzubilden. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

A: $x = 3$, $y = 2$; B: $x = 7$, $y = 4$; C: $x = 5$, $y = 6$. Längeneinheit 1 cm.

2) Das **Bild einer Kurve,** die in der Grundebene gelegen ist, erhält man dadurch, daß man auf ihr eine hinreichend große Anzahl aufeinander folgender Punkte wählt, sie nach der Grundaufgabe abbildet und die aufeinander folgenden Bildpunkte durch einen stetigen Kurvenzug aus freier Hand verbindet. Eine übergroße Zahl von Punkten abzubilden, ist unzweckmäßig. Denn mit Hilfe unseres Auges, das für den schönen und stetigen Verlauf einer Kurve außerordentlich empfindlich ist, können nahe beieinander liegende Punkte meist genauer verbunden werden, als es durch Einschaltung neu bestimmter Zwischenpunkte möglich ist. Beim Ausziehen des Bildes in Tusche bedient man sich eines Kurvenlineals.

Aufgabe 6. Das Schrägbild eines in der Grundebene liegenden Kreises mit dem gegebenen Radius r, dessen Mittelpunkt M auf der Bildachse liegt, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Wir teilen den Durchmesser AB (Fig. 14), der mit seinem Bilde zusammenfällt, in eine Anzahl, etwa 8, gleiche Teile und ziehen in den Teilpunkten die zum Durchmesser senkrechten Sehnen. Ihre Endpunkte bilden wir in bekannter Weise ab und verbinden sie durch einen zusammenhängenden Kurvenzug. Das **Schrägbild des Kreises** heißt **Ellipse.** Sie ist die Schnittkurve des von sämtlichen Projektionsstrahlen gebildeten Zylindermantels mit der Bildebene, der diese oberhalb und unterhalb der Achse durchstößt. Erzeuge mit Drahtmodellen Schrägbilder von Kreisen! Beobachte die Schattenbilder von Rädern und die Sonnenbilder runder Öffnungen!

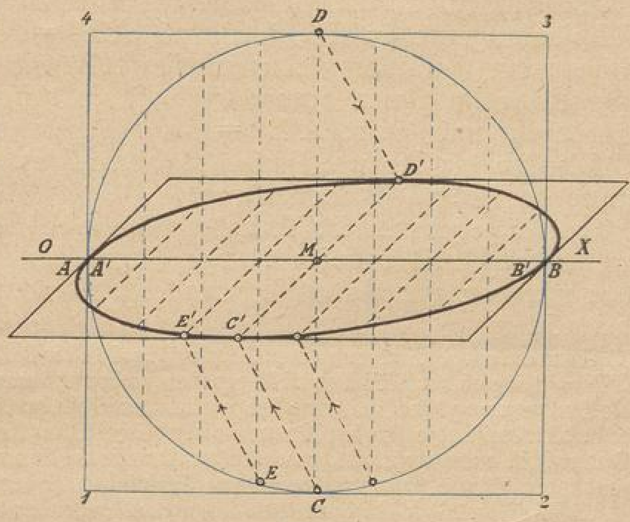


Fig. 14.

Für die Darstellung der Ellipse braucht nur der vor der Bildebene gelegene Halbkreis gezeichnet und abgebildet zu werden. Wie findet man daraus das Bild des hinter der Bildebene liegenden Halbkreises (s. § 3, S. III und IV)?

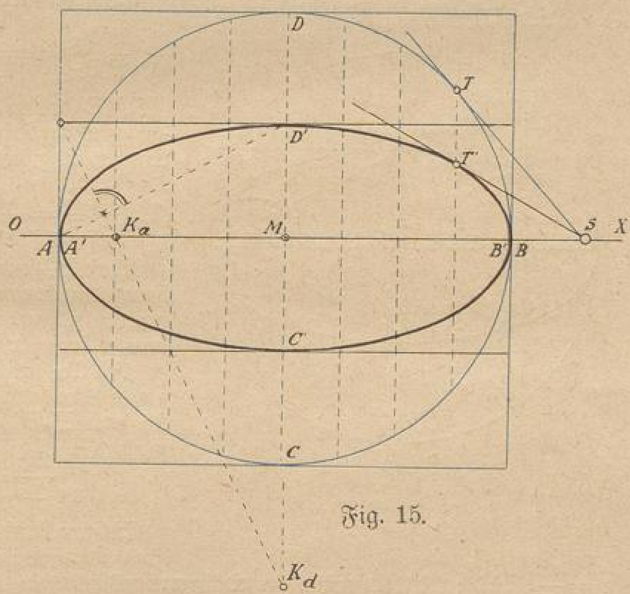


Fig. 15.

Um eine möglichst genaue Zeichnung der Ellipse zu erhalten, ist es nützlich, einige Tangenten in den Endpunkten der zueinander senkrechten Durchmesser AB und CD, die das Tangentenquadrat 1 2 3 4 bilden, mit abzubilden. Das ist auch wichtig, um die *seitlich übergreifenden Bogenstücke* bei A und B, die sogenannten *Henkel*, in schöner und genauer Form zu gewinnen. Dazu ist jedoch namentlich die Abbildung einiger weiterer Punkte bei A und B erforderlich.

Nach der Bemerkung in § 4, 2a) sind die Verbindungslinien der Kreispunkte mit ihren Bildern parallel (z. B. CC' ∥ EE'). Dadurch wird das fortgesetzte umständliche Teilen überflüssig.

Aufgabe 7. Es soll der in Aufg. 6 bezeichnete Kreis für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 90°$ abgebildet und die Tangente im Punkte T′ der Ellipse bestimmt werden (Fig. 15).

Wo müssen sich die Tangente des Kreises in T und die zugehörige Ellipsentangente in T′ schneiden? $A'B' = AB$ und $C'D'$ sind die Bilder der senkrechten Durchmesser AB und CD des Kreises. Da die Kurve zu ihnen symmetrisch ist, so heißen sie die Achsen der Ellipse, und zwar $A'B' = 2a$ die große (Hauptachse) und $C'D' = 2b$ die kleine Achse (Nebenachse). Hinsichtlich der Zeichnung der Kurve s. Anmerkung.

Das angegebene Abbildungsverfahren des Kreises ändert sich nicht, wenn der Kreis beliebig in der Grundebene liegt (Grund?). Man hat nur den zur Bildachse parallelen Durchmesser als Bildachse zu betrachten.

Anmerkung. Sind von einer Ellipse (Fig. 16) die beiden Achsen ($A'B' = 2a$ und $C'D' = 2b$) und der Mittelpunkt M gegeben, so benutzt man beim Ausziehen mit Vorteil die Krümmungskreise in den Endpunkten der Achse, den sogenannten Scheitelpunkten, d. h. die Kreise, die sich der Kurve in den Scheitelpunkten am innigsten anschmiegen. Dadurch ist man imstande, von der punktweise bestimmten und mit Bleistift vorgezeichneten Ellipse Kurvenstücke in den Scheiteln mit der Zirkelreißfeder auszuziehen.

Es sei (Fig. 16) k ein durch den Scheitel A′ gehender Kreis, dessen Mittelpunkt auf A′B′ liegt. Er schneide die Ellipse in den Punkten P′ und Q′, den Bildern der Punkte P und Q des um M mit a beschriebenen Kreises. Nach der Zeichnung der Ellipse ist dann

$$\text{(I)}\quad \frac{P'P_x}{PP_x} = q = \frac{D'M}{DM} = \frac{b}{a}.$$

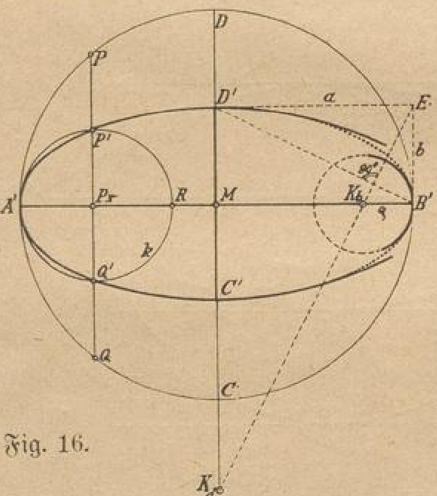


Fig. 16.

Ist R der zweite Schnittpunkt von K mit der großen Achse A′B′, so ergibt sich durch Anwendung des Sehnensatzes nach (I)

$$\text{(II)}\quad \frac{P_xR}{P_xB} = \frac{A'P_x \cdot P_xR}{A'P_x \cdot P_xB} = \frac{P_xP'^2}{P_xP^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Rückt P_x immer näher an den Scheitel A′ heran, so kommen auch die Punkte P′ und Q′ immer näher, und der Kreis k schmiegt sich immer inniger an die Ellipse in A′ an. Fällt endlich P_x mit A′ zusammen, so wird P_xR gleich dem doppelten „Krümmungsradius“ 2ρ und P_xB' gleich $A'B' = 2a$. Mithin ist nach (II) $\frac{2\rho}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$ oder $\rho = \frac{b^2}{a}$.

Entsprechend findet man für den Radius der Krümmungskreise in C′ und D′ $r = \frac{a^2}{b}$. Die Mittelpunkte der Krümmungskreise in den Scheitelpunkten B′ und D′ erhält man gleichzeitig durch folgende einfache Konstruktion: Man vervollständige das rechtwinklige Dreieck MB′D′ zu dem Rechteck MB′ED′ und fälle von E das Lot auf B′D′, das MB′ in K_b und die Verlängerung von D′C′ in K_a trifft. Es ist dann $K_bB' = \rho$ und $K_aD' = r$. Beweis!

3) Denkt man sich eine in der Grundebene gelegene Figur, z. B. ein Fünfeck, samt der Grundebene parallel zu sich verschoben, so erhalten wir nach § 3, S. II stets ein kongruentes und gleichliegendes Bild. Das ist wichtig für die Abbildung der Grund- und Deckflächen von Prismen und Zylindern.

§ 6. Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume. Die zweite Grundaufgabe.

1 a) Um die Lage eines Punktes im Raume festzulegen, wählen wir (Fig. 17) auf der wagerechten Achse unserer lotrechten Bildebene B einen beliebigen Punkt O und errichten in O auf der Bildachse sowohl in der Bildebene wie in der wagerechten Grundebene G die Senkrechte. So erhalten wir drei zueinander senkrechte Achsen, die als x- oder Breitenachse, y- oder Tiefenachse, z- oder Höhenachse unterschieden werden. Ihr Schnittpunkt O heißt **Null-** oder **Anfangspunkt** des rechtwinkligen Achsenkreuzes. Die drei Achsen bestimmen drei zueinander senkrechte Ebenen, die **Koordinatenebenen.** Durch diese Ebenen wird der ganze Raum in acht Fächer, Raumachtel, geteilt (Modell eines Raumachtels!). Um eine einfache Anschauung zu gewinnen, denken wir uns die in einer Fußbodenecke eines Zimmers zusammenstoßenden Flächen endlos erweitert. Die Fußbodenebene entspricht unserer Grundebene G oder der xy-Ebene, die lotrechten Wandflächen entsprechen unseren lotrechten Ebenen, und zwar ist die xz-Ebene unsere Bildebene (Frontebene) B, die yz-Ebene heißt Seitenebene, da ein auf der Grundebene vor B stehender Beschauer sie zur Seite hat.

Ist ein Punkt P in einem Raumachtel gegeben, so fällen wir auf die Koordinatenebenen die Lote $PP_1 = z$, $PP_2 = y$ und $PP_3 = x$. Diese Abstände des Punktes P von den Koordinatenebenen heißen die **Koordinaten** von P. Durch sie ist die Lage des Punktes P bestimmt. Denn ziehen wir P_1P_x senkrecht zu OX, so ist $OP_x = x$ und $P_1P_x = y$ (vgl. auch § 63, 4). Indes ist die Lage von P nur dann völlig bestimmt, wenn außer den Koordinaten x, y und z (z. B. 4; 3; 5) noch das Raumachtel angegeben ist, in dem P liegt. Wieviel Punkte gibt es, die dieselben Koordinaten haben?

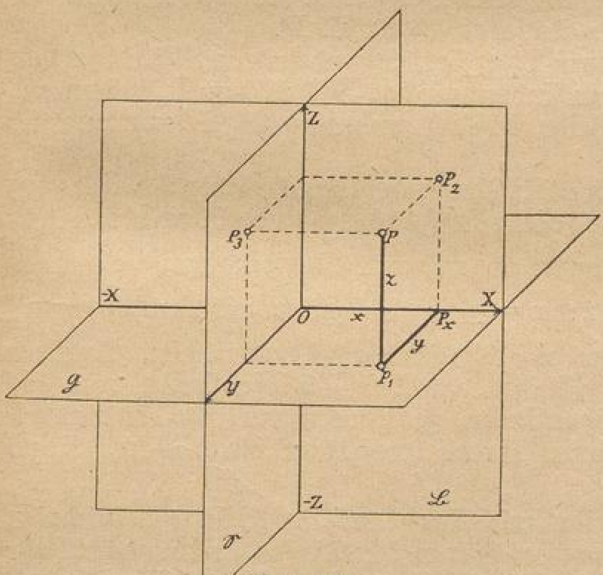


Fig. 17.

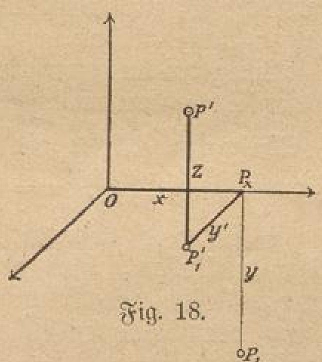


Fig. 18.

Um nun die Lage eines Punktes P lediglich durch die Angabe seiner Koordinaten zu bestimmen, wählen wir auf der x-Achse die Richtung OX, auf der y-Achse die Richtung OY und auf der z-Achse die nach oben gehende Richtung als die positive. Die entgegengesetzten Richtungen sind dann negativ. Wir gelangen dann zu dem Punkte P mit den Koordinaten $x = +2$, $y = +3$, $z = +2{,}5$ (Längeneinheit 1 cm), indem wir von O auf der x-Achse 2 cm in positiver Richtung bis P_x, dann parallel der positiven Richtung der y-Achse 3 cm bis P_1 und endlich parallel der positiven Richtung der z-Achse 2,5 cm bis P gehen, also dem Streckenzuge $OP_x P_1 P$ folgen. Die Lage des Punktes P ist eindeutig bestimmt. Wie gelangen wir zum Punkte Q mit den Koordinaten $x = -2$, $y = +3$, $z = -2{,}5$?

b) Für uns kommt im folgenden besonders der Fall in Betracht, daß der Punkt P durch seine senkrechte Projektion P_1 auf die Grundebene, den **Grundriß** von P (welche Koordinaten sind dadurch gegeben?) und durch seinen Abstand z von der Grundebene, der positiv oder negativ sein kann, gegeben ist.

Der Einfachheit halber stellen wir die abzubildenden Körper zumeist in das erste Raumachtel, für das die Achsenrichtungen sämtlich positiv sind.

2a) **Zweite Grundaufgabe. Das Schrägbild eines beliebigen Raumpunktes P zu bestimmen.**

Wir erhalten das Bild des Punktes P (Fig. 17 und 18), der durch seine Koordinaten x, y und z gegeben ist, indem wir das Bild des Streckenzuges $OP_x P_1 P$ bestimmen. P_1P bildet sich dabei in natürlicher Größe parallel der z-Achse ab (§ 3, S. I).

Ist P durch seinen Grundriß P_1 (Fig. 18) und seinen Abstand z von der Grundebene gegeben, so finden wir das Bild P' von P, indem wir zunächst P_1 in bekannter Weise abbilden und dann $P_1' P' = z$ parallel zur z-Achse ziehen.

Wie gewinnt man aus der Abbildung des Punktes die Abbildung von Strecken und daraus die von Flächen und Körpern?

Aufgabe. Bilde die Punkte ab mit den Koordinaten

$$x = \pm 3;\ y = \pm 2;\ z = \pm 4 \text{ (Längeneinheit 1 cm).}$$

b) Nennen wir die zur x-Achse (Bildachse) parallelen Geraden **Breitenlinien**, die zur y-Achse parallelen **Tiefenlinien** und die zur z-Achse parallelen **Höhenlinien**, so können wir für die Darstellung von Körpern in schiefer Parallelprojektion die einfache Regel aufstellen:

Breiten- und Höhenlinien erscheinen auch im Bild als solche in natürlicher Größe, dagegen erscheinen die Tiefenlinien nach Maßgabe der Abbildungszahlen verkürzt und um ihren Schnittpunkt mit der Bildachse gedreht.

§ 7. Abbildung von Körpern und Körperschnitten.

1a) **Aufgabe 1.** Das Schrägbild eines auf der Grundebene ruhenden Würfels (Kantenlänge a = 4 cm), dessen Grundkante CD

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

auf der Bildachse liegt, für die Abbildungszahlen $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ zu zeichnen (Fig. 19).

Man bilde zunächst die Grundfläche für die gegebenen Abbildungszahlen und dann die Ecken der Deckfläche ab (Genauigkeitsproben!). Welche Seitenflächen des Würfels bilden sich in wahrer Größe ab? Was für Figuren sind die Bilder der anderen Flächen?

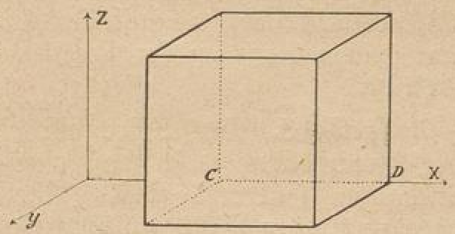


Fig. 19.

Sichtbarkeit. Betrachtet man den abzubildenden Würfel in der Richtung der Projektionsstrahlen (Sehstrahlen), so sind einzelne Kanten dem Auge nicht sichtbar. Die Bilder solcher dem Auge nicht sichtbaren Linien eines Körpers werden im folgenden punktiert oder auch weggelassen, dagegen die der sichtbaren gleichmäßig ausgezogen. Die Abbildungen gewinnen dadurch sehr an Anschaulichkeit.

Aufgabe 2. Den in Aufg. 1 bezeichneten Würfel auch für die Abbildungszahlen

	a)	b)	c)	d)
$q =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\alpha =$	30°	45°	90°	45°

darzustellen (Fig. 20).

Um die Wirkung auf das Auge beurteilen zu können, sind die Schrägbilder desselben Würfels für die gebräuchlichen, in Aufg. 2 gegebenen Abbildungszahlen nebeneinander gezeichnet. Der unschöne Eindruck, den

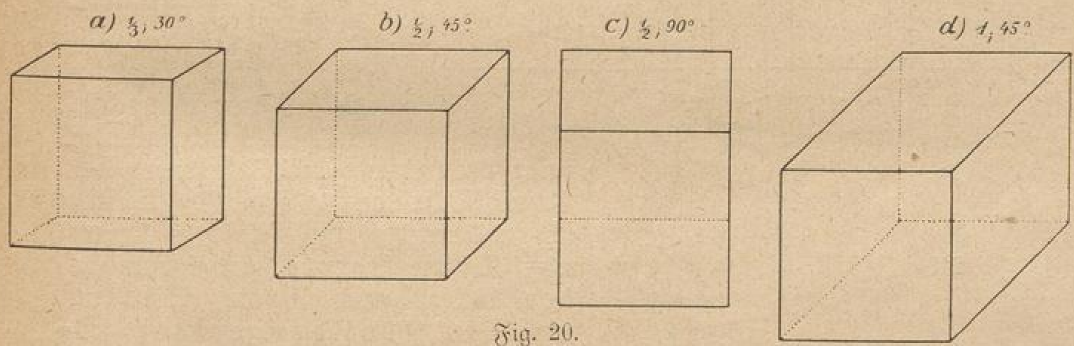


Fig. 20.

man z. B. im Falle Aufg. 2d) erhält, rührt daher, daß man das Bild nicht in der Richtung der Projektionsstrahlen betrachtet. Geschieht dieses in einiger Entfernung, so verschwindet für das Auge die Verzerrung, und das Bild wirkt richtig. Die Projektion mit den Werten $q = 1$ und $\alpha = 45°$ ist unter dem Namen **Kavalierperspektive**[1]) bekannt, da sie seinerzeit den französischen

[1]) Der Name wird auch darauf zurückgeführt, daß die Projektion mit den Werten $q = 1$ und $\alpha = 45°$ früher zur Anfertigung von Übersichtsplänen von Festungswerken benutzt wurde. Mit „Kavaliere" bezeichnet man die hohen Aufbauten bei den Festungswerken.

Kavalieren auf der Kriegsschule als die bequemste zur Anwendung empfohlen wurde. Für $q = 1$ und $\alpha = 90°$ erhält man die sogenannte **Militärperspektive**, die also den Grundriß in wahrer Gestalt liefert. Bei sehr steilem Einfallen der Projektionsstrahlen spricht man von **Vogelperspektive.**

Aufgabe 3. Das Schrägbild eines Würfels zu zeichnen, der so auf der Grundebene ruht, daß eine Diagonale seiner Grundfläche zur Bildachse senkrecht steht (Übereckstellung). a) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$; b) $q = 1$, $\alpha = 90°$ (Militärperspektive).

Aufgabe 4. Den Körper zu zeichnen, der aus einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm entsteht, wenn man die Ecken durch Schnitte, die durch die Mitten dreier in einer Ecke zusammenstoßender Kanten geführt werden, abschneidet. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$. (Kubooktaeder, Kristallform von Eisenkies).

Aufgabe 5. Ein auf der Grundebene stehendes gerades Prisma mit der Höhe h in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Die Grundfläche des Prismas sei ein beliebiges Fünfeck ABCDE, das nach Gestalt und Lage in Fig. 21 angegeben ist. Nach Abbildung der Grundfläche zieht man durch die Eckpunkte A′B′C′D′E′ des Bildes die Parallelen zur z-Achse und trägt auf ihnen die gegebene Höhe h ab. Die Deckfläche ergibt sich danach durch Parallelverschiebung um die Höhe h nach oben.

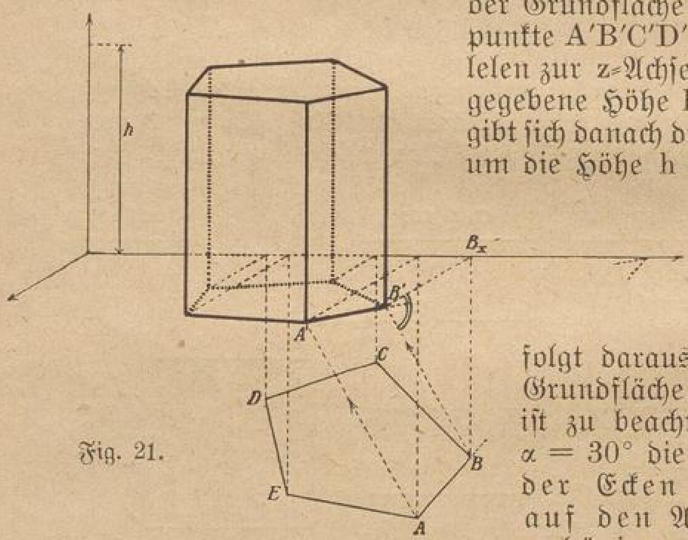
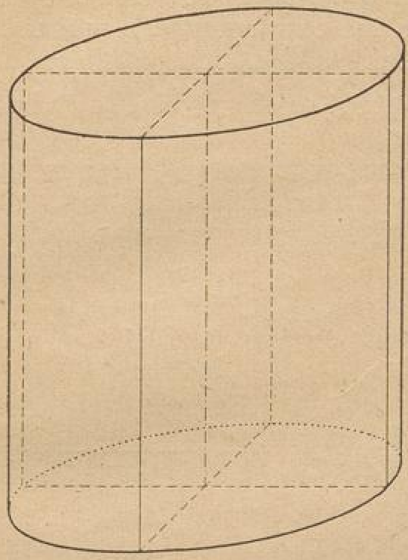


Fig. 21.

Die Grundseiten und ihre Bilder (z. B. AB und A′B′) schneiden sich auf der Bildachse. Welche Vereinfachung folgt daraus für die Abbildung der Grundfläche des Körpers? Weiter ist zu beachten, daß für $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 30°$ die Verbindungsstrecken der Ecken mit ihren Bildern auf den Abbildungen der zugehörigen Tiefenlinien (30°-Linien) senkrecht stehen, z. B. $BB' \perp B'B_x$.

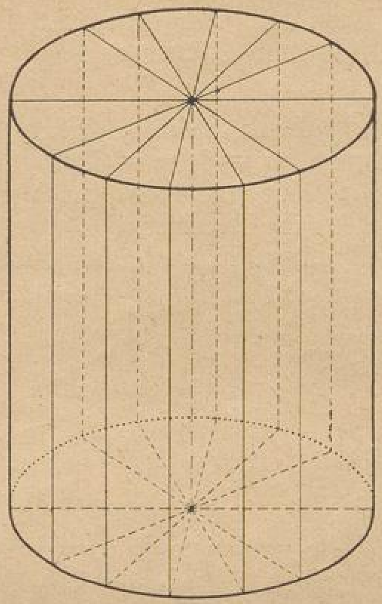
Aufgabe 6. Das Schrägbild eines auf der Grundebene stehenden geraden Zylinders von der Höhe h zu zeichnen. a) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45$, b) $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 90°$ (Fig. 22 und 23).

Die Zylinderachse lassen wir der Einfachheit halber mit der z-Achse zusammenfallen. Die Grundfläche wird nach § 5, Aufg. 6 abgebildet. Die der Grundfläche parallele und kongruente Deckfläche ergibt sich wie beim Prisma durch Parallelverschiebung um die Höhe h. Die gemeinsamen Tangenten der Bilder der Grund- und Deckfläche des Zylinders bilden für den Mantel die Sichtbarkeitsgrenzen, die in Fig. 23 mit den Seitenlinien des in der Bildebene gelegenen Achsenschnittes (Frontalschnittes) zusammenfallen.



$(\frac{1}{2}, 45°)$

Fig. 22.



$(\frac{1}{2}, 90°)$

Fig. 23.

b) **Aufgabe 7.** Das Schrägbild einer auf der Grundebene stehenden Pyramide mit der Höhe h zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Von der Pyramide (Fig. 24) ist außer der Höhe die Grundfläche nach Lage und Gestalt, ferner die senkrechte Projektion S_1 (Grundriß) der Spitze gegeben. Zeichnung!

Aufgabe 8. Einen geraden Kegel mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$ (vgl. Fig. 29).

c) **Aufgabe 9.** Ein regelmäßiges Oktaeder mit der Achsenlänge $l = 6$ cm in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen (Fig. 25). $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

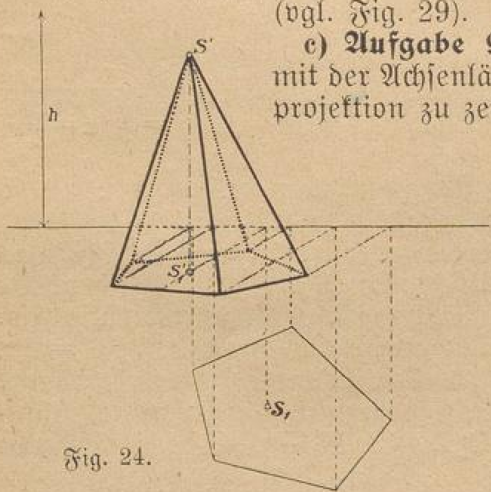


Fig. 24.

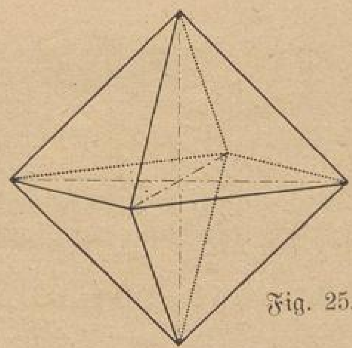


Fig. 25.

Der Einfachheit halber lassen wir die drei Achsen des Körpers mit den Achsen unseres Koordinatensystems zusammenfallen. Die Höhen- und Breitenachse erscheinen im Bilde in natürlicher Größe, während die Tiefenachse auf ein Drittel verkürzt wird (L. I. § 103).

Bilde den Körper auch ab, wenn die Kantenlänge $a = 4$ cm gegeben ist.

Aufgabe 10. Das Schrägbild eines Rhombendodekaeders zu zeichnen. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

Der Körper entsteht aus dem Würfel, indem auf die Seitenflächen regelmäßige vierseitige Pyramiden, deren Höhe gleich der halben Kantenlänge ist, aufgesetzt werden. Der Körper wird von 12 Rhom-

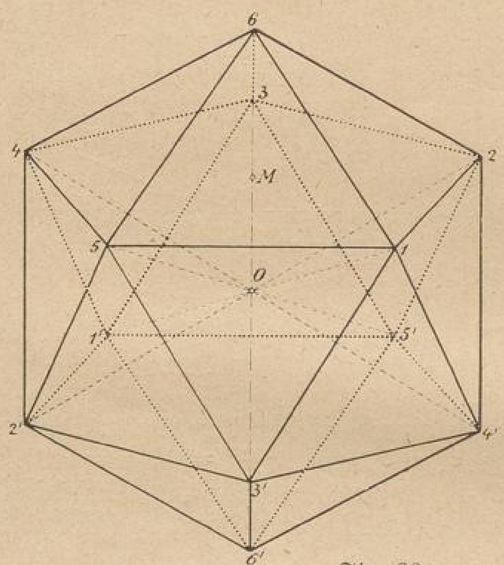


Fig. 26a.

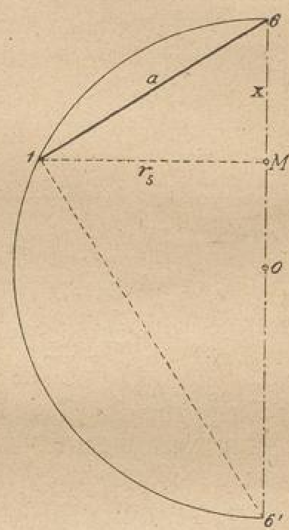


Fig. 26b.

ben begrenzt (Name!). Da der Granat diese Kristallform besitzt, heißt er auch Granatoeder.

Aufgabe 11. Das Schrägbild eines regelmäßigen Ikosaeders (Kantenlänge a), von dem die Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte (66') auf der Grundebene senkrecht steht, zu zeichnen. $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 90°$ (Fig. 26).

Nach einer kurzen Orientierung über den Bau des Körpers (L. I. § 104, 1) ergibt sich die folgende einfache Darstellung:

Bilde zunächst das zur Grundebene parallele regelmäßige Fünfeck 1 2 3 4 5 (Fig. 26a) mit dem Mittelpunkte M ab, ziehe $M6 = x$, wo x die Höhe der fünfseitigen Pyramide bezeichnet (Konstruktion in Fig. 26b), parallel der z-Achse und verlängere M 6 bis 6', so daß $66' = 2r$, dem Durchmesser der Umkugel, wird. Nun halbiere 66' und bestimme mit Hilfe des Mittelpunktes O die Gegenpunkte der Ecken des Fünfecks 1 2 3 4 5. $1'O = 1O$; $2'O = 2O$; ... (§ 3, S. IV). Löse die Aufgabe auch für $q = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$.

Aufgabe 11a. Ein regelmäßiges Ikosaeder ruht mit einer Seitenfläche so auf der Grundebene, daß die Verbindungsstrecke zweier Gegenpunkte der Bildebene parallel ist. Das Schrägbild zu entwerfen für $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$ (Fig. 27).

Wie muß man das Bild (Fig. 27) betrachten, wenn es richtig wirken soll?

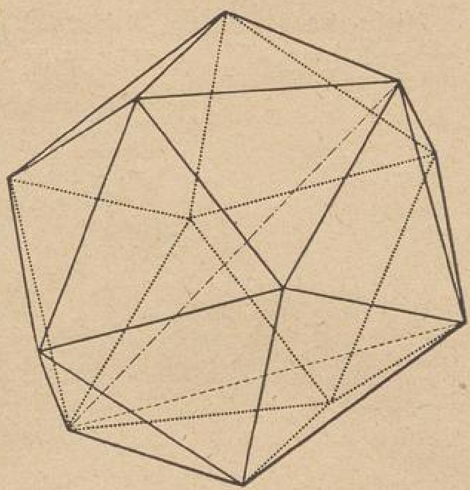


Fig. 27.

Aufgabe 12. Das Schrägbild eines regelmäßigen Dodekaeders (Kantenlänge a), das mit einer Seitenfläche beliebig auf der Grundebene ruht, zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$.

Die 20 Ecken des Körpers bilden zu je 5 die Ecken von 4 regelmäßigen Fünfecken, die im vorliegenden Falle der Grundebene parallel sind. Die Abbildung dieser Fünfecke liefert am schnellsten eine genaue Zeichnung. Zur Orientierung über den Körper s. L. I. § 105.

2) **Aufgabe 13.** Ein regelmäßig-sechsseitiges Prisma durch eine zur Bildebene senkrechte Ebene, deren Neigungswinkel mit der Grundebene 30° beträgt, zu schneiden (Fig. 28). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

Zeichnung! Bestimme die Schnittfigur in wahrer Größe!

Aufgabe 14. Löse die entsprechende Aufgabe für einen geraden Zylinder (vgl. Fig. 30). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 90°$.

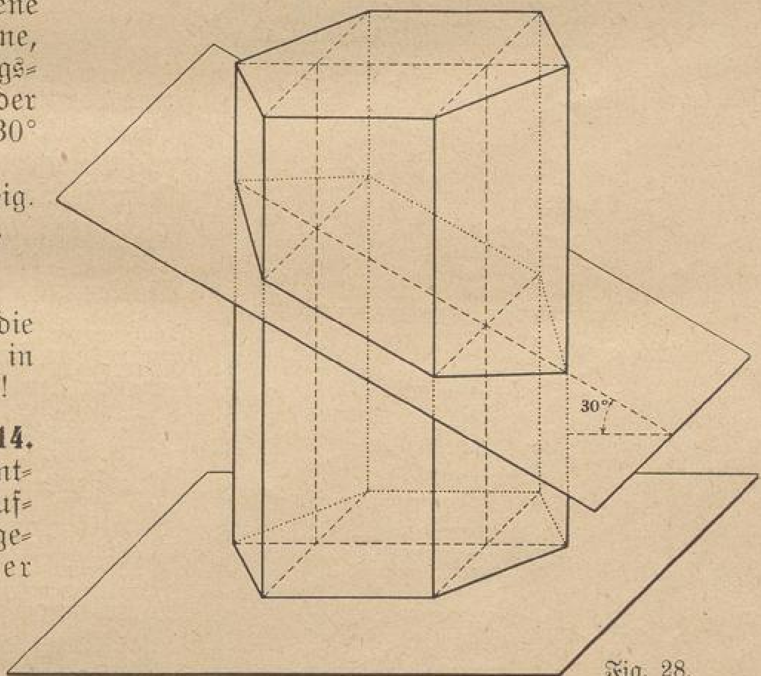


Fig. 28.

$(q = \frac{1}{2}, \alpha = 45°)$

Aufgabe 15. Eine regelmäßig-sechsseitige Pyramide durch eine zur Bildebene senkrechte Ebene, deren Neigung zur Grundebene

$\varphi = 30^\circ$ beträgt, zu schneiden und die Schnittfigur in wahrer Größe zu zeichnen. $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^\circ$.

Aufgabe 16. Löse die entsprechende Aufgabe für einen geraden Kegel (Fig. 29). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$.

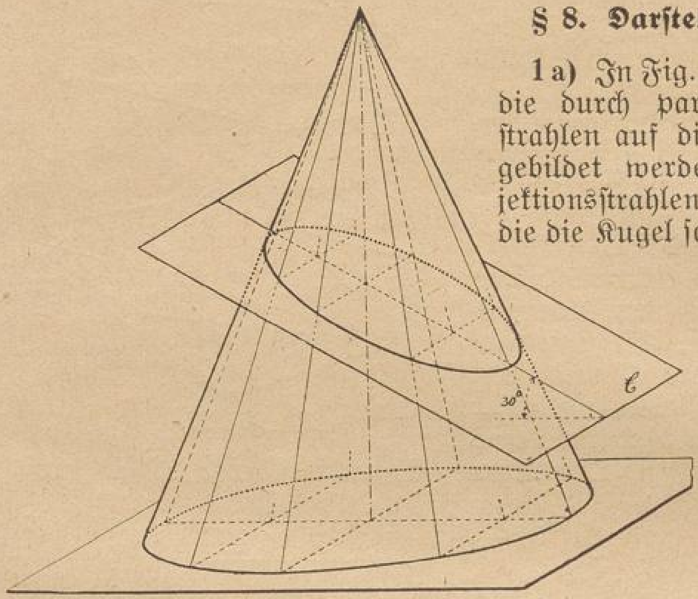


Fig. 29.

§ 8. Darstellung der Kugel.

1 a) In Fig. 30 sei O eine Kugel, die durch parallele Projektionsstrahlen auf die Bildebene B abgebildet werden soll. Die Projektionsstrahlen zerfallen in solche, die die Kugel schneiden, und solche, die sie berühren. Die berührenden Projektionsstrahlen bilden einen Strahlenzylinder (Berührungszylinder), der die Kugel in einem Großkreise u, dessen Ebene auf den Projektionsstrahlen senkrecht steht, berührt und die Bildebene in einer Kurve u′, einer Ellipse, die nichts anderes als die Parallelprojektion des Großkreises u darstellt, durchdringt. Für ein Auge, das aus sehr großer Entfernung längs den Projektionsstrahlen hinsieht, wäre der Großkreis u der **wahre Umriß** des Körpers. Im Gegensatz dazu heißt sein Bild u′ der **scheinbare Umriß** der Kugel. Dieser ist offenbar allein nicht imstande, in dem Beschauer den Eindruck einer Kugel hervorzurufen. Um dies zu erreichen, ist noch die Abbildung von wichtigen Schnitten erforderlich.

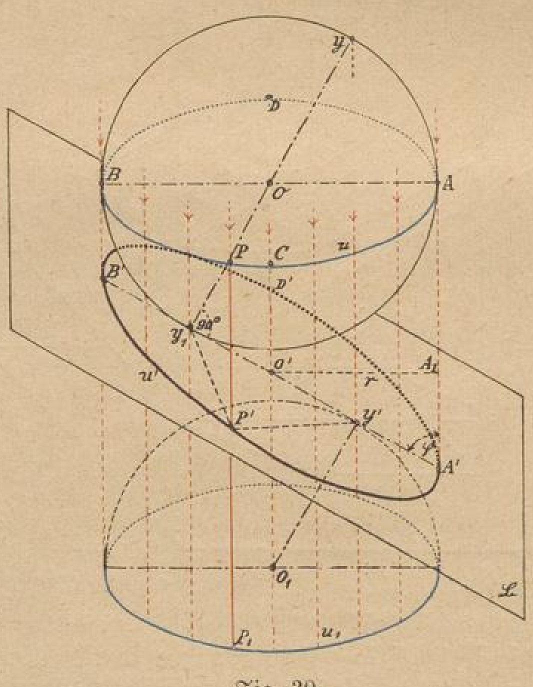


Fig. 30.

b) Um den Umrißkreis u (Fig. 30) abzubilden, beachten wir, daß der zur

Bildebene B parallele Durchmesser CD sich in wahrer Größe abbildet, also $C'D' = CD = 2r$. Dagegen erscheint der zu CD senkrechte Durchmesser AB im Bilde ($A'B'$) gestreckt und auch senkrecht zu $C'D'$. $A'B' = 2a$ wird die große und $C'D' = 2b$ die kleine Achse der Ellipse. Die halbe Länge der ersten ergibt sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $A'O'A_1$, von dem die Kathete $O'A_1 = r$ und der gegenüberliegende Winkel $O'A'A_1 = \varphi$, der Neigungswinkel der Bildstrahlen mit der Bildebene, der leicht bestimmt werden kann,[1]) bekannt sind. Denkt man sich die Kugel innerhalb des Tangentenzylinders verschoben, bis sie die Bildebene berührt, so wird diese auf $A'B'$ im Punkte Y_1 berührt. Der zur Bildebene senkrechte Durchmesser Y_1Y bildet sich auf $A'B'$ ab, und zwar als die Brennpunkte[2]) Y_1 und Y' der Umrißellipse. Das Umrißbild der Kugel ändert sich nicht, wenn diese innerhalb des Tangentenzylinders beliebig verschoben wird.

2) Aufgabe. Das Schrägbild einer Kugel zu zeichnen (Fig. 31). $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$.

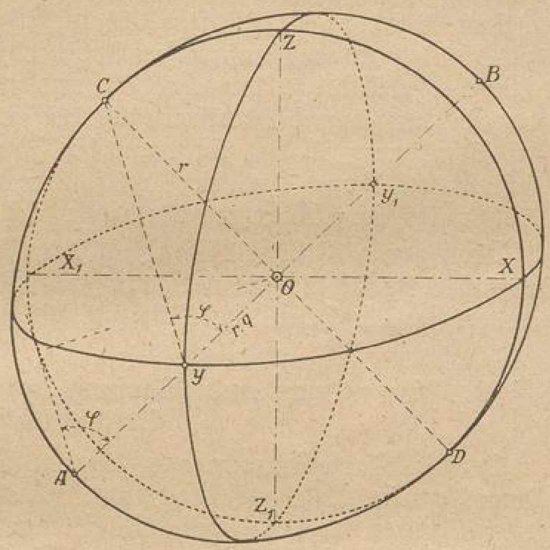


Fig. 31.

I. Als Nullpunkt unseres Koordinatensystems wählen wir den Mittelpunkt O der Kugel und bilden zunächst die in den drei Koordinatenebenen gelegenen Schnittkreise ab, von denen sich der Frontalkreis, das ist der in der Bildebene gelegene, in wahrer Größe abbildet. Die beiden anderen Schnittkreise erscheinen im Bild als Ellipsen, die zum Teil über den Frontalkreis hinausgreifen. Die große Achse der Umrißellipse liegt auf dem Bild YY_1 des zur Bildebene senkrechten Durchmessers, die kleine Achse ist gleich dem dazu senkrechten Durchmesser $CD = 2r$. Da $OC = r$ und $OY = r.q$, also $\sphericalangle CYO = \varphi$ ist, so findet man den Endpunkt A der halben großen Achse der Umrißellipse, indem man parallel zu CY

[1]) Ist z. B. $q = \frac{1}{2}$ gegeben, so ist $\operatorname{cotg} \varphi = \frac{A'A_1}{A_1O'} = \frac{1}{2}$, also, da $A_1O' = r$, $A'A_1 = \frac{1}{2}r$.

[2]) Der Nachweis, daß das Umrißbild u' der Kugel eine Ellipse mit den Brennpunkten Y' und Y_1 ist, ergibt sich leicht mit Hilfe der sog. Dandelinschen Kugeln O und O_1 (Fig. 30). Diese berühren die Bildebene in den Punkten Y_1 und Y' und den Tangentenzylinder in den Kreisen u und u_1, deren Ebenen zu dessen Achse senkrecht sind und deshalb überall den gleichen Abstand haben. Für einen beliebigen Punkt P' von u' ist daher $P'Y' + P'Y_1 = P'P_1 + P'P = PP_1$. Das Umrißbild u' hat daher die Eigenschaft, daß die Summe der Abstände eines jeden Punktes von den beiden Punkten Y' und Y_1, den Brennpunkten, fest ist, es ist also eine Ellipse (L. II. § 51, 2). $PP_1 = A'B'$, Beweis!

an den Frontalkreis die Tangente zieht, die die Verlängerung von OY in A trifft.

Um das erhaltene Bild noch anschaulicher zu gestalten, ist die Abbildung von Schnitten parallel zur Grundebene oder parallel zur Seitenebene erforderlich. Zu dem Zwecke teile man z. B. den in der z-Achse liegenden Durchmesser in 6 gleiche Teile, lege durch die Teilpunkte die zur Grundebene parallelen Schnitte und bilde sie samt den umgeschriebenen Quadraten ab. Die Bilder dieser Schnitte sind Ellipsen, die von der Umrißellipse sämtlich umschlossen werden. In der Fig. 31 sind sie der Deutlichkeit halber nicht gezeichnet.

II. Eine einfache und bei günstig gewählten Abbildungszahlen recht anschauliche Darstellung der Kugel ergibt sich auch, wenn man in gleicher Weise wie vorher eine hinreichend große Anzahl frontaler Schnitte abbildet, die sich wieder als Kreise darstellen. Die umhüllende Ellipse ist wieder der scheinbare Umriß der Kugel.

Das Bild der Kugel (Fig. 31) wirkt infolge der starken Verzerrung zunächst befremdend auf unser Auge. Doch ändert sich das sofort, wenn man die Bildebene lotrecht hält und in angemessener Entfernung in der Richtung der Sehstrahlen nach dem Bild hinsieht. Dann verschwindet die Verzerrung für das Auge und die Figur stellt mit täuschender Körperlichkeit eine Kugel dar, die Umrißellipse erscheint als Kreis, obgleich der Sehpunkt (Projektionszentrum) unendlich fern liegt.

Übungen. 1. Wie bildet sich der Umriß u der Kugel ab, wenn $\alpha = 90°$ wird? 2. In welchem Falle ist u' wieder ein Kreis? 3. Wie ändert sich die Gestalt des Umrißbildes, wenn $\sphericalangle\ \varphi$ immer kleiner wird?

§ 9. Anwendung und Wertung der schiefen Parallelprojektion. Geschichtliches.

1) Die Darstellungen der schiefen Parallelprojektion zeichnen sich durch große Anschaulichkeit aus. Neben den Breiten- und Höhenverhältnissen treten auch die Tiefenverhältnisse klar hervor. Sie eignet sich deshalb besonders zur Darstellung von Gegenständen, in deren Gestalt drei zueinander senkrechte Richtungen hervortreten. So bildet sie das einfachste Verfahren zum Zeichnen von Kristallformen, wobei man die Werte $q = \frac{1}{3}$ und $\alpha = 20°$ bevorzugt, zum Darstellen wissenschaftlicher und technischer Apparate (Physikbuch!), zum Skizzieren von Maschinenteilen und architektonischen Gegenständen, endlich zum Anfertigen der stereometrischen Figuren. Die Abbildung mit den Zahlen $q = 1$ und $\alpha = 45°$ (Kavalierperspektive) gestattet bei unverändertem Maßstab die unmittelbare Entnahme der Höhen-, Breiten- und Tiefenmaße. Sie wird deswegen häufig im Baufach zur Darstellung von Steinschnitten angewandt. Das unter dem Namen „Militärperspektive" bekannte Abbildungsverfahren wird benutzt zur Anfertigung von Festungs-, Stadt- und Lageplänen.

Den erwähnten Vorzügen steht, abgesehen von dem fehlerhaften Eindruck, den das Schrägbild besonders in gerader Ansicht auf das

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auge macht, ein Hauptmangel gegenüber. Die schiefe Parallelprojektion ist zur unmittelbaren Festlegung räumlicher Gebilde nicht einfach genug. Schon die Darstellung verhältnismäßig einfacher Körper erfordert das Hinzutreten der senkrechten Projektion. So ist z. B. in Aufg. 7, § 7 zur Darstellung der Pyramide in Wirklichkeit die senkrechte Projektion sowohl zur Grundebene (Grundriß) als auch zur Bildebene (Aufriß) gegeben. Weiter bietet die Darstellung von krummen Linien und Flächen Schwierigkeiten. Ein zur Grundfläche paralleler Kreis z. B. bildet sich bei schiefer Parallelprojektion als Ellipse ab, während er bei der senkrechten Projektion sich wieder als Kreis darstellt.

2) Die Anfänge der schiefen Parallelprojektion gehen, wie alte Stadt- und Befestigungspläne lehren, weit zurück. Schon die Darstellungen in den Gräbern der alten Ägypter zeigen die Gegenstände (z. B. eine Palastanlage) in einer Art Militärperspektive.[1])

Das bereits sehr früh benutzte Verfahren der schiefen Parallelprojektion wurde besonders durch J. H. Lambert (1728—1777) wissenschaftlich behandelt und bekanntgemacht. Im vorigen Jahrhundert ist das Verfahren der schiefen Parallelprojektion verallgemeinert und als besondere Darstellungsmethode („Axonometrie") begründet worden. Wählt man als Bildebene nicht, wie wir es bisher getan haben, eine lotrechte Ebene, sondern eine ganz beliebige schief gelegene Ebene, so erhält man die allgemeinste Form der schiefen Parallelprojektion.

Zweiter Abschnitt.

Gerade Parallelprojektion.

(Grund- und Aufrißverfahren).

---

§ 10. Allgemeines. Darstellung auf zwei Bildebenen.

1) Die gerade Parallelprojektion oder senkrechte Projektion[2]) ist als besonderer Fall der Parallelprojektion zu betrachten, bei der die Projektionsstrahlen die Bildebene unter einem rechten Winkel treffen. Deswegen gelten auch hier die in § 3 abgeleiteten Hauptsätze der Parallelprojektion. Die senkrechte Projektion hat den besonderen Vorzug, daß sie gestattet, Körper nach den drei Hauptrichtungen in gleichem Maßstabe abzubilden. Darauf beruht ihre große Bedeutung für Handwerk, Technik und Kunst.

---

[1]) Vgl. F. Schilling, Über Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie, 1904, S. 147.

[2]) Wenn im zweiten Abschnitt von Projektion oder Projizieren schlechthin gesprochen wird, so ist stets die senkrechte (orthogonale = rechtwinklige) Projektion gemeint.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN